Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Н. А. Сидоров, О ветвлении решений задачи Коши для одного класса нелинейных интегро-дифференциальных уравнений,
Дифференц. уравнения, 1967, том 3, номер 9, 1592–1601

https://www.mathnet.ru/de227

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.81
16 января 2026 г., 12:55:51

СЕНТЯБРЬ 1967 г., ТОМ III, № 3

УДК 517.948.34

О ВЕТВЛЕНИИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н. А. СИДОРОВ

Возьмем уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \int_0^1 k\left(x, y, u(y, t), \frac{\partial u(y, t)}{\partial t}, t\right) dy. \tag{1}$$

Здесь $k(x, y, u_1, u_2, t)$—аналитическая функция в окрестности точки $t = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = 0$:

$$k(x, y, u_1, u_2, t) = \sum_{l+k+j \geqslant k}^{\infty} k_{l,k,j}(x, y)\, u_1^l\, u_2^k\, t^j, \tag{2}$$

коэффициенты $k_{l,k,j}(x, y)$ регулярны в квадрате $0 \leqslant x, \quad y \leqslant 1$, причем $|k_{l,k,j}(x, y)| \leqslant a_{l,k,j}$, ряд

$$\sum_{l+k+j \geqslant 1}^{\infty} a_{l,k,j}\, u_1^l\, u_2^k\, t^j \tag{3}$$

сходится абсолютно и равномерно при $|u_1| \leqslant \rho_1$, $|u_2| \leqslant \rho_2$, $|t| \leqslant \rho$.

Ищем решение уравнения (1), удовлетворяющее условию

$$u(x, 0) = 0, \tag{4}$$

в классе функций, непрерывных в области $R = X \times T$ ($X = 0 \leqslant x \leqslant 1$, $T = -\rho \leqslant t \leqslant \rho$) с непрерывными частными производными

$$\frac{\partial u}{\partial t} \to 0 \text{ при } t \to 0. \tag{5}$$

Такой класс функций обозначим через $C_{[R]}$. Отметим, что дополнительное условие (5), не вызванное сутью задачи (1), (4), является существенным для доказательства единственности решения.

Задача Коши для других классов интегро-дифференциальных уравнений с частными производными по t изучалась в работах К. Т. Ахмедова [1], Р. Кабулова [2] и других методом Некрасова — Назарова [3].

В настоящей работе установлено условие существования единственного решения и при определенном ограничении построено уравнение разветвления задачи (1), (4).

В отличие от известного алгебраического уравнения разветвления Ляпунова — Шмидта [4] для данной задачи уравнение разветвления является дифференциальным.

§ 1. СЛУЧАЙ ЕДИНСТВЕННОГО РЕШЕНИЯ

Пусть 1 не является характеристическим числом ядра

$$k(x, y) = k_{0,1,0}(x, y), \tag{6}$$

k_0 — номер первого отличного от нуля коэффициента

$$k_{0,0,j}(x, y) \quad (j = 1, 2, 3, \ldots).$$

Тогда уравнение (1) можно разрешить относительно производной и получить уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \int_0^1 \Big\{ B_{1,0,0}(x, y)\, u(y, t) + \sum_{j=k_0}^{\infty} B_{0,0,j}(x, y)\, t^j + \sum_{l+k\geqslant 2}^{\infty} B_{l,k,0}(x, y) \times$$

$$\times u^l(y, t) \left(\frac{\partial u(y, t)}{\partial t}\right)^k + \sum_{l+k\geqslant 1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} B_{l,k,j}(x, y)\, u^l(y, t) \left(\frac{\partial u(y, t)}{\partial t}\right)^k t^j \Big\}\, dy, \tag{7}$$

где

$$B_{l,k,j}(x, y) = k_{l,k,j}(x, y) + \int_0^1 \Gamma(x, y_1)\, k_{l,k,j}(y_1, y)\, dy_1, \tag{8}$$

а $\Gamma(x, y_1)$ — резольвента ядра $k(x, y)$.

Решение уравнения (7) ищем в виде ряда

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} u_i(x)\, t^{i+k_0}, \tag{9}$$

коэффициенты которого $u_i(x)$ вычисляются последовательно по рекуррентным формулам

$$u_1(x) = \frac{1}{1+k_0} \int_0^1 B_{0,0,k_0}(x, y)\, dy,$$

$$u_i(x) = \frac{1}{i+k_0} f_i(x, u_1, \ldots, u_{i-1}) \quad (i = 2, 3, 4, \ldots), \tag{10}$$

где f_i — известные функции.

Таким образом, мы можем формально построить ряд (9). Докажем методом мажорант, что построенный ряд сходится при достаточно малых $|t|$.

Построение мажорантного ряда. Введем следующие ограничения:

$$\max_{0\leqslant x, y\leqslant 1} \{ |B_{l,k,j}(x, y)|,\ l,\ k,\ j = 0, 1, 2, \ldots \} \leqslant A \tag{11}$$

и рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{du}{dt} = A\left[u + \sum_{j=k_0}^{\infty} t^j + \sum_{l+k\geqslant 2}^{\infty} u^l \left(\frac{du}{dt}\right)^k + \sum_{l+k\geqslant 1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} u^l \left(\frac{du}{dt}\right)^k t^j \right] \tag{12}$$

при $|t| \leqslant \rho$ с начальным условием $u(0) = 0$. Будем искать решение уравнения (12) в виде ряда

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} a_i t^{i+k_0}. \tag{13}$$

Подставляя (13) в (12), получим формулы для определения коэффициентов ряда (13):

$$a_1 = \frac{A}{1+k_0},$$
$$a_i = \frac{A}{i+k_0}\bar{f}_i(a_1, \ldots, a_{i-1}) \quad (i = 2, 3, 4, \ldots). \tag{14}$$

Из (10), (14) следует, что

$$|u_1(x)| \leqslant \frac{A}{1+k_0} = a_1. \tag{15}$$

Заметим, что

$$|f_i(x, u_1, \ldots, u_{i-1})| \leqslant A\,\bar{f}_i(\max|u_1|, \ldots, \max|u_{i-1}|) \tag{16}$$

для $0 \leqslant x \leqslant 1$, $i = 2, 3, 4, \ldots$, а

$$\bar{f}_i(\max|u_1|, \ldots, \max|u_{i-1}|) \leqslant \bar{f}_i(a_1, \ldots, a_{i-1}), \tag{17}$$

если $|u_j(x)| \leqslant a_j$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$, $j = 1, 2, \ldots, i-1$.

Пусть $|u_i(x)| \leqslant a_i$ при $i = 2, 3, \ldots, n-1$. Докажем, что тогда $|u_n(x)| \leqslant a_n$.

Действительно,

$$|u_n(x)| \leqslant \frac{1}{n+k_0}|f_n(x, u_1, \ldots, u_{n-1})| \leqslant \frac{A}{n+k_0}\bar{f}_n(\max|u_1|, \ldots$$
$$\ldots, \max|u_{n-1}|) \leqslant \frac{A}{n+k_0}\bar{f}_n(a_1, \ldots, a_{n-1}) = a_n.$$

Поэтому ряд (13) мажорирует ряд (9). Воспользовавшись теоремой о неявной функции, разрешим уравнение (12) относительно производной и получим уравнение

$$\frac{du}{dt} = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j}\,u^i t^j + \sum_{j=k_0}^{\infty} a_{0,j}\,t^j, \tag{18}$$

которое имеет единственное малое решение. Следовательно, ряд (13) сходится и формальное решение (9) является настоящим.

Покажем, наконец, что в классе $C_{[R]}$ ряд (9) определяет единственное решение задачи (1), (4). Действительно, если решение неединственное, то уравнение (7) имеет по крайней мере два решения: $u(x, t)$ и $u(x, t) + \omega(x, t)$, где $\omega(x, t) \not\equiv 0$, удовлетворяющих условиям (4), (5):

$$u(x, t)|_{t=0} = 0,$$
$$[u(x, t) + \omega(x, t)]_{t=0} = 0,$$
$$\left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial \omega(x, t)}{\partial t}\right]_{t=0} = 0, \tag{19}$$
$$\left.\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0.$$

Тогда, согласно (7), имеем два тождества:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \int_0^1 \Big\{ B_{1,0,0}(x,y)\,u(y,t) + \sum_{j=k_0}^{\infty} B_{0,0,j}(x,y)\,t^j + \\ + \sum_{l+k\geqslant 2}^{\infty} B_{l,k,0}(x,y)\,u^l(y,t)\left(\frac{\partial u(y,t)}{\partial t}\right)^k + \sum_{l+k\geqslant 1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} B_{l,k,j}(x,y)\,u^l(y,t)\times \\ \times\left(\frac{\partial u(y,t)}{\partial t}\right)^k t^j \Big\}\,dy, \tag{20}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial \omega(x,t)}{\partial t} = \int_0^1 \Big\{ B_{1,0,0}(x,y)\big(u(y,t)+\omega(y,t)\big) + \\ + \sum_{j=k_0}^{\infty} B_{0,0,j}(x,y)\,t^j + \sum_{l+k\geqslant 2}^{\infty} B_{l,k,0}(x,y)\big(u(y,t)+\omega(y,t)\big)^l \times \\ \times\left(\frac{\partial u(y,t)}{\partial t} + \frac{\partial \omega(y,t)}{\partial t}\right)^k + \sum_{l+k\geqslant 1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} B_{l,k,j}(x,y)\big(u(y,t)+\omega(y,t)\big)^l \times \\ \times\left(\frac{\partial u(y,t)}{\partial t} + \frac{\partial \omega(y,t)}{\partial t}\right)^k t^j \Big\}\,dy. \tag{21}$$

Вычитая из (21) (20), с учетом оценок (11) получим неравенство

$$\max\left|\frac{\partial \omega(x,t)}{\partial t}\right| \leqslant A\Big\{\max|\omega(x,t)| + \sum_{l+k\geqslant 2}^{\infty}\sum_{n_0=0}^{l}\binom{l}{n_0}\times \\ \times\max|\omega(x,t)|^{n_0}\max|u(x,t)|^{l-n_0}\sum_{n_1=0}^{k}\binom{k}{n_1}\max\left|\frac{\partial \omega(x,t)}{\partial t}\right|^{n_1}\times \\ \times\max\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|^{k-n_1} + \sum_{l+k\geqslant 1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n_0=0}^{l}\binom{l}{n_0}\max|\omega(x,t)|^{n_0}\times \\ \times\max|u(x,t)|^{l-n_0}\sum_{n_1=0}^{k}\binom{k}{n_1}\max\left|\frac{\partial \omega(x,t)}{\partial t}\right|^{n_1}\max\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|^{k-n_1}|t|^j\Big\}, \\ n_0+n_1\geqslant 1, \tag{22}$$

справедливое для $x\in[0,1]$, $|t|\leqslant\rho$. Но так как

$$\omega(x,t) = \frac{\partial \omega(x,\theta t)}{\partial t}\,t \quad (0\leqslant\theta\leqslant 1),$$

то

$$\max|\omega(x,t)| \leqslant \max\left|\frac{\partial \omega(x,t)}{\partial t}\right|\,|t| \leqslant \max\left|\frac{\partial \omega(x,t)}{\partial t}\right|\max|t|. \tag{23}$$

Если $\max\left|\frac{\partial \omega(x,t)}{\partial t}\right| \not\equiv 0$, то из (22) на основании (23) следует неравенство

$$\max\left|\frac{\partial\omega(x,t)}{\partial t}\right| \leqslant A \max\left|\frac{\partial\omega(x,t)}{\partial t}\right| \Bigg\{ \max|t| +$$

$$+ \sum_{l+k\geqslant 2}^{\infty}\sum_{n_0=0}^{l}\binom{l}{n_0}\left(\max\left|\frac{\partial\omega(x,t)}{\partial t}\right||t|\right)^{n_0}\max|u(x,t)|^{l-n_0}\times$$

$$\times\sum_{n_1=0}^{k}\binom{k}{n_1}\max\left|\frac{\partial\omega(x,t)}{\partial t}\right|^{n_1-1}\max\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|^{k-n_1}+ \tag{24}$$

$$+\sum_{l+k\geqslant 1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n_0=0}^{l}\binom{l}{n_0}\left(\max\left|\frac{\partial\omega(x,t)}{\partial t}\right||t|\right)^{n_0}\max|u(x,t)|^{l-n_0}\times$$

$$\times\sum_{n_1=0}^{k}\binom{k}{n_1}\max\left|\frac{\partial\omega(x,t)}{\partial t}\right|^{n_1-1}\max\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|^{k-n_1}|t|^j\Bigg\}\leqslant$$

$$\leqslant\max\left|\frac{\partial\omega(x,t)}{\partial t}\right| B(t),\ n_0+n_1\geqslant 1,$$

где через $B(t)$ обозначено выражение в фигурной скобке. Отсюда, после деления на

$$\max\left|\frac{\partial\omega(x,t)}{\partial t}\right| \tag{25}$$

имеем, что $1\leqslant B(t)$.

В силу условий (19) $B(t)\to 0$ при $t\to 0$, поэтому из (25) следует, что, начиная с достаточно малых $|t|$, неравенство (24) становится противоречивым. Значит, $\max\left|\frac{\partial\omega(x,t)}{\partial t}\right|\equiv 0$, т. е. $\omega(x,t)\equiv c(x)$, причем $c(x)\equiv 0$ на основании (19). Итак,

Теорема 1. *Если 1 не является характеристическим числом ядра $k(x,y)$, то задача (1), (4) имеет единственное решение в классе $C_{[R]}$, это решение представимо в виде ряда (9).*

Замечание 1. Если $k_{0,0,j}(x,y)\equiv 0$ $(j=1,2,3,\ldots)$, то в уравнении (7) $B_{0,0,j}(x,y)\equiv 0\,(j=1,2,3,\ldots)$ и задача (1), (4) в классе $C_{[R]}$ имеет только тривиальное решение.

§ 2. РАЗВЕТВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Пусть 1 является характеристическим числом ядра $k(x,y)$ ранга 1, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — собственные функции ядра $k(x,y)$ и союзного ядра $k(y,x)$. Уравнение (1) путем преобразования Шмидта $E(x,y)=\psi(x)\varphi(y)-k(x,y)$ приводится к виду

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\int_0^1 E(x,y)\frac{\partial u(y,t)}{\partial t}dy = t\xi(t)\psi(x)+\int_0^1\Big\{k_{1,0,0}(x,y)u(y,t)+$$

$$+\sum_{j=k_0}^{\infty}k_{0,0,j}(x,y)t^j+\sum_{l+k\geqslant 2}^{\infty}k_{l,k,0}(x,y)u^l(y,t)\left(\frac{\partial u(y,t)}{\partial t}\right)^k+ \tag{26}$$

$$+\sum_{l+k\geqslant 1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}k_{l,k,j}(x,y)\,u^{l}(y,t)\left(\frac{\partial u(y,t)}{\partial t}\right)^{k}t^{j}\Bigg\}\,dy, \tag{26}$$

где

$$t\,\xi(t)=\int_0^1\varphi(y)\frac{\partial u(y,t)}{\partial t}\,dy. \tag{27}$$

Если $(-1)\,\Gamma(x,y)$ — резольвента ядра $E(x,y)$, то из (26) после преобразований находим, что

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t}=t\,\xi(t)\,\varphi(x)+\int_0^1\Bigg\{B_{1,0,0}(x,y)\,u(y,t)+\sum_{j=k_0}^{\infty}B_{0,0,j}(x,y)\,t^{j}+\\+\sum_{l+k\geqslant 1}^{\infty}B_{l,k,0}(x,y)\,u^{l}(y,t)\left(\frac{\partial u(y,t)}{\partial t}\right)^{k}+\sum_{l+k\geqslant 1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}B_{l,k,j}(x,y)\times\\\times u^{l}(y,t)\left(\frac{\partial u(y,t)}{\partial t}\right)^{k}t^{j}\Bigg\}\,dy,\end{gathered} \tag{28}$$

где

$$B_{l,k,j}(x,y)=k_{l,k,j}(x,y)+\int_0^1\Gamma(x,y_1)\,k_{l,k,j}(y_1,y)\,dy_1\quad(l,k,j=0,1,2,\ldots).$$

Предположим, что функция $\xi(t)$ удовлетворяет начальным условиям

$$\xi^{(j)}(t)\,t^{1+j}|_{t=0}=0\quad(j=0,1,2,\ldots). \tag{29}$$

Это выполняется, например, в том случае, когда $\xi(t)$ является аналитической функцией с порядком роста, большим, чем -1, т. е.

$$\xi(t)=\sum_{i=1}^{\infty}a_i\,t^{-1+\frac{i}{s}}\ (s\text{ — натуральное число}). \tag{30}$$

Тогда, как и в § 1, можно показать, что уравнение (28) может иметь не более одного решения в классе $C_{[R]}$, удовлетворяющего условию (4). Будем искать это решение в виде ряда

$$u=\sum_{i=1}^{\infty}u_i\,t^{1+i}=\sum_{i=1}^{\infty}u_i(x,\xi,\xi',\ldots,\xi^{(i-1)})\,t^{1+i}. \tag{31}$$

Ряд (31) удовлетворяет начальному условию (4) и условию (5), если

$$u_i(x,\xi,\xi',\ldots,\xi^{(i-1)})\,t^{1+i}|_{t=0}=0\quad(i=1,2,3,\ldots), \tag{32}$$

$$\begin{gathered}\sum_{n=0}^{i-1}\frac{\partial u_i(x,\xi,\xi',\ldots,\xi^{(i-1)})}{\partial\xi^{(n)}}\,\xi^{(n+1)}\,t^{1+i}|_{t=0}+\\+u_i(x,\xi,\xi',\ldots,\xi^{(i-1)})(1+i)\,t^{i}|_{t=0}=0\quad(i=1,2,3,\ldots).\end{gathered} \tag{33}$$

Если выполняются условия (29), то выполняются и условия (32), (33). В самом деле, подставив (31) в (28), получим для определения коэффициентов u_i рекуррентные формулы:

$$u_1(x, \xi) = \frac{1}{2}\left\{\xi\varphi(x) + \left[\begin{array}{ll} \int_0^1 B_{0,0,1}(x, y)\,dy & \text{при } k_0 = 1 \\ 0 & \text{при } k_0 \neq 1 \end{array}\right]\right\} =$$

$$= \sum_{l+k=1} u_k^l(x)\,\xi^k,$$

где

$$u_1^0(x) = \frac{\varphi(x)}{2!};$$

$$u_0^1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_0^1 B_{0,0,1}(x, y)\,dy & \text{при } k_0 = 1 \\ 0 & \text{при } k_0 \neq 1. \end{cases} \tag{34}$$

А так как $k + l + 1 - 2 = 0$, то

$$u_1(x, \xi) = \sum_{l+k=1} u_k^l(x)(\xi t)^k t^{l+1} t^{-2}. \tag{35}$$

Коэффициент u_1 удовлетворяет условиям (32), (33), если $\xi(t)$ удовлетворяет (29) при $j = 0, 1$.

Далее,

$$u_2(x, \xi, \xi') = \frac{1}{3}\left\{-\frac{\partial u_1(x, \xi)}{\partial \xi}\xi' + \int_0^1 [B_{1,0,0}(x, y)\,u_1(y, \xi) + \right.$$

$$\left. + B_{0,0,2}(x, y) + B_{0,1,1}(x, y)\,2u_1(y, \xi) + B_{0,2,0}(x, y)\,4u_1^2(y, \xi)]\,dy\right\} =$$

$$= \sum_{l+k+2k_1=2} u_{k,k_1}^l(x)(\xi t)^k(\xi' t^2)^{k_1} t^{l+1} t^{-3}, \tag{36}$$

где

$$u_{0,0}^2(x) = \frac{1}{3}\int_0^1 B_{0,0,2}(x, y)\,dy; \tag{37}$$

$$u_{2,0}^0(x) = \frac{1}{3}\int_0^1 B_{0,2,0}(x, y)\,\varphi^2(y)\,dy; \tag{38}$$

$$u_{0,1}^0(x) = (-1)\frac{\varphi(x)}{3!}; \tag{39}$$

$$u_{1,0}^1(x) = \frac{1}{3!}\int_0^1 \big(B_{1,0,0}(x, y) + 2B_{0,1,1}(x, y)\big)\,\varphi(y)\,dy. \tag{40}$$

И вообще

$$u_n(x, \xi, \xi', \ldots, \xi^{(n-1)}) = \frac{1}{n+1}\left\{-\sum_{i=0}^{n-2}\frac{\partial u_{n-1}(x, \xi, \xi', \ldots, \xi^{(n-2)})}{\partial \xi^{(i)}}\xi^{(i+1)} + \right.$$

$$+\int_0^1 \left[B_{1,0,0}(x, y) + nB_{0,1,1}(x, y)\right] u_{n-1}(y, \xi, \xi', \ldots, \xi^{(n-2)})\, dy +$$

$$+ M_{n-2}\Big\} = \sum_{l+k+2k_1+\ldots+nk_{n-1}=n} u^l_{k,k_1,\ldots,k_{n-1}}(x)(\xi t)^k (\xi' t^2)^{k_1} \ldots \tag{41}$$

$$\ldots (\xi^{(n-1} t^n)^{k_{n-1}} t^{l+1} t^{-(n+1)} \quad (n = 2, 3, 4, \ldots),$$

где через M_{n-2} обозначена функция, зависящая от коэффициентов $u_1, \ldots, u_{n-2}$ и их производных по t. Коэффициенты $u^l_{k,k_1,\ldots,k_{n-1}}(x)$ вычисляются определенным образом. Например,

$$u^0_{0,\ldots,0,1_j}(x) = (-1)^{j+1} \frac{\varphi(x)}{(j+1)!} \quad (j = 1, 2, 3, \ldots), \tag{42}$$

$$u^1_{0,0,\ldots,1_j}(x) = \frac{(-1)^{j+1}}{(j+2)!} \int_0^1 \left(B_{1,0,0}(x, y) + (j+1) B_{0,1,1}(x, y)\right) \varphi(y)\, dy \tag{43}$$

$$(j = 1, 2, 3, \ldots)$$

и так далее.

Коэффициенты u_i $(i = 2, 3, 4, \ldots)$ удовлетворяют условиям (32), (33), если $\xi(t)$ удовлетворяет (29) при $j = 0, 1, \ldots, i-1$. Таким образом, мы можем формально построить ряд (31).

Далее полагаем, что

$$\max_{0 \leqslant x, y \leqslant 1} \{|\varphi(x)|, |B_{l,k,j}(x, y)|, l, k, j = 0, 1, 2, \ldots\} \leqslant A \tag{44}$$

и рассматриваем дифференциальное уравнение

$$\frac{du}{dt} = A\left[t\xi(t) + u + \sum_{j=k_0}^{\infty} t^j + \sum_{l+k \geqslant 2}^{\infty} u^l \left(\frac{du}{dt}\right)^k + \right.$$

$$\left. + \sum_{l+k \geqslant 1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} u^l \left(\frac{du}{dt}\right)^k t^j \right] \tag{45}$$

при $|t| \leqslant \rho$ с начальным условием $u(0) = 0$. Если $\xi(t)$ удовлетворяет условиям (29), то, как и в § 1, можно показать, что уравнение (45) имеет решение, мажорирующее ряд (31). Поэтому формальное решение (31) является настоящим.

Ряд (31) является решением уравнения (1), если выполняется условие (27). Подставив (31) в (27), получим после преобразований дифференциальное уравнение разветвления задачи (1), (4)

$$\sum_{i=0}^{\infty} L_i(\xi, \xi', \ldots, \xi^{(i)}) t^i = 0 \tag{46}$$

с начальным условием

$$\xi^{(i)} t^{1+i}|_{t=0} = 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3, \ldots), \tag{47}$$

где

$$L_0 = -\xi(t) + \int_0^1 \varphi(y)\, 2u_1(y, \xi)\, du = \tag{48}$$

$$= \begin{cases} \int\limits_0^1 \varphi(y) \int\limits_0^1 B_{0,0,1}(y,\ y_1)\ dy_1\, dy & \text{при} \quad k_0 = 1 \\ 0 & \text{при} \quad k_0 \neq 1 \end{cases};$$

$$L_i = \int\limits_0^1 \varphi(y) \left\{ \sum_{n=0}^{i-1} \frac{\partial u_i(y,\ \xi,\ \xi',\ \ldots,\ \xi^{(i-1)})}{\partial \xi^{(n)}}\ \xi^{(n+1)} + \right.$$

$$\left. + (i+2)\, u_{i+1}(y,\ \xi,\ \xi',\ \ldots,\ \xi^{(i)}) \right\} dy \quad (i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \tag{49}$$

Если из (46) найти $\xi(t)$ и подставить в (31), то получим искомые решения задачи (1), (4), зависящие от одного параметра t. Итак,

Теорема 2. *Если 1 является характеристическим числом ядра $k(x,\ y)$ ранга 1, то каждому решению уравнения (46), удовлетворяющему условию (47), соответствует в классе $C_{[R]}$ одно решение задачи (1), (4).*

Если развернуть коэффициенты L_i и привести подобные члены, для чего надо учесть разложения (41) и формулу (42), то уравнение разветвления (46) примет следующий вид:

$$\sum_{i=2}^{\infty} \sum_{\substack{l+k+2k_1+\ldots+ik_{i-1}=i \\ l+k+k_1+\ldots+k_{i-1}\geqslant 2}} L^l_{k,k_1,\ldots,k_{i-1}}\, t^l \{ k(\xi t)^{k-1}(\xi' t + \xi) \times$$

$$\times (\xi' t^2)^{k_1} \ldots (\xi^{(i-1)} t^i)^{k_{i-1}}\, t + (\xi t)^k k_1 (\xi' t^2)^{k_1-1} \times$$

$$\times (\xi'' t^2 + \xi' 2t)(\xi'' t^3)^{k_2} \ldots (\xi^{(i-1)} t^i)^{k_{i-1}}\, t +$$

$$+ (\xi t)^k (\xi' t^2)^{k_1} \ldots k_{i-1} (\xi^{(i-1)} t^i)^{k_{i-1}-1} \times \tag{49'}$$

$$\times (\xi^{(i)} t^i + \xi^{(i-1)} i t^{i-1})\, t + (\xi t)^k (\xi' t^2)^{k_1} \ldots$$

$$\ldots (\xi^{(i-1)} t^i)^{k_{i-1}} (l+1) \} + 2L^1_0\, t = 0.$$

Здесь

$$L^l_{k,k_1,\ldots,k_{i-1}} = \int\limits_0^1 \varphi(y)\, u^l_{k,k_1,\ldots,k_{i-1}}(y)\, dy \tag{50}$$

— определенные числа.

Рассмотрим пример:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \int\limits_0^1 3xy \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2} t \frac{\partial u}{\partial t} + u \right) dy + (4 - 6x)\, t, \tag{51}$$

$$u(x,\ 0) = 0. \tag{52}$$

Здесь $k_0 = 1$, 1 является характеристическим числом ядра $k(x,\ y)$ ранга 1, $\varphi(x) = x$, $\psi(y) = y$. Уравнение (28) для данного примера имеет вид

$$\frac{du}{\partial t} = t\, \xi(t)\, x - \int\limits_0^1 3xy \left(-\frac{1}{2} t \frac{\partial u}{\partial t} + u \right) dy + (4 - 6x)\, t. \tag{53}$$

Поэтому

$$B_{0,1,1}(x,\ y) = \frac{3}{2} xy, \quad B_{1,0,0}(x,\ y) = -3xy, \quad B_{0,0,1}(x,\ y) = 4 - 6x.$$

Ищем решение уравнения (53) в виде ряда (31):

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} u_i t^{i+1}.$$

Коэффициенты u_i определяются методом неопределенных коэффициентов:

$$u_1 = \frac{1}{2}(\xi x + 4 - 6x),$$

$$u_2 = -\frac{1}{6}\xi' x,$$

$$u_3 = \frac{1}{24}(\xi'' x + \xi' x).$$

И вообще

$$u_n = x \sum_{i=1}^{n-1} a_{n,i}\, \xi_{(t)}^{(i)} \quad (n=2,\ 3,\ 4,\ \ldots),$$

$a_{n,i}$ — определенные числа. Тогда на основании формул (48), (49) получим, что

$$L_0 = \int_0^1 y(4-6y)\,dy = 0,$$

$$L_1 = 0,$$

$$L_2 = \frac{1}{18}\xi',$$

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} b_{n,i}\,\xi^{(i)} \quad (n = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots),$$

$b_{n,i}$ — определенные числа.

Таким образом, для данного примера уравнение разветвления (46) имеет вид

$$\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} b_{n,i}\,\xi^{(i)}\,t^i = 0.$$

Поэтому ξ может быть произвольной постоянной c, и уравнение (51) имеет решение

$$u = (cx + 2 - 3x)\,t^2.$$

Замечание 2. Теоремы 1, 2 могут быть доказаны и методом последовательных приближений.

Литература

1. Ахмедов К. Т. Докторская диссертация, гл. III. М., 1960.
2. Кабулов Р. Автореферат канд. дисс. Ташкент, 1966.
3. Ахмедов К. Т. УМН, **12**, 4 (76), 135—153, 1957.
4. Вайнберг М. М., Треногин В. В. УМН, **17**, 2 (101), 13—75, 1962.

Поступила в редакцию 20 мая 1966 г.

Иркутский государственный университет им. А. А. Жданова