М. В. Зайцев, Тождества аффинных алгебр Каца–Муди,
Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 1996, номер 2, 33–36

https://www.mathnet.ru/vmumm1988

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Смолянов О. Г. Потоки де Рама и формула Стокса в гильбертовом пространстве//Докл. АН СССР. 1986. **286**, № 3. 554—558.
2. Ботт Р., Ту Л. В. Дифференциальные формы в алгебраической топологии. М, 1989.
3. Рам Ж. де. Дифференцируемые многообразия. М., 1956.
4. Schwartz L. Théorie des distributions. Paris, 1950, 1951.
5. Гийемин В., Стернберг С. Геометрические асимптотики. М., 1981.
6. Робертсон А. П., Робертсон В. Дж. Топологические векторные пространства. М., 1967.
7. Смолянов О. Г. Анализ на топологических линейных пространствах и его приложения. М., 1979.
8. Норин Н. В. Стохастические интегралы и дифференцируемые меры//Теория вероятностей и ее применения. 1987. **32**, вып. 1. 114—124.

Поступила в редакцию
19.09.94

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1996. № 2

УДК 512.8

М. В. Зайцев

ТОЖДЕСТВА АФФИННЫХ АЛГЕБР КАЦА—МУДИ

В статье рассматриваются алгебры Ли над полем Φ нулевой характеристики. Тождества бесконечномерных алгебр привлекают в последнее время все более пристальное внимание исследователей (см., например, [1—4]). Особый интерес представляет изучение тождеств специальных и обобщенно специальных алгебр Ли. Напомним, что алгебра Ли L называется специальной, или SPI-алгеброй, если она вложима как алгебра Ли в некоторую ассоциативную PI-алгебру. Многообразие алгебр Ли $\operatorname{var} L$, порожденное специальной алгеброй, называется специальным многообразием. Любая алгебра Ли из специального многообразия называется обобщенно специальной.

В ассоциативном случае известен результат А. Р. Кемера [5], согласно которому тождества любой конечно-порожденной ассоциативной PI-алгебры над Φ совпадают с тождествами некоторой конечномерной Φ-алгебры. Для алгебр Ли в целом аналогичная гипотеза неверна, поскольку тождества конечномерной алгебры могут выполняться только в обобщенно специальной алгебре. Для конечно-порожденной SPI-алгебры Ли L нетрудно доказать включение $\operatorname{var} L \subset \operatorname{var} M_n$, в котором M_n — алгебра $n\times n$-матриц над Φ. Возможность равенства $\operatorname{var} L = \operatorname{var} G$ для подходящей конечномерной алгебры G до сих пор остается открытым вопросом.

Аффинные алгебры Каца—Муди (см. [6]) представляют интерес как возможные контрпримеры для упомянутой гипотезы. Тождества бесконечномерных алгебр Каца—Муди еще недостаточно хорошо изучены. Имеется лишь несколько публикаций на данную тематику (см. [6, 4]). Напомним реализацию так называемых «нескрученных» аффинных алгебр Каца—Муди. Пусть G — конечномерная простая Φ-алгебра Ли, а $\Phi[t^{-1}, t]$ — кольцо лорановских многочленов над Φ. Через $\hat{G}$ обозначим бесконечномерную алгебру Ли, совпадающую как векторное пространство с

$$G\otimes\Phi[t^{-1},\ t]\oplus\Phi\langle\theta\rangle,$$

в которой $\Phi\langle\theta\rangle$ — одномерный центр, а умножение остальных элементов задается формулой

$$(a\otimes f)(b\otimes g)=ab\otimes fg+(a,\ b)\operatorname{Res}\left(g\,\frac{df}{dt}\right)\theta, \tag{1}$$

где $a, b\in G$, $f, g\in\Phi[t^{-1}, t]$, а (a, b) — значение формы Киллинга на элементах a, b. Алгебра $\hat{G}$ не является специальной [7], однако она лежит в коммутаторе многообразий $[\mathfrak{W}, \mathfrak{E}]$, где $\mathfrak{W}=\operatorname{var} G$, а $\mathfrak{E}$ — тривиальное многообразие, состоящее только из нулевой алгебры Ли (все необходимые сведения о тождествах в алгебрах Ли можно найти в [8]). Поскольку $\mathfrak{W}$ специально, а $\operatorname{var}\hat{G}\subset[\mathfrak{W}, \mathfrak{E}]$, то и $\operatorname{var}\hat{G}$ — специальное многообразие (см. [8, гл. 6]). Относительно свободные алгебры из $\operatorname{var}\hat{G}$ являются SPI-алгебрами. Мы докажем, что тождества $\hat{G}$ совпадают с тождествами некоторой конечномерной алгебры Ли и что у неизоморфных «нескрученных» аффинных алгебр Каца—Муди разные системы тождеств.

Построим по простой алгебре G конечномерную алгебру $\tilde{G}$ следующим образом. Пусть V' и V'' — два G-модуля, изоморфные присоединенному G-модулю. Зафиксируем изоморфизмы между G-модулями: φ_1: $G\to V'$, $\varphi_2\to V''$. Если $x\in G$, то $\varphi_1(x)$ мы будем обозначать через x', а $\varphi_2(x)$ — через x''. Алгебра $\tilde{G}$ является прямой суммой векторных пространств G, V', V'' и одномерного центра, натянутого на элемент δ:

$$\tilde{G}=G\oplus V'\oplus V''\oplus\Phi\langle\delta\rangle. \tag{2}$$

Элементы алгебры G перемножаются обычным образом, а умножение остальных элементов задается формулами

$$xy'=(xy)',\ xy''=(xy)'',\ x'y'=x''y''=0,\ x'y''=(x,\ y)\,\delta, \tag{3}$$

в которых $x, y\in G$, а (x, y) — значение формы Киллинга на x и y. Непосредственная проверка показывает, что векторное пространство (2) с умножением (3) — алгебра Ли. Например, если в тождество Якоби подставить по одному элементу из G, V' и V'', то получим

$$(xy')\,z''+(y'z'')\,x+(z''x)\,y'=(xy)'\,z''-y'\,(zx)''=((xy,\ z)-(y,\ zx))\,\delta=0. \tag{4}$$

Коэффициент при δ в (4) равен нулю в силу инвариантности формы Киллинга.

Теорема 1. *Пусть G — конечномерная простая алгебра Ли над полем Φ нулевой характеристики и $\mathfrak{W}$ — многообразие, порожденное G. Тогда*

$$\operatorname{var}\hat{G}=\operatorname{var}\tilde{G}=[\mathfrak{W},\ \mathfrak{E}].$$

Доказательство. Докажем сначала равенство $\operatorname{var}\tilde{G}=[\mathfrak{W}, \mathfrak{E}]$. Пусть $f=f(x_0, x_1, \dots, x_n)=0$ — полилинейное тождество алгебры $\tilde{G}$. Запишем полином f в виде суммы правонормированных произведений:

$$f=x_1f_1+\dots+x_nf_n, \tag{5}$$

в которой f_i — полилинейный элемент, зависящий от всех $x_0, \dots, x_n$, кроме x_i. Пусть $a_0, \dots, a_n$ — произвольные элементы из G. Значение f на элементах $a_0'', a_1, \dots, a_{i-1}, a_i', a_{i+1}, \dots, a_n$ из $\tilde{G}$ равно $(a_i, f_i(a_0, \dots, a_n))\,\delta$. Так как f — тождество алгебры $\tilde{G}$, то элемент a_i ортогонален всем значениям полинома f_i в G. В простой алгебре Ли линейная оболочка значений любого полинома является идеалом, т. е. равна либо G, либо нулю. Следовательно, в силу невырожденности формы Киллинга f_i принимает в G только нулевые значения. Таким образом, элемент вида (5) задает тождество алгебры $\tilde{G}$ тогда и только тогда, когда $f_1, \ldots$ $\ldots, f_n$ — тождества алгебры G. Это и означает, что $\operatorname{var} \tilde{G} = [\mathfrak{W}, \mathfrak{C}]$.

Аналогично доказывается и равенство $\operatorname{var} \hat{G} = [\mathfrak{W}, \mathfrak{C}]$. Если элемент вида (5) равен нулю в $\hat{G}$ тождественно, то рассмотрим его значение на наборе $a_0 \otimes t^2, a_1 \otimes 1, \ldots, a_{i-1} \otimes 1,\ a_1 \otimes t^{-2}, a_{i+1} \otimes 1, \ldots, a_n \otimes 1$. Как следует из (1), это значение равно

$$f(a_0, \ldots, a_n) \otimes t - 2(a_i,\ f_i(a_0, \ldots, a_n))\,\theta.$$

Поскольку коэффициент при θ должен быть нулевым, элемент a_i в G ортогонален всем значениям полинома f_i относительно формы Киллинга. Как и прежде, это означает, что $f_1, \ldots, f_n$ — тождества алгебры G, т. е. имеет место включение $\operatorname{var} \hat{G} \supset [\mathfrak{W}, \mathfrak{C}]$. Так как обратное включение очевидно, то этим завершается доказательство теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть $\hat{G}$ и $\hat{H}$ — «нескрученные» аффинные алгебры Каца—Муди над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики. Тогда многообразия $\operatorname{var} \hat{G}$ и $\operatorname{var} \hat{H}$ совпадают только при изоморфных $\hat{G}$ и $\hat{H}$.*

Доказательство. Если $\hat{G}$ и $\hat{H}$ изоморфны, то они порождают одно и то же многообразие алгебр Ли. Предположим теперь, что выполняется равенство $\operatorname{var} \hat{G} = \operatorname{var} \hat{H}$. Пусть G и H — конечномерные простые алгебры Ли над полем Φ, которые определяют алгебры $\hat{G}$ и и $\hat{H}$ соответственно. Обозначим через $\mathfrak{W}$ и $\mathfrak{U}$ многообразия, а через V и U — вербальные идеалы тождеств в свободной алгебре Ли L счетного ранга алгебр G и H соответственно. Тогда по теореме 1 имеем $\operatorname{var} \hat{G} = [\mathfrak{W}, \mathfrak{C}]$, $\operatorname{var} \hat{H} = [\mathfrak{U}, \mathfrak{C}]$. Так как $\operatorname{var} \hat{G} = \operatorname{var} \hat{H}$, то для вербальных идеалов выполняется равенство $[V, L] = [U, L]$. Из последнего равенства, вообще говоря, не следует, что идеалы U и V совпадают (см. [9]). Однако в данном случае мы имеем включения $G \in \operatorname{var} \hat{H}$, $H \in$ $\in \operatorname{var} \hat{G}$, откуда $[U(G), G] = 0$, $[V(H), H] = 0$. В силу простоты алгебр G и H получаем $U(G) = 0$, $V(H) = 0$, т. е. $G \in \mathfrak{U}$, $H \in \mathfrak{W}$. Другими словами, многообразия $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{W}$ совпадают. Однако равенство $\operatorname{var} G = \operatorname{var} H$ возможно только при изоморфных G и H [10], следовательно, $\hat{G}$ и $\hat{H}$ изоморфны, и теорема 2 доказана.

Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 93-011-1543 и Международным научным фондом, грант M22000.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bahturin Yu. A., Mikhalev A. A., Petrogradsky V. M., Zaicev M. V. Infinite-dimensional Lie superalgebras. Berlin, 1992.
2. Зайцев М. В. Специальные алгебры Ли//Успехи матем. наук. 1993. **48**, вып. 6. 103—140.
3. Мищенко С. П. Рост многообразий алгебр Ли//Успехи матем. наук. 1990. **45**, вып. 6. 25—45.
4. Бахтурин Ю. А., Ольшанский А. Ю. Тождества//Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. ВИНИТИ. Т. 18. М., 1988. 117—120.
5. Кемер А. Р. Представимость приведенно свободных алгебр//Алгебра и логика. 1988. **27**, № 2. 274—294.
6. Кац В. Бесконечномерные алгебры Ли. М., 1993.
7. Биллинг Ю. В. О гомоморфном образе специальной алгебры Ли//Матем. сб. 1988. **136**, № 7. 320—323.
8. Бахтурин Ю. А. Тождества в алгебрах Ли. М., 1985.
9. Зайцев М. В. О разложимости в произведение коммутаторов многообразий алгебр Ли и групп//Матем. сб. 1981. **116**, № 3. 315—330.

10. Кушкулей А. Х., Размыслов Ю. П. Многообразия, порожденные неприво димыми представлениями алгебр//Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1983. № 5. 4—7.

Поступила в редакцию
09.11.94

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1996. № 2

УДК 512.554,33,34,37,38

А. А. Золотых, А. А. Михалев

РАНГИ ПОДАЛГЕБР СВОБОДНЫХ СУПЕРАЛГЕБР ЛИ

Данная статья продолжает исследования, начатые в [1]. Основным результатом работы является критерий независимости подмножества свободной цветной (p-)супералгебры Ли, что дает удобный алгоритм для определения независимости подмножества (теорема 2). В качестве следствия получены критерий и алгоритм, определяющие, является ли эндоморфизм свободной цветной (p-)супералгебры Ли мономорфизмом.

1. Свободные цветные (р-) супералгебры Ли. Пусть K — поле, $\operatorname{char} K \neq 2$, G — абелева полугруппа, $\varepsilon: G \times G \to K^*$ — кососимметрическая билинейная форма, $G_+ = \{g \in G \mid \varepsilon(g, g) = 1\}$, $G_- = \{g \in G \mid \varepsilon(g, g) = -1\}$, $R = \bigoplus_{g \in G} R_g$ — G-градуированная K-алгебра. Алгебра R с умножением $[\ ,\ ]$ является цветной супералгеброй Ли, если

$$[a, b] = -\varepsilon(d(a), d(b))[b, a],$$

$$[a, [b, c]] = [[a, b], c] + \varepsilon(d(a), d(b))[b, [a, c]],$$

где a, b, c — G-однородные элементы из R, $d(u) = g$ при $u \in R_g$ (в случае $\operatorname{char} K = 3$ предполагаем дополнительно, что $[v, [v, v]] = 0$ для всех G-однородных элементов v, $d(v) \in G_-$).

Пусть $\operatorname{char} K = p > 2$, R — цветная супералгебра Ли над K, тогда R — цветная p-супералгебра Ли, если на однородных компонентах R_g, $g \in G_+$, задано отображение $[p]$: $R_g \to R_{pg}$, такое, что для всех $z \in R$, $\alpha \in K$, G-однородных $x, y \in R$, $d(x) = d(y)$, выполнены следующие условия:

$$(\alpha x)^{[p]} = \alpha^p x^{[p]}, \quad (\operatorname{ad}(x^{[p]}))(z) = (\operatorname{ad} x)^p (z),$$

$$(x + y)^{[p]} = x^{[p]} + y^{[p]} + \Sigma s_i(x, y),$$

где $j s_j(x, y)$ — коэффициенты при t^{j-1} в многочлене $(\operatorname{ad}(tx + y)^{p-1})(x)$, при этом $(\operatorname{ad} a)(b) = [a, b]$.

Пусть X — G-градуированное множество, $A(X)$ — свободная G-градуированная ассоциативная K-алгебра с единицей. Рассмотрим новую операцию на $A(X)$: $[a, b] = ab - \varepsilon(d(a), d(b))ba$ для G-однородных элементов $a, b \in A(X)$. Тогда $A(X)$ — цветная супералгебра Ли. Пусть $L(X)$ — подалгебра в $A(X)$ с операцией $[\ ,\ ]$, порожденная множеством X. Алгебра $L(X)$ является свободной цветной K-супералгеброй Ли на X (см. [2]). Если $\operatorname{char} K = p > 2$, $a^{[p]} = a^p$ для всех G-однородных элементов $a \in A(X)$, $d(a) \in G_+$, то $A(X)$ с операциями $[\ ,\ ]$ и $[p]$ является цветной p-супералгеброй Ли, а ее подалгебра $L^p(X)$, порожденная мно-