Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 254, 1998 г.

В. Н. Дубинин, Е. Г. Прилепкина

ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНОМ РАЗБИЕНИИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ОБЛАСТЕЙ

Задачи об экстремальном разбиении плоских областей восходят к известной теореме М. А. Лаврентьева о произведении конформных радиусов двух неналегающих областей и имеют богатую историю. Значительных успехов в решении таких задач достигли участники семинара по геометрической теории функций в ПОМИ (см., например, [1, §4.5 и §§5.9–5.11]). Цель настоящей работы – распространить классические результаты такого рода на случай областей произвольного n-мерного евклидова пространства. Мы получаем аналоги теорем М. А. Лаврентьева, З. Нехари, Ю. Е. Аленицына и других авторов, при этом понятие конформного радиуса области заменяется на понятие гармонического радиуса [2, 3]. Основным инструментом при доказательстве теорем является техника обобщенных приведенных модулей [4], которая распространяется здесь на случай пространственных областей. Мы применяем также метод экстремальной метрики и диссимметризацию [5].

§1. Предварительные сведения

Всюду ниже $\mathbf{R}^n$ означает n-мерное евклидово пространство точек $x = (x^1, ..., x^n)$, $n \geq 3$, $|x| = \sqrt{(x^1)^2 + ... + (x^n)^2}$ – длина вектора $x \in \mathbf{R}^n$. Введем обозначения:

$B(a, r) = \{x \in \mathbf{R}^n : |a - x| < r\}$,

$E(a, r) = \{x \in \mathbf{R}^n : |a - x| \leq r\}$,

$S(a, r) = \{x \in \mathbf{R}^n : |a - x| = r\}$, $\qquad a \in \mathbf{R}^n$;

$\omega_{n-1} = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ – площадь единичной сферы $S(0, 1)$;

$\lambda_n = ((n-2)\omega_{n-1})^{-1}$.

Область B пространства $\mathbf{R}^n$ назовем допустимой, если она имеет функцию Грина для оператора Лапласа, обращающуюся

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 96-01-00007) и ISSEP (грант a97-2120).

в нуль на границе ∂B этой области. Мы рассматриваем $\mathbf{R}^n$ как подмножество пространства $\bar{\mathbf{R}}^n = \mathbf{R}^n \cup \{\infty\}$. Таким образом, точка ∞ может принадлежать границе области B. Указанную функцию Грина с полюсом в точке $x_0 \in B$ обозначим через $g_B(x, x_0)$. В окрестности точки x_0 имеет место разложение

$$g_B(x, x_0) = \lambda_n(|x - x_0|^{2-n} - (r(B, x_0))^{2-n} + o(1)), \qquad x \to x_0.$$

Величину $r(B, x_0)$ называют гармоническим радиусом области B в точке x_0. Подробнее о гармоническом радиусе можно прочесть в работах [2, 3, 6]. Остановимся лишь на некоторых необходимых нам свойствах. Так, гармонический радиус положителен, неубывает при расширении области и обладает свойством непрерывности. Последнее означает, что для любой исчерпывающей последовательности допустимых областей B_k, $k = 1, 2, ...$; $\bar{B}_k \subset B_{k+1}$, $\cup_{k=1}^{\infty} B_k = B$, справедливо равенство $\lim_{k\to\infty} r(B_k, x_0) = r(B, x_0)$. В связи с этим гармонический радиус произвольной области $B \subset \mathbf{R}^n$ в точке $x_0 \in B$ определяют как верхнюю грань множества всех гармонических радиусов в точке x_0 допустимых ограниченных областей, лежащих в B. Заметим, что если функция $y = f(x)$ конформно отображает область B пространства $\mathbf{R}^n$ на область $\tilde{B} \subset \mathbf{R}^n$ и $y_0 = f(x_0)$, $x_0 \in B$, то

$$g_{\tilde{B}}(y, y_0) = |f'(x)|^{\frac{2-n}{2}} |f'(x_0)|^{\frac{2-n}{2}} g_B(x, x_0),$$

$$r(\tilde{B}, y_0) = |f'(x_0)| r(B, x_0),$$

где $|f'(x)| := |det Df(x)|^{1/n}$ [6, с. 196]. Пользуясь принципом симметрии для гармонических функций, нетрудно установить, что функция Грина шара $B(0, \rho)$ с полюсом в точке $x_0 \in B(0, \rho)$ имеет вид

$$\lambda_n \left(|x - x_0|^{2-n} - ||x_0| x/\rho - \rho x_0/|x_0||^{2-n} \right). \tag{1}$$

Отсюда $r(B(0, \rho), x_0) = \rho - |x_0|^2/\rho$. Аналогично, функция Грина двугранного угла $D_{2k}^* := \{x = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, x^3, ..., x^n) : |\theta| < \pi/2k\}$ с полюсом в точке $x_0 = (t, 0, x^3, ..., x^n)$ равна

$$g_{D_{2k}^*}(x, x_0) = \lambda_n \sum_{l=1}^{2k} (-1)^l |x - x_l|^{2-n},$$

где $x_l = (t\cos\pi l/k, t\sin\pi l/k, 0, ..., 0), l = 1, ..., 2k$ $(x_{2k} = x_0), k = 1, 2, ...$ Поэтому для гармонического радиуса справедлива формула

$$r(D_{2k}^*, x_0) = \left(\sum_{l=1}^{2k-1} (-1)^{l+1} |x_0 - x_l|^{2-n}\right)^{1/(2-n)}. \qquad (2)$$

Приведем теперь нетривиальные свойства гармонического радиуса, устанавливающие его связь с емкостью и экстремальной длиной. Пусть B – допустимая область пространства $\mathbf{R}^n$ и x_0 – точка этой области. При достаточно малом $r > 0$ рассмотрим конденсатор $C(r; B) = (\bar{\mathbf{R}}^n \setminus B, E(x_0, r))$. Модулем конденсатора $C(r; B)$ назовем величину $|C(r; B)|$, обратную его 2-емкости [7]. Б. Е. Левицкий [3] установил асимптотическую формулу

$$|C(r; B)| = \lambda_n r^{2-n} - \lambda_n (r(B, x_0))^{2-n} + o(1), \qquad r \to 0 \qquad (3)$$

Величина $-\lambda_n(r(B, x_0))^{2-n}$ называется приведенным модулем области B относительно точки x_0. Понятие приведенного модуля в пространстве введено Б. Е. Левицким и И. П. Митюком (см. [3, 8]). Заметим, что наши обозначения несколько отличны от [3]. Известно, что 2-емкость конденсатора совпадает с 2-модулем семейства кривых, соединяющих его пластины [9, 10]. Приведем точное определение. Пусть $\Gamma(r; B)$ – семейство кривых, соединяющих границу ∂B со сферой $S(x_0, r)$ в области $B \setminus E(x_0, r)$. 2-модулем семейства $\Gamma(r; B)$ называется величина

$$M_2(\Gamma(r; B)) = \inf \int_{\mathbf{R}^n} \rho^2 dx,$$

где нижняя грань берется по всем борелевским функциям $\rho : \mathbf{R}^n \to [0, \infty]$ таким, что для любой локально спрямляемой кривой $\gamma \in \Gamma(r; B)$ выполняется $\int_\gamma \rho ds \geq 1$. Из работы [10] вытекает, что левую часть в формуле (3) можно заменить на $M_2^{-1}(\Gamma(r; B))$.

§2. Приведенный модуль относительно совокупности точек

Следуя работе [4], определим здесь приведенный модуль относительно совокупности точек, но уже для пространственных открытых множеств. Пусть B – открытое множество пространства $\mathbf{R}^n$, x_l, $l = 1, ..., m$, – различные точки этого множества. Пусть

δ_l, $l = 1, ..., m$, – произвольные вещественные числа, отличные от нуля, и пусть μ_l, $l = 1, .., m$, – произвольные положительные числа. Введем следующие обозначения: $X = \{x_l\}, \triangle = \{\delta_l\}$, $\Psi = \{\mu_l\}$. Здесь и ниже, если не оговорено противное, символы $\{\ \}$ и $\sum$ означают соответственно совокупность и суммирование по всевозможным индексам, указанным в контексте, за исключением тех, при которых слагаемое в $\sum$ либо равно ∞, либо неопределено. При достаточно малом $r > 0$ введем обобщенный конденсатор как упорядоченную совокупность

$$C(r; B, X, \triangle, \Psi) = \{\bar{\mathbf{R}}^n \setminus B, E(x_1, \mu_1 r), ..., E(x_m, \mu_m(r)\}$$

с предписанными значениями соответственно $0, \delta_1, ..., \delta_m$. По аналогии с обычными конденсаторами, емкостью конденсатора $C(r; B, X, \triangle, \Psi)$ назовем величину

$$\operatorname{cap}\ C(r; B, X, \triangle, \Psi) = \inf \int\limits_{\mathbf{R}^n} |\nabla v|^2 dx,$$

где нижняя грань берется по всем функциям $v : \bar{\mathbf{R}}^n \to \mathbf{R}$ класса $C^\infty(\mathbf{R}^n)$, равным нулю в окрестности множества $\bar{\mathbf{R}}^n \setminus B$ и δ_l в окрестности $E(x_l, \mu_l r)$, $l = 1, ..., m$. Модуль конденсатора $|C(r; B, X, \triangle, \Psi)|$ есть величина, обратная емкости $\operatorname{cap}\ C(r; B, X, \triangle, \Psi)$. Приведенным модулем множества B относительно совокупностей $X, \triangle$ и Ψ назовем предел

$$M(B, X, \triangle, \Psi) = \lim_{r\to 0}(|C(r; B, X, \triangle, \Psi)| - \nu\lambda_n r^{2-n}), \qquad (4)$$

где $\nu = (\sum \delta_l^2 \mu_l^{n-2})^{-1}$. Ниже будет показано, что указанный предел всегда существует и конечен, а пока заметим, что непосредственно из определения приведенного модуля вытекает свойство монотонности:

$$M(B, X, \triangle, \Psi) \le M(B', X, \triangle, \Psi)$$

для любых $X = \{x_l\}$, $x_l \in B \subset B'$, $l = 1, ..., m$ и любых $\triangle, \Psi$.

Лемма 1. *Пусть $\tilde{E}(x_l, r)$, $l = 1, ..., m$, – произвольные замкнутые множества в $\mathbf{R}^n$, удовлетворяющие условию*

$$E(x_l, \mu_l r_1) \subset \tilde{E}(x_l, r) \subset E(x_l, \mu_l r_2),\ l = 1, ..., m,$$

при некоторых непрерывных положительных функциях $r_j = r_j(r)$ таких, что $r_j^{2-n} - r^{2-n} = o(1)$, $r \to 0$, $j = 1, 2$. Пусть $\tilde{C}(r; B, X, \triangle, \Psi)$

– конденсатор, определенный как и выше, но с заменой $E(x_l, \mu_l r)$ на $\tilde{E}(x_l, r)$. Предположим, что существует конечный предел

$$\lim_{r\to 0}(|\tilde{C}(r; B, X, \triangle, \Psi)| - \nu\lambda_n r^{2-n}). \tag{5}$$

Тогда существует равный ему предел (4). Наоборот, если существует предел (4), то существует равный ему предел (5) для любых таких $\tilde{E}(x_l, r)$, $l = 1, ..., m$.

Доказательство этого утверждения почти дословно повторяет доказательство леммы 1 работы [4].

Теорема 1. *Пусть B – открытое множество пространства $\mathbf{R}^n$ и пусть x_l, $l = 1, ..., m$, – различные точки этого множества. Предположим, что каждая связная компонента множества B, содержащая хотя бы одну точку x_l, допустима. Пусть $g_l(x)$ – функция Грина такой компоненты с полюсом в точке x_l, доопределенная нулем во внешности компоненты, и пусть R_l – гармонический радиус связной компоненты множества B в точке x_l. Тогда справедлива формула*

$$M(B, X, \triangle, \Psi) = -\lambda_n \sum \nu_l^2 R_l^{2-n} + \sum \nu_l \nu_p g_l(x_p),$$

где $\nu_l = \nu\delta_l\mu_l^{n-2}$, $l = 1, ..., m$.

Доказательство. Введем вспомогательную функцию

$$g(x) = \sum_{p=1}^{m} \delta_p \sum_{k=1}^{m} \beta_{kp} g_k(x),$$

где

$$\beta_{kp} = \begin{cases} -\lambda_n^{-2}(\mu_k\mu_p)^{n-2} r^{2(n-2)} g_k(x_p), & k \neq p; \\ \lambda_n^{-1}(\mu_p r)^{n-2}(1 + (\mu_p r)^{n-2} R_p^{2-n}), & k = p. \end{cases}.$$

Функция $g(x)$ равна нулю в $\bar{\mathbf{R}}^n \setminus B$ и гармоническая в $B \setminus \{x_l\}$. Положим $\tilde{E}(x_l, r) = \{x \in E(x_l, 2\mu_l r) : g(x)/\delta_l \geq 1\}$, $l = 1, ..., m$. Для точек $x \in E(x_l, 2\mu_l r)$ при $r \to 0$ имеем

$$g(x) = \delta_l(\beta_{ll} g_l(x) + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq l}}^{m} \beta_{kl} g_k(x)) +$$

$$+\sum_{\substack{p=1\\p\neq l}}^{m}\delta_p[\beta_{lp}g_l(x)+\beta_{pp}g_p(x)+\sum_{\substack{k=1\\k\neq l,p}}^{m}\beta_{kp}g_k(x)]=$$

$$=\delta_l[(1+(\mu_l r)^{n-2}R_l^{2-n})\Big((|x-x_l|/(\mu_l r))^{2-n}-$$

$$-(\mu_l r)^{n-2}R_l^{2-n})\Big)+o(r^{n-2})]+$$

$$+\sum_{\substack{p=1\\p\neq l}}^{m}\delta_p[\lambda_n^{-1}(\mu_p r)^{n-2}(g_p(x_l)+o(1))-$$

$$-\lambda_n^{-1}(\mu_p r)^{n-2}g_p(x_l)\,(|x-x_l|/(\mu_l r))^{2-n}+o(r^{n-2})]. \qquad (6)$$

Отсюда, в частности, следует, что при достаточно малом r на сфере $|x-x_l|=2\mu_l r$ выполняется $g(x)=2^{2-n}\delta_l+o(1)$, а на сфере $|x-x_l|=\frac{1}{2}\mu_l r$ имеем $g(x)=2^{n-2}\delta_l+o(1)$, $r\to 0$. Поэтому ввиду гармоничности $g(x)$ граница множества $\tilde{E}(x_l,r)$ состоит из точек x, лежащих в кольце $\frac{1}{2}\mu_l r\le|x-x_l|\le 2\mu_l r$ и удовлетворяющих уравнению $g(x)=\delta_l$. Приравнивая к δ_l правую часть равенства (6), для таких точек получим

$$(|x-x_l|/(\mu_l r))^{2-n}=1+o(1), \qquad r\to 0.$$

Используя последнее соотношение и равенство (6), нетрудно показать, что на границе $\partial\tilde{E}(x_l,r)$ выполняется более сильное соотношение

$$(|x-x_l|/(\mu_l r))^{2-n}=1+o(r^{n-2}), \qquad r\to 0.$$

Следовательно, множества $\tilde{E}(x_l,r)$, $l=1,..,m$, удовлетворяют условиям леммы 1 и ввиду этой леммы достаточно найти предел (5).

По принципу Дирихле,

$$\mathrm{cap}\ \tilde{C}(r;B,X,\triangle,\Psi)=\int\limits_{B\setminus\bigcup_{l=1}^m\tilde{E}(x_l,r)}|\nabla g|^2dx.$$

Пусть $\rho>0$ настолько мало, что множества $E(x_l,\rho)$ принадлежат $\tilde{E}(x_l,r)$ соответственно, $l=1,...,m$. Применяя формулу Грина и теорему Гаусса, последовательно имеем

$$\int\limits_{B\setminus\bigcup_{l=1}^m\tilde{E}(x_l,r)}|\nabla g|^2dx=-\sum\delta_l\int\limits_{S(x_l,\rho)}\frac{\partial g}{\partial n}d\sigma=$$

$$= -\sum \delta_l \delta_p \beta_{lp} \int\limits_{S(x_l,\rho)} \frac{\partial g_l}{\partial n} d\sigma = \sum \delta_l \delta_p \beta_{lp}.$$

Здесь дифференцирование проводится по внутренней нормали к полю конденсатора $\tilde{C}(r; B, X, \triangle, \Psi)$. Подставив сюда значения β_{lp}, получаем

$$\text{cap } \tilde{C}(r; B, X, \triangle, \Psi) = \lambda_n{}^{-1} \sum \delta_l^2 (\mu_l r)^{n-2} (1 + (\mu_l r)^{n-2} R_l^{2-n}) -$$

$$-\lambda_n^{-2} \sum \delta_l \delta_p (\mu_l \mu_p)^{n-2} r^{2(n-2)} g_l(x_p).$$

Отсюда

$$|\tilde{C}(r; B, X, \triangle, \Psi)| = \lambda_n \nu r^{2-n} - \lambda_n \nu^2 \sum \delta_l^2 \mu_l^{2(n-2)} R_l^{2-n} +$$

$$+ \sum \nu^2 \delta_l \delta_p \mu_l^{n-2} \mu_p^{n-2} g_l(x_p) + o(1), \quad r \to 0,$$

где $\nu = (\sum \delta_l^2 \mu_l^{n-2})^{-1}$. Осталось применить лемму 1. Теорема доказана.

§3. Теоремы об экстремальном разбиении

Рассмотрим сначала аналог неравенства Аленицына–Нехари в случае пространственных областей [11, с. 551].

Теорема 2. *Для любых попарно непересекающихся областей D_l, $l = 1, ..., m$, пространства $\mathbf{R}^n$, $n \geq 3$, точек $x_l \in D_l$, $l = 1, ..., m$, $m \geq 2$, и вещественных чисел δ_l, $l = 1, 2, ..., m$, справедливо неравенство*

$$-\sum \delta_l^2 (r(D_l, x_l))^{2-n} \leq \sum \delta_l \delta_p |x_l - x_p|^{2-n}. \qquad (7)$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть ограниченные допустимые области D_l, $l = 1, ..., m$. Можно считать также, что все $\delta_l \neq 0$, $l = 1, ..., m$. Пусть $\rho > 0$ настолько велико, что шар $B(0, \rho)$ содержит все области D_l, $l = 1, ..., m$. Применяя теорему 1 к множеству $B = \cup_{l=1}^m D_l$ и совокупностям $X = \{x_l\}$, $\triangle = \{\delta_l\}$, $\Psi = \{1, ..., 1\}$, получаем

$$M(B, X, \triangle, \Psi) = -\lambda_n \nu^2 \sum \delta_l^2 r(D_l, x_l)^{2-n}.$$

В силу монотонности модуля,

$$M(B, X, \triangle, \Psi) \leq M(B(0, \rho), X, \triangle, \Psi).$$

Последний модуль вычисляем по теореме 1 с учетом равенства (1):

$$M(B(0,\rho),X,\triangle,\Psi)=-\lambda_n\nu^2\sum\delta_l^2(\rho-|x_l|^2/\rho)^{2-n}+$$

$$+\lambda_n\nu^2\sum\delta_l\delta_p\left(|x_l-x_p|^{2-n}-\left|\frac{|x_p|}{\rho}x_l-\frac{\rho}{|x_p|}x_p\right|^{2-n}\right).$$

Осталось перейти к пределу при $\rho\to\infty$. Теорема доказана.

Заметим, что в отличие от плоского случая не требуется дополнительного ограничения на числа δ_l, $l=1,...,m$. Таким образом, неравенство (7) означает неотрицательность некоторой квадратичной формы. В частности, при $m=2$ имеем

$$\delta_1^2r(D_1,x_1)^{2-n}+\delta_2^2r(D_2,x_2)^{2-n}+2\delta_1\delta_2|x_1-x_2|^{2-n}\geq 0$$

для любых вещественных δ_1, δ_2 и любых неналегающих областей D_1, D_2 пространства $\mathbf{R}^n$. Отсюда

$$r(D_1,x_1)\cdot r(D_2,x_2)\leq|x_1-x_2|^2.$$

Знак равенства достигается для полупространств D_1 и D_2 с общей границей и для точек x_1, x_2, симметричных относительно этой границы. Итак, неравенство Лаврентьева для плоских областей остается верным в $\mathbf{R}^n$, если конформный радиус заменить на гармонический (ср. [3, 8]). Предельный переход в конце доказательства теоремы 2 приводит к предположению, что правая часть неравенства (7) равна, по-видимому, приведенному модулю пространства $\mathbf{R}^n$ относительно совокупностей $X,\triangle$ и Ψ (ср. [12]). Следующий результат является аналогом теоремы П. П. Куфарева [13] для конформных радиусов неналегающих плоских областей в круге. Отметим, что известные способы доказательства этой теоремы с помощью либо параметрического метода, либо конформного отображения и применения неравенства Лаврентьева в пространстве $\mathbf{R}^n$, $n\geq 3$, не применимы.

Теорема 3. *Если области D_1 и D_2 не пересекаются и лежат в шаре $B(0,R)$, то для любых точек $x_l\in D_l$, $l=1,2$ выполняется*

$$r(D_1,x_1)^{2-n}+r(D_2,x_2)^{2-n}\geq 2|x_1-x_2|^{2-n}+(R-|x_1|^2/R)^{2-n}+$$

$$+(R-|x_2|^2/R)^{2-n}-2||x_1|x_2/R-Rx_1/|x_1||^{2-n}. \qquad (8)$$

Знак равенства достигается для произвольных точек x_1, x_2, принадлежащих шару $B(0,R)$, и областей

$$D_l = \{x \in B(0,R) : \sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+l}\left(|x-x_k|^{2-n}-\right.$$
$$\left.-\ ||x_k|x/R - Rx_k/|x_k||^{2-n}\right) > 0\},$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть допустимые области D_l, $l=1,2$. Положим $X=\{x_1,x_2\}, \triangle=\{1,-1\}$, $\Psi=\{1,1\}$. Согласно свойству монотонности приведенного модуля имеем

$$M(D_1 \cup D_2, X, \triangle, \Psi) \leq M(B(0,R), X, \triangle, \Psi).$$

Воспользовавшись теоремой 1, получим

$$-\lambda_n\nu^2(r(D_1,x_1)^{2-n} + r(D_2,x_2)^{2-n}) \leq -\lambda_n\nu^2 r(B(0,R),x_1)^{2-n}-$$
$$-\lambda_n\nu^2 r(B(0,R),x_2)^{2-n} - 2\nu^2 g_{B(0,R)}(x_1,x_2).$$

Требуемое неравенство теперь следует из (1).

Исследуем вопрос о знаке равенства. Введем функцию

$$g(x) = g_{B(0,R)}(x,x_1) - g_{B(0,R)}(x,x_2).$$

Легко видеть, что множества $D_l := \{x \in B(0,R) : (-1)^{l+1}g(x) > 0\}$, $l=1,2$, являются областями. Кроме того, функция Грина области D_l совпадает с функцией $(-1)^{l+1}g(x)$, $l=1,2$. Используя (1), получим

$$r(D_1,x_1)^{2-n} = |x_1-x_2|^{2-n}+(R-|x_1|^2/R)^{2-n}-||x_2|x_1/R-Rx_2/|x_2||^{2-n};$$
$$r(D_2,x_2)^{2-n} = |x_1-x_2|^{2-n}+(R-|x_2|^2/R)^{2-n}-||x_1|x_2/R-Rx_1/|x_1||^{2-n}.$$

Таким образом, для точек x_1, x_2 и областей D_1, D_2 выполняется знак равенства в (8). Теорема доказана.

Приведем теперь результат для неналегающих областей со свободными полюсами (ср. [5, с. 53]). Нам понадобятся цилиндрические координаты (ρ,θ,x') точки $x=(x^1,...,x^n)$ в $\mathbf{R}^n$, $n \geq 3$, связанные с исходными координатами соотношениями $x^1 = \rho\cos\theta$, $x^2 = \rho\sin\theta$, $x' = (x^3,x^4,...,x^n)$. Введем следующие обозначения: $J = \{(\rho,\theta,x') : \rho = 0\}$; G – либо кольцо $\{x : \rho_1 < |x| < \rho_2\}$, либо цилиндр $\{(\rho,\theta,x') : \rho_1 < \rho < \rho_2\}$, $0 \leq \rho_1 < \rho_2 \leq \infty$, $D_l^* = \{(\rho,\theta,x') \in G : |\theta - 2\pi l/m| < \pi/m\}$, $x_l^* = (t, 2\pi l/m, 0)$, $\rho_1 < t < \rho_2$, $l=1,...,m$.

Теорема 4. *Для любых различных точек x_l, $l = 1, ..., m$ $(m \geq 2)$, лежащих на окружности $\{(\rho, \theta, x') : \rho = t, x' = 0\}$, и любых попарно непересекающихся областей D_l пространства $\mathbf{R}^n$ таких, что $x_l \in D_l \subset \bar{G}$, $l = 1, ..., m$, справедливо неравенство*

$$\sum r(D_l, x_l)^{2-n} \geq \sum r(D_l^*, x_l^*)^{2-n} = mr(D_m^*, x_m^*)^{2-n}.$$

В частности, при $m = 2k$, $\rho_1 = 0$ и $\rho_2 = \infty$ имеем

$$\sum_{l=1}^{2k} r(D_l, x_l)^{2-n} \geq m \sum_{l=1}^{2k-1} (-1)^{l+1} |x_{2k}^* - x_l^*|^{2-n}.$$

Доказательство. Можно считать, что области D_l, $l = 1, ..., m$, допустимы. Мы предполагаем воспользоваться формулой (3), где $|C(r; B)| = M_2^{-1}(\Gamma(r; B)) = \lambda(\Gamma(r; B))$. Основные необходимые нам факты, касающиеся 2-экстремальной длины $\lambda(\Gamma)$ семейства кривых Γ совпадают с таковыми для плоского случая [14]. Более общее изложение можно найти в работе [15]. Нам понадобится также процедура диссимметризации [5, с. 33], которая применительно к нашему случаю выглядит следующим образом. Обозначим через Φ группу симметрий в $\mathbf{R}^n$, состоящую из суперпозиций отражений относительно плоскостей, проходящих через полуплоскости $L_l^* = \{(\rho, \theta, x') : \theta = 2\pi l/m\}$, а также полуплоскости $\{(\rho, \theta, x') : \theta = \pi/m + 2\pi l/m\}$, $l = 1, ..., m$ (здесь и ниже плоскость означает гиперплоскость). В пространстве $\bar{\mathbf{R}}^n$ введем симметричную структуру $\{P_l\}_{l=1}^N$ как совокупность замкнутых углов $P_l = \{(\rho, \theta, x') : \theta_{l_1} \leq \theta \leq \theta_{l_2}\}$, $l = 1, ..., N$, удовлетворяющих условиям:

$$aP) \quad \bigcup_{l=1}^{N} P_l = \bar{\mathbf{R}}^n, \ \sum_{l=1}^{N} (\theta_{l2} - \theta_{l1}) = 2\pi,$$

$$bP) \quad \{\phi(P_l)\}_{l=1}^N = \{P_l\}_{l=1}^N \quad \text{для любой изометрии } \phi \in \Phi.$$

Совокупность $\{\alpha_l\}_{l=1}^N$ поворотов вокруг оси J назовем диссимметризацией симметричной структуры $\{P_l\}_{l=1}^N$, если для образов $S_l = \alpha_l(P_l)$ выполняются следующие условия:

aS) $\bigcup_{l=1}^N S_l = \bar{\mathbf{R}}^n$, bS) для любого непустого пересечения $S_l \cap S_p$, $l, p = 1, \dots, N$, существует изометрия $\phi \in \Phi$ такая, что $\phi(\alpha_l^{-1}(S_l \cap S_p)) = (\alpha_p^{-1}(S_l \cap S_p)$.

Для произвольного подмножества A пространства $\bar{\mathbf{R}}^n$ введем обозначение

$$\operatorname{Dis} A = \bigcup_{l=1}^{N} \alpha_l(A \cap P_l).$$

Пусть L_l, $l = 1, \dots, m$ – полуплоскости с краем J, проходящие через точки соответственно x_l, и пусть $r > 0$ достаточно мало. Из леммы 1.4 работы [5] следует существование симметричной структуры $\{P_l\}_{l=1}^N$, $N \ge m$ и диссимметризации $\{\alpha_l\}_{l=1}^N$ таких, что

$$\operatorname{Dis} L_l^* = L_l, \ \operatorname{Dis} E(x_l^*, r) = E(x_l, r), \ l = 1, \dots, m.$$

Обозначим через Γ_m^* семейство кривых в $\{(\rho, \theta, x') \in D_m^* : \frac{\pi}{m} \le \theta \le 0\} \setminus B(x_m^*, r)$, соединяющих границу D_m^* со сферой $S(x_m^*, r)$ и пусть $\Gamma(r; D_m^*)$ – семейство кривых из §1 для $B = D_m^*$, $x_0 = x_m^*$. Принцип симметрии [14, с. 21] дает

$$\lambda(\Gamma(r; D_m^*)) = \frac{1}{2}\lambda(\Gamma_m^*). \tag{9}$$

Для каждой кривой $\gamma_m^* \in \Gamma_m^*$ построим кривую γ^*, являющуюся суммой всех различных кривых, получающихся из γ_m^* при отображении $\phi \in \Phi$. Кривая γ^* состоит из m непрерывных кривых в G, соединяющих сферы $S(x_l^*, r)$, $l = 1, \dots, m$. Семейство кривых γ^* обозначим через Γ^*. Из принципа композиции и симметрии семейства Γ^* следует

$$\lambda(\Gamma^*) = 2m\lambda(\Gamma_m^*) \tag{10}$$

[14, с .21; 15, с. 178, 179]. Так как диссимметризация $\{\alpha_l\}_{l=1}^N$ индуцирует метрику в обе стороны с сохранением длины и площади, то

$$\lambda(\Gamma^*) = \lambda(\Gamma), \tag{11}$$

где $\Gamma = \{\gamma : \gamma = Dis\gamma^*, \ \gamma^* \in \Gamma^*\}$. Ввиду свойства bS) пересечение каждой “кривой” γ из семейства Γ с углом, образованным двумя соседними полуплоскостями L_l, содержит некоторый континуум, соединяющий сферы $S(x_l, r)$. Наконец, введем семейства кривых Γ_{l1} и Γ_{l2}, $l = 1, \dots, m$. Семейство Γ_{l1} состоит из непрерывных дуг кривых семейства Γ, лежащих в D_l и соединяющих границу ∂D_l

с полусферой сферы $S(x_l, r)$ расположенной по одну сторону от полуплоскости L_l. Семейство Γ_{l2} состоит из аналогичных дуг, соединяющих ∂D_l со второй полусферой сферы $S(x_l, r)$. Вновь принципы композиции дают

$$\lambda(\Gamma) \geq \sum(\lambda(\Gamma_{l1}) + \lambda(\Gamma_{l2})), \quad \lambda(\Gamma(r; D_l))^{-1} \geq \lambda(\Gamma_{l1})^{-1} + \lambda(\Gamma_{l2})^{-1},$$

$l = 1, \ldots, m$, где $\Gamma(r; D_l)$ – семейство кривых из параграфа 1 для $B = D_l$, $x_0 = x_l$, $l = 1, \ldots, m$. Применяя классическое неравенство для средних, получаем

$$\lambda(\Gamma_{l1}) + \lambda(\Gamma_{l2}) \geq 4(\lambda(\Gamma_{l1})^{-1} + \lambda(\Gamma_{l2})^{-1})^{-1}.$$

Выписанные выше соотношения для экстремальных длин семейств кривых дают в итоге

$$m\lambda(\Gamma(r; D_m^*)) \geq \sum \lambda(\Gamma(r; D_l)).$$

Осталось воспользоваться формулой (3). Значение правой части неравенства в теореме 4 при четном числе точек $m = 2k$ и $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = \infty$ вытекает из (2). Теорема доказана.

Литература

1. Г. В. Кузьмина, *Методы геометрической теории функций.* I, II, Алгебра и анализ **9**, вып. 3 (1997), 41–103, вып. 5 (1997), 1–50.
2. J. Hersch, *Transplantation harmonique, transplantation par modules, et théorèmes isopérimétriques,* Coment. Math. Helvetici **44**, No. 3 (1969), 354–366.
3. Б. Е. Левицкий, *Приведенный p-модуль и внутренний p-гармонический радиус,* Докл. АН СССР **316**, No. 4 (1991), 812–815.
4. В. Н. Дубинин, *Асимптотика модуля вырождающегося конденсатора и некоторые ее применения,* Зап. научн. семин. ПОМИ **237** (1997), 56–73.
5. В. Н. Дубинин, *Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного,* Успехи мат. наук **49**, No. 1 (1994), 3–76.
6. C. Bandle and M. Flucher, *Harmonic radius and concentration of energy, hyperbolic radius and Liouville's equations* $\Delta U = e^U$ *and* $\Delta U = U^{(n+2)/(n-2)}$, SIAM Review **38**, No. 2 (1996), 191–238.
7. Ю. Г. Решетняк, *Пространственные отображения с ограниченным искажением,* Новосибирск, 1982.
8. Б. Е. Левицкий, И. П. Митюк, *"Узкие" теоремы о пространственных модулях,* Докл. АН СССР **248**, No. 4 (1979), 780–783.
9. W. P. Ziemer, *Extremal length and p-capacity,* Michigan Math. J. **16** (1969), 43–51.
10. J. Hesse, *A p-extremal length and p-capacity equality,* Ark. Mat. **13**, No. 1 (1975), 131–144.

11. Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного,* 2-ое изд., М., 1966.
12. В. Н. Дубинин, Л. В. Ковалев, *Приведенный модуль комплексной сферы,* В настоящем сборнике.
13. П. П. Куфарев, *К вопросу о конформных отображениях дополнительных областей,* Докл. АН СССР **73**, No. 5 (1950), 881–884.
14. Л. Альфорс, *Лекции по квазиконформным отображениям,* М., 1969.
15. B. Fuglede, *Extremal length and functional completion,* Acta Math. **98**, No. 3–4 (1957), 171–219.

Институт прикладной математики
ДВО РАН, Владивосток

Поступило 26 июня 1998 г.