

В. Б. Филиппов, Н. Я. Кирпичникова,  
А. С. Кирпичникова

## ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА МАЛОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ФОРМЫ В СЛОЕ

Посвящается юбилею  
Василия Михайловича Бабича

В работе [1] была рассмотрена задача дифракции электромагнитной плоской волны от неоднородности  $\Omega_3$ , помещенной в слое. Эта неоднородность являлась кругом, радиус которого мал по сравнению с толщиной слоя и длиной волны. Было показано при некоторых ограничениях, что в главном приближении *неоднородность* излучает как *точечный источник типа монополя* при скачке *диэлектрической* проницаемости  $\epsilon$  или как *диполь* (при скачке *магнитной* проницаемости  $\mu$ ), *пропорциональный площади неоднородности* (области  $\Omega_3$ ) (см. рис. 1).

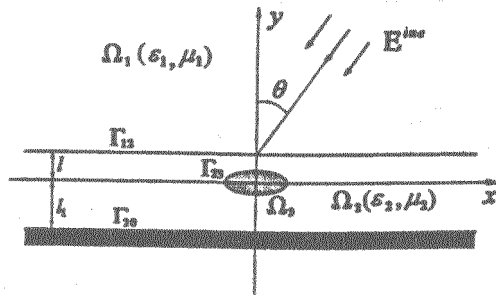


Рис. 1.

Покажем теперь, что подобный результат сохраняется и для случая, когда область  $\Omega_3$  является эллипсом, т.е., что диаграмма

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 99-01-00107).

направленности для рассеянного поля в главном приближении зависит от площади области  $\Omega_3$  и не зависит от формы эллипса и его положения.

Кроме этого результата найдем решение задачи дифракции электромагнитной плоской волны от малой неоднородности в слое  $\Omega_2$ .

Пусть на идеально проводящую поверхность  $\Gamma_{12}$ , покрытую диэлектрическим слоем толщины  $l+l_1$ , падает из среды  $\Omega_1$  плоская волна  $\mathbf{E}^{inc}$ . Предположим, что в слое  $\Omega_2$  имеется включение  $\Omega_3$  с другими параметрами  $\varepsilon$ ,  $\mu$ , чем у слоя.

*Вначале найдем волну, рассеянную неоднородностью  $\Omega_3$  в однородной среде  $\Omega_2$ .*

### §1. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОТРАЖЕНИЯ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ ОТ НЕОДНОРОДНОСТИ $\Omega_3$

Введем эллиптические координаты  $(\xi, \eta)$ , если декартовы координаты выбраны так, чтобы ось  $x$  проходила через фокусы эллипса. Обозначим фокусное расстояние через  $2h$ . Тогда декартовы координаты связаны с эллиптическими соотношениями [5]

$$\begin{cases} x = h \cosh \xi \cos \eta, \\ y = h \sinh \xi \sin \eta, \end{cases} \quad \xi > 0, \quad 0 \leq \eta < 2\pi. \quad (1.1)$$

В эллиптических координатах уравнение Гельмгольца запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} (\Delta + k_i^2)u_i &= \frac{\partial^2 u_i}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial \eta^2} + 2k^2(\cosh 2\xi - \cos 2\eta)u_i = 0, \\ i &= 2, 3; \quad 2k = k_i h \ll 1. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Если искать решение в виде произведения функций, зависящих от  $\xi$  и  $\eta$ :

$$u(\xi, \eta) = u_i(\xi, \eta) = \Psi(\xi)\Phi(\eta), \quad i = 2, 3, \quad (1.3)$$

то получим, что функции  $\Psi$  и  $\Phi$  являются решениями уравнений Матье (Mathieu)

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + (a - 2k^2 \cosh 2\xi)\Psi = 0, \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + (a - 2k^2 \cos 2\eta)\Phi = 0. \quad (1.5)$$

Кроме уравнения мы должны удовлетворить граничному условию непрерывности касательных компонент электрического и магнитного поля на границе  $\Gamma_{23}$

$$\begin{cases} u_2 & = u_3, \\ \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial u_2}{\partial n} & = \frac{1}{\mu_3} \frac{\partial u_3}{\partial n}. \end{cases} \quad (1.6)$$

Как и ранее (см. [1, 2]) решение невозмущенной задачи дифракции, когда область  $\Omega_3$  отсутствует, представляется в виде суперпозиции плоских волн.

В первом приближении при малых размерах области  $\Omega_3$  и при толщине слоя порядка длины волны эффектами вторичной дифракции, т.е. дифракции поля, рассеянного на  $\Gamma_{23}$  можно пренебречь.

Итак, в первом приближении задача сводится к задаче дифракции плоской волны на малом полупрозрачном эллипсе. Для получения решения задачи дифракции воспользуемся формулой разложения плоской волны по функциям Маттье:

$$\begin{aligned} u_2^{inc} = e^{ik_2 r \cos(\varphi - \theta)} &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{P_{2n}} C e_{2n}(\xi) c e_{2n}(\eta) c e_{2n}(\theta) + \\ &+ \frac{1}{S_{2n+2}} S e_{2n+2}(\xi) s e_{2n+2}(\eta) s e_{2n+2}(\theta) + \\ &+ i \{ \text{то же с номером } 2n + 1 \}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где  $c e_m$  и  $s e_m$  четные и нечетные периодические функции Маттье,  $C e_m$  и  $S e_m$  соответствующие им неперiodические функции. Имеют место следующие разложения для этих функций:

$$c e_{2n}(z, q) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{2m}^{2n} \cos 2mz, \quad (1.8)$$

$$c e_{2n+1}(z, q) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{2m+1}^{2n+1} \cos(2m + 1)z,$$

$$s e_{2n+2}(z, q) = \sum_{m=0}^{\infty} B_{2m+2}^{2n+2} \sin(2m + 2)z, \quad (1.9)$$

$$s e_{2n+1}(z, q) = \sum_{m=0}^{\infty} B_{2m+1}^{2n+1} \sin(2m + 1)z,$$

где  $q = k^2 > 0$ ,  $q_i = k^2 = \left(\frac{k_i h}{2}\right)^2 \ll 1$ ,  $i = 2, 3$ .

$$C e_{2n}(z, q) = \frac{c e_{2n}(1/2\pi, q)}{A_0^{2n}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m A_{2m}^{2n} J_{2m}(2k \cosh z), \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} C e_{2n+1}(z, q) &= \frac{c e'_{2n+1}(1/2\pi, q)}{k A_1^{2n+1}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m A_{2m+1}^{2n+1} J_{2m+1}(2k \cosh z), \\ S e_{2n+1}(z, q) &= \frac{s e_{2n+1}(1/2\pi, q) \tanh z}{k B_1^{2n+1}} \times \\ &\times \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (2m+1) B_{2m+1}^{2n+1} J_{2m+1}(2k \cosh z), \\ S e_{2n+2}(z, q) &= -\frac{s e'_{2n+2}(1/2\pi, q) \tanh z}{k^2 B_2^{2n+2}} \times \\ &\times \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (2m+2) B_{2m+2}^{2n+2} J_{2m+2}(2k \cosh z). \end{aligned} \quad (1.11)$$

В дальнейшем нам потребуется кроме этих решений еще решения  $F e y_m(z, q)$  и  $G e y_m(z, q)$ , которые получаются из  $C e_m(z, q)$  и  $S e_m(z, q)$  заменой в разложениях функций Бесселя  $J$  на функции Неймана  $Y$ , а также функции

$$M e_m^{(1)} = C e_m + i F e y_m, \quad N e_m^{(1)} = S e_m + i G e y_m, \quad (1.12)$$

которые имеют разложения в ряды, содержащие функции Ханкеля  $H_m^{(1)}$  вместо  $J_m$ .

Коэффициенты  $P_m$  и  $S_m$  в (1.7) определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} P_{2n} &= \frac{c e_{2n}(0, q) c e_{2n}(1/2\pi, q)}{A_0^{2n}}, \\ P_{2n+1} &= \frac{c e_{2n+1}(0, q) c e'_{2n+1}(1/2\pi, q)}{k A_1^{2n+1}}, \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} S_{2n+1} &= \frac{s e'_{2n+1}(0, q) s e_{2n+1}(1/2\pi, q)}{k B_1^{2n+1}}, \\ S_{2n+2} &= \frac{s e'_{2n+2}(0, q) s e_{2n+2}(1/2\pi, q)}{k^2 B_2^{2n+2}}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Коэффициенты  $P_m$  и  $S_m$  в (1.7)–(1.14) находятся из рекуррентных соотношений:

$$\begin{cases} aA_0 - qA_1 = 0, \\ (a-4)A_2 - q(A_4 + 2A_0) = 0, \\ (a-4m^2)A_{2m} - q(A_{2m+2} + A_{2m-2}) = 0, \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{для функции} \\ \text{для функции} \\ se_{2m}(z, q). \end{array} \quad (1.15)$$

$$\begin{cases} (a-1-q)A_1 - qA_3 = 0, \\ (a-(2m+1)^2)A_{2m+1} - q(A_{2m+3} + A_{2m-1}) = 0, \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{для функции} \\ se_{2m+1}(z, q). \end{array} \quad (1.16)$$

$$\begin{cases} (a-1-q)B_1 - qB_3 = 0, \\ (a-(2m+1)^2)B_{2m+1} - q(B_{2m+3} + B_{2m-1}) = 0, \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{для функции} \\ se_{2m+1}(z, q). \end{array} \quad (1.17)$$

$$\begin{cases} (a-4)B_2 - qB_4 = 0, \\ (a-4m^2)B_{2m} - q(B_{2m+2} + B_{2m-2}) = 0, \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{для функции} \\ se_{2m+2}(z, q). \end{array} \quad (1.18)$$

Константа разделения  $a = a(q)$  находится, вообще говоря, из некоторых цепных дробей, но при малых  $q$  удобно использовать разложения в ряды по степеням  $q$ .

Если обозначить через  $a_m$  собственные значения функции  $se_m(z, q)$  и через  $b_m$  собственные значения функции  $se_m(z, q)$ , то для них можно получить следующие разложения:

$$\begin{aligned} a_0 &= -\frac{1}{2}q^2 + \frac{7}{128}q^4 + O(q^6), \\ b_1 &= 1 - q - \frac{1}{8}q^2 + O(q^4), \quad a_1 = 1 + q - \frac{1}{8}q^2 + O(q^4), \\ b_2 &= 4 - \frac{1}{12}q^2 + O(q^4), \quad a_2 = 4 + \frac{5}{12}q^2 + O(q^4), \quad \text{и т.д.} \end{aligned} \quad (1.19)$$

Если подставить эти выражения в (1.15)–(1.18), то для коэффициентов  $A$  и  $B$  при малых  $q$  имеют место соотношения ( $l \geq 0$ )

$$\begin{aligned} A_{m+2l}^m &\simeq (-1)^l \frac{m!}{l!(m+l)!} \left(\frac{q}{4}\right)^l, \\ A_{m-2l}^m &\simeq (-1)^l \frac{(m-l-1)!}{l!(m-l)!} \left(\frac{q}{4}\right)^l. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Аналогичные формулы имеются для коэффициентов  $B_{m-2l}^m$ .

Вернемся к решению задачи рассеяния на полупрозрачном эллипсе.

Итак, пусть на эллипс  $\xi = \xi_0$  падает плоская волна (1.7). Требуется найти поле, удовлетворяющее граничному условию (1.6).

Решение вне эллипса  $\Gamma_{23}$  будем искать в виде:

$$u_2 = u_2^{inc} + \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m}^{(2)} M e_{2m}^{(1)}(\xi) c e_{2m}(\eta) c e_{2m}(\theta) + b_{2m+1}^{(2)} N e_{2m+2}^{(1)}(\xi) \times \\ \times s e_{2m+2}(\eta) s e_{2m+2}(\theta) + \{\text{то же с номером } 2m+1\}, \quad (1.21)$$

а решение внутри эллипса  $\Gamma_{23}$  имеет иной вид:

$$u_3 = \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m}^{(3)} C e_{2m}(\xi) c e_{2m}(\eta) c e_{2m}(\theta) + b_{2m+2}^{(3)} S e_{2m+2}(\xi) \times \\ \times s e_{2m+2}(\eta) s e_{2m+2}(\theta) + i\{\text{то же с номером } 2m+1\}. \quad (1.22)$$

Заметим, что выражение (1.21) есть функции от  $q_2 = k_2^2 h^2 / 4$ , а (1.22) есть функции от  $q_3 = k_3^2 h^2 / 4$ , что, ради краткости, мы опускаем. Легко видеть, что выражения (1.21) и (1.22) являются решениями уравнения Гельмгольца вне и внутри эллипса  $\Gamma_{23}$ , при этом функция  $u_2 - u_2^{inc}$  удовлетворяет условию излучения. Остается удовлетворить только граничным условиям (1.6). Подстановка выражений (1.21) и (1.22) в условие (1.6) приводит нас, вообще говоря, к бесконечной системе алгебраических уравнений для коэффициентов  $a_m^{(2,3)}$  и  $b_m^{(2,3)}$ . Однако, используя соотношения (1.8)–(1.20) для функций Матье, можно показать, что при малых  $q = q_i = k_i^2 h^2 / 4$ ,  $k_i h \ll 1$ ,  $i = 2, 3$  система является асимптотически (по  $q \rightarrow 0$ ) диагональной и это позволяет выразить главный член асимптотики по  $q$  в явном виде. При малых  $q$  имеем

$$c e_m(\eta, q_3) = c e_m(\eta, q_2) + O(q_2), \\ s e_m(\eta, q_3) = s e_m(\eta, q_2) + O(q_2).$$

Тогда с точностью  $O(q)$  получим выражение для коэффициентов поля, рассеянного на эллипсе

$$a_{2m}^{(2)} = \frac{\varkappa_{23} C e'_{2m}(\xi_0, q_3) C e_{2m}(\xi_0, q_2) - C e_{2m}(\xi_0, q_3) C e'_{2m}(\xi_0, q_2)}{\varkappa_{23} C e'_{2m}(\xi_0, q_3) M e_{2m}^{(1)}(\xi_0, q_2) - C e_{2m}(\xi_0, q_3) M e_{2m}^{(1)'}(\xi_0, q_2)},$$

где  $\varkappa_{23} = \sqrt{\frac{\mu_2 \varepsilon_3}{\mu_3 \varepsilon_2}}$ .

Подставляя сюда разложения (1.10), (1.11), учитывая (1.20), а также разложение в окрестности нуля для цилиндрических функций Бесселя и Неймана, получим при  $m = 0$

$$a_0^{(2)} = i(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)k_2^2 \frac{S}{\pi}.$$

Аналогичные рассуждения для коэффициентов  $b_{2m+1}^{(2)}$  приводят к выражению при  $m = 0$

$$b_1^{(2)} = a_1^{(2)} = -\varepsilon_2 \mu_2 \frac{\mu_3 - \mu_2}{\mu_3 + \mu_2} k_2^2 \frac{S}{\pi}.$$

Поскольку, как известно, площадь эллипса равна ( $h$  – фокусное расстояние)

$$S = \pi h^2 \cosh \xi_0 \sinh \xi_0,$$

то видно, что как и для случая круга, характеристики рассеяния при  $kh \ll 1$  зависят только от площади рассеивателя (эллипса  $\Omega_3$ ) и не зависят от его формы и ориентации. Напомним, что все рассуждения проводились в первом приближении по  $kh \ll 1$ .

Дальнейшие рассуждения аналогичны тем, которые проводились в работах [1, 2] для случая, когда неоднородность – круг  $\Omega_3$ .

Окончательно формулы для диаграммы направленности поля, рассеянного неоднородностью (эллипс  $\Omega_3$ ) сохраняются.

## §2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ ОТ СЛОЯ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ $\Omega_3$

Пусть на идеально проводящую поверхность  $\Gamma_{12} : y = l$ , покрытую диэлектрическим слоем толщины  $l + l_1$ , падает из среды  $\Omega_1$  плоская волна  $\mathbf{E}^{inc}$  поляризованная перпендикулярно плоскости падения ( $xy$ ). На границах  $\Gamma_{12} : y = l$  и  $\Gamma_{23}$  должны выполняться условия непрерывности касательных компонент электрического и магнитного поля типа (1.6). На границе  $\Gamma_{20} : y = -l_1$  выполняется условие Дирихле (см. рис. 1).

Решение этой задачи известно и его значение понадобится нам лишь на малой эллиптической области  $\Omega_3$  в слое. Приведем здесь это решение, которое асимптотически при  $kh \ll 1$  не зависит от  $\xi, \eta$ :

$$u_1^0(\xi, \eta) = \frac{2e^{-ik_1 l \sin \varphi_1} e^{ik_2 l \sin \varphi_2} \sin \varphi_1}{\Delta(\varphi_2)} [1 + e^{2ik_2 \sin \varphi_2 l_1}]. \quad (2.1)$$

Здесь углы  $\varphi_1 = \pi/2 - \theta$ ,  $\varphi_2$  есть углы скольжения падающей и преломленной слоев волн,  $\Delta(\varphi_2)$  равен

$$\Delta(\varphi_1) = \sin \varphi_1 [1 + E_2^2] + \frac{\mu_1 k_2}{\mu_2 k_1} \sqrt{1 - k_1^2/k_2^2 \cos^2 \varphi_1} [1 - E_2^2], \quad (2.2)$$

где

$$E_2^2 = e^{2ik_2(l+l_1) \sin \varphi_2}, \quad \sin \varphi_2 = \sqrt{1 - k_1^2/k_2^2 \cos^2 \varphi_1}. \quad (2.3)$$

Воспользуемся разработанным в работах [2-4] методом интегральных уравнений нахождения поля, рассеянного эллиптической неоднородностью  $\Omega_3$ , и асимптотикой функции Грина для слоя при  $k_1 r \gg 1$  и  $k_3 h \ll 1$

$$G_2(r, \varphi; \xi, \eta) = \frac{e^{i(k_1 r - 3\pi/4)}}{\sqrt{2\pi k_1 r}} \times \\ \times \frac{e^{-ik_1 l \sin \varphi} e^{ik_2 l \sqrt{1 - k_1^2/k_2^2 \cos^2 \varphi}} \sin \varphi_1 \left(1 + e^{2ik_2 l_1 \sqrt{1 - k_1^2/k_2^2 \cos^2 \varphi}}\right)}{\sin \varphi [1 + E^2] + \frac{\mu_1 k_2}{\mu_2 k_1} \sqrt{1 - k_1^2/k_2^2 \cos^2 \varphi} [1 - E^2]}. \quad (2.4)$$

В формуле (2.4)  $E^2$  имеет следующее выражение

$$E^2 = e^{2ik_2(l+l_1) \sqrt{1 - k_1^2/k_2^2 \cos^2 \varphi}}, \quad (2.5)$$

а угол  $\varphi$  есть угол наблюдения.

Окончательно, в первом приближении электромагнитная плоская волна поляризованная перпендикулярно плоскости падения, рассеянная от малой эллиптической неоднородности ведет себя также, как и поле, рассеянное от круга малого радиуса:

$$U_E^1(r, \varphi) = \frac{2\mu_1}{\mu_2} \left( \frac{\mu_2 \varepsilon_2}{\mu_3 \varepsilon_3} - 1 \right) \pi (k_3 h)^2 \times \\ \times \cosh \xi_0 \sinh \xi_0 \frac{e^{i(k_1 r - 3\pi/4)}}{\sqrt{2\pi k_1 r}} F(\varphi_1, \varphi), \quad (2.6)$$

где диаграмма направленности  $F(\varphi_1, \varphi)$  равна

$$F(\varphi_1, \varphi) = T_{12}(\varphi_1) T_{21}(\varphi) = \\ = \frac{e^{-ik_1 l \sin \varphi_1} e^{ik_2 l \sqrt{1 - k_1^2/k_2^2 \cos^2 \varphi_1}} \sin \varphi_1 \left(1 + e^{2ik_2 l_1 \sqrt{1 - k_1^2/k_2^2 \cos^2 \varphi_1}}\right)}{\Delta(\varphi_1)} \times$$

$$\times \frac{e^{-ik_1 l \sin \varphi} e^{-ik_2 l \sqrt{1-k_1^2/k_2^2 \cos^2 \varphi}} \sin \varphi \left(1 + e^{2ik_2 l_1 \sqrt{1-k_1^2/k_2^2 \cos^2 \varphi}}\right)}{\Delta(\varphi)}. \quad (2.7)$$

Выводы, следующие из формул (2.6), (2.7), полностью совпадают с выводами работы [2].

Сравнивая рассеяние плоской электромагнитной волны от эллиптической неоднородности в неограниченном пространстве с рассеянием от неоднородности в слое, видим, что качественная картина сохранится.

Неоднородность будет излучать как точечный источник, мощность которого пропорциональна площади неоднородности и скачкам диэлектрической и магнитной проницаемостей на границах разделов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. Б. Филиппов, Н. Я. Кирпичникова, *Дифракция электромагнитных волн на малых неоднородностях*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **257** (1999), 304–322.
2. Н. Я. Кирпичникова, В. Б. Филиппов, *Дифракция плоских электромагнитных волн от малой неоднородности, помещенной в слой*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **275** (2001) (настоящий сборник).
3. В. А. Фок, *Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн*. Советское радио, М. (1970).
4. Ф. Франк и Р. Мизес, *Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики*. ОНТИ ГРОТЛ, Л.- М. (1937).
5. Н. В. Мак-Лахлан, *Теория и приложения функций Матъе*. ИЛ., М. (1953).

Philippov V. B., Kirpichnikova N. Ya., Kirpichnikova A. S. Diffraction of electromagnetic wave on a small inhomogeneity elliptic form in a layer.

The problem of the diffraction of the electromagnetic plane wave, scattered on a small inhomogeneity in a layer, is investigated. The inhomogeneity is supposed to be a elliptic cylinder, focal distance of which is small in comparison with the length of the falling wave. It is proved that the small inhomogeneity radiates as a point source, the power of wich is proportional to the cross-section area and the jumps of the dielectric and magnetic constants on the interfaces.

С.-Петербургское отделение  
Математического института  
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 25 декабря 2000 г.