



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. М. Водинчар, О. К. Жданова, Л. Д. Островерхая, Р. И. Паровик, А. С. Пережогин, О. В. Шереметьева, Т. П. Яковлева, Решения задач математической олимпиады «Витус Беринг - 2015», *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2015, номер 2, 96–101

DOI: 10.18454/2079-6641-2015-11-2-96-101

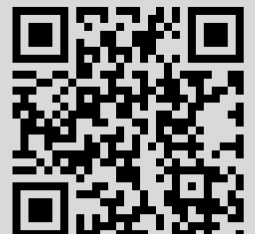
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.87

22 января 2025 г., 11:39:04



DOI: 10.18454/2079-6641-2015-11-2-96-101

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

УДК 51-8

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ «ВИТУС БЕРИНГ – 2015»

**Г.М. Водинчар, О.К. Жданова, Л.Д. Островерхая,
Р.И. Паровик, А.С. Пережогин, О.В. Шереметьева,
Т.П. Яковлева**

Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, 683032,
г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, 4

E-mail: kafmat@mail.ru

В статье приведены задачи олимпиады по математике «Витус Беринг – 2015» для старших школьников, которая проходила на базе Камчатского государственного университета в ноябре 2015 года.

Ключевые слова: олимпиадные задачи по математике для школьников

© Водинчар Г.М. и др., 2015

TEACHING MATERIALS

MSC 97A90

SOLUTIONS OF MATHEMATICAL OLYMPIAD «VITUS BERING – 2015»

**G.M. Vodinchar, O.K. Zhdanova, L.D. Ostroverhaya,
R.I. Parovik, A.S. Perezhogin, O.V. Sheremet'eva, T.P.
Yakovleva**

Vitus Bering Kamchatka State University, 683031, Petropavlovsk-Kamchatsky,
Pogranichnaya st., 4, Russia

E-mail: kafmat@mail.ru

We consider solutions of Mathematical Olympiad «Vitus Bering – 2015» for high school students. It was held at Kamchatka State University in November 2015.

Key words: Mathematical Olympiad for high school students

© Vodinchar G.M., et.al, 2015

Введение

Предлагаемая вниманию читателей заметка выходит из руслу основной тематики журнала «Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки», связанной с публикацией результатов оригинальных исследований физико-математического профиля. Она посвящена математической олимпиаде школьников старших классов «Витус Беринг – 2015», которая проводилась Камчатским государственным университетом имени Витуса Беринга в начале ноября 2015 года. Мы надеемся, что подобные олимпиады на физико-математическом факультете будут традиционно проводиться каждый учебный год.

Предметные, в частности – математические, олимпиады известны как прекрасное средство популяризации науки, с одной стороны, и как механизм отбора талантливых учащихся в вузы, с другой. Математические олимпиады школьников в нашей стране начали проводиться в 30-е годы прошлого века и быстро завоевали популярность, а с 60-х годов стали традиционными для многих городов Советского Союза. Они проводятся на уровнях городов, регионов, страны, свои олимпиады проводят многие учебные заведения. Получила большое развитие и система подготовки учащихся к решению очень специфических по своему содержанию олимпиадных задач. Уровень вовлеченности лучших юных математиков и физиков страны в олимпиадное движение стал настолько высоким, что поступление в ряд ведущих вузов страны, например в знаменитый «Физтех», фактически стало возможно только через олимпиады.

Переход в последние годы к поступлению в вузы через систему Единого государственного экзамена увеличил заинтересованность вузов к проведению своих олимпиад. Это объяснимо – вузы хотят не просто брать неизвестных для них абитуриентов на основании формальных баллов ЕГЭ, но и осуществлять свой содержательный отбор в рамках действующих правил приема. Победители и призеры вузовских олимпиад получают дополнительные баллы к баллам ЕГЭ при поступлении в соответствующий вуз.

Математическая олимпиада «Витус Беринг – 2015» проводилась в один тур и включала в себя 6 задач различной сложности для школьников 9-11 классов. На выполнение заданий участникам олимпиады было выделено 3 часа. При подготовке олимпиадных заданий организаторы использовали некоторые типовые задания из сборника [1].

Далее приводятся задания этой олимпиады и их решения.

Задания олимпиады

- 1) (5 баллов) Найти b^b , если выполняются соотношения $a^b = 81$, $b^c = 2$, $a^c = 3$.
- 2) (5 баллов) Грузовой состав догоняет пассажирский поезд по параллельному пути. Скорость грузового состава составляет 105 км/ч, скорость пассажирского – 85 км/ч. Длина пассажирского состава равна 800 метров. Найдите длину грузового состава, если он обогнал пассажирский состав за 252 секунды. Ответ привести в метрах.
- 3) (5 баллов) Решить уравнение

$$(1 - (2 - (3 - (... (2013 - (2014 - (2015 - x))))))))) = 1000.$$

- 4) (10 баллов) Дан равнобедренный треугольник MNK с основанием MK . Точка A принадлежит основанию MK . На боковых сторонах MN и NK отмечены точки B и C , так что $MN \parallel AC$ и $NK \parallel AB$. Найти отношение площадей треугольников ABC и MNK , если $AC : NC = 4 : 7$.
- 5) (15 баллов) Найти площадь фигуры, ограниченной на координатной плоскости следующей системой

$$\begin{cases} \sqrt{2-x} + 4 \cdot x \geq 0, \\ -2 + \sqrt{x} \leq y \leq 1 + \sqrt{x} \end{cases}$$

- 6) (10 баллов) В течение четверти учитель математики ставил ученикам оценки $\ll 1 \gg$, $\ll 2 \gg$, $\ll 3 \gg$, $\ll 4 \gg$, $\ll 5 \gg$. Среднее арифметическое оценок Пети оказалось равно в точности $\ll 3,5 \gg$. Петя попросил заменить одну оценку $\ll 4 \gg$ парой оценок $\ll 3 \gg$ и $\ll 5 \gg$. Доказать, что средняя оценка Пети увеличилась.

Решения

- 1) Из условия задачи получаем, что значения $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

Рассмотрим $a^b = 81$, тогда $\log_3 a^b = 4$, откуда $b \cdot \log_3 a = 4$. Аналогично из $a^c = 3$ следует $c \cdot \log_3 a = 1$. Найдем отношение $\frac{b \cdot \log_3 a}{c \cdot \log_3 a} = \frac{4}{1}$, откуда $b = 4c$.

Тогда, применяя условие $b^c = 2$, получим искомое выражение $b^b = b^{4c} = (b^c)^4 = (2)^4 = 16$.

Ответ: 16.

- 2) Скорость сближения грузового поезда с пассажирским составляет $(105 - 85) = 20$ км/ч. Тогда со скоростью 20 км/ч будет пройдено расстояние равное сумме длин пассажирского и грузового поездов за 252 секунды.

Переведем все данные в одинаковые единицы измерения (метры и секунды): 20 км/ч = $\frac{50}{9}$ м/с.

Пусть l – длина грузового состава, тогда

$$\begin{aligned} l + 800 &= \frac{50}{9} \cdot 252, \\ l + 800 &= 1400. \end{aligned}$$

Откуда $l = 600$ м.

Ответ: 600 м.

- 3) Раскроем скобки и в левой части уравнения получим знакочередующуюся последовательность слагаемых

$$1 - 2 + 3 - \dots + 2013 - 2014 + 2015 - x = 1000.$$

Сгруппируем слагаемые следующим образом

$$\underbrace{(1 + 2015)}_{2016} + \underbrace{(-2 - 2014)}_{-2016} + \underbrace{(3 + 2013)}_{2016} + \dots + \underbrace{(-1006 - 1010)}_{-2016} + \underbrace{(1007 + 1009)}_{2016} - 1008 - x = 1000$$

и заметим, что выражений, равных 2016, будет 504, а выражений, равных (-2016), будет 503.

Следовательно, наше уравнение может быть преобразовано к виду

$$2016 - 1008 - x = 1000.$$

Откуда $x = 8$.

Ответ: $x = 8$.

4) Построим указанную фигуру. Чертеж приведен на рис. ??.

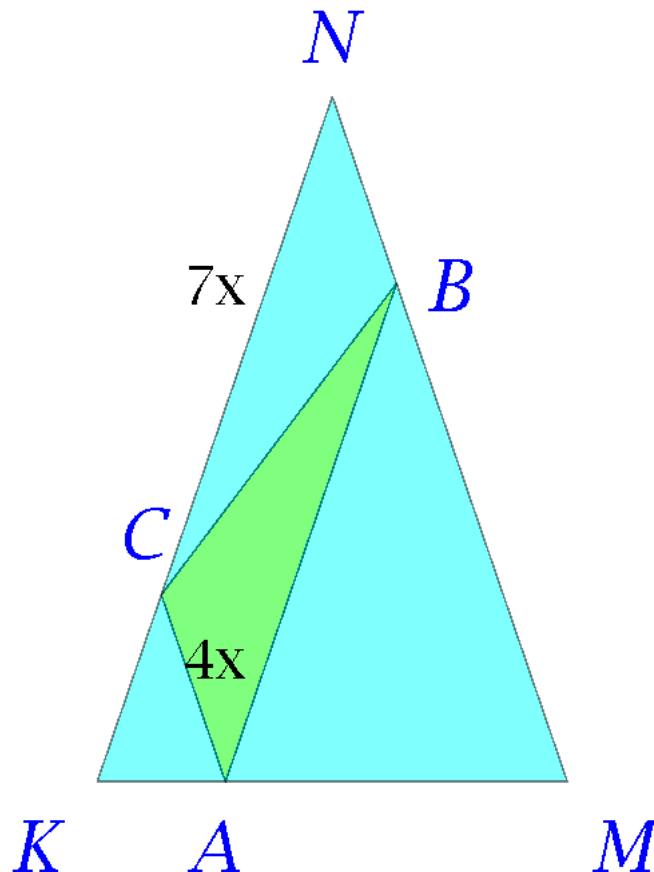


Рис. 1. Чертеж к задаче 4

$ACNB$ – параллелограмм, так как по условию задачи стороны параллельны.

Тогда $AC : AB = 4 : 7$. Обозначим $\alpha = \angle CNB = \angle CAB$.

Найдем площадь треугольника ABC : $S_{ABC} = 1/2 \cdot AC \cdot AB \cdot \sin \alpha = 1/2 \cdot 4x \cdot 7x \cdot \sin \alpha = 14 x^2 \sin \alpha$.

Треугольники KCA и KNM подобны по трем углам, следовательно, $KC = CA = 4x$ и $KN = KC + CN = 4x + 7x = 11x$.

Так как треугольник равнобедренный, то $S_{MKN} = 1/2 \cdot KN^2 \cdot \sin \alpha = 1/2 \cdot (11x)^2 \sin \alpha = 60,5 x^2 \sin \alpha$.

Тогда требуемое отношение равно $\frac{S_{ABC}}{S_{MKN}} = \frac{14 x^2 \sin \alpha}{60,5 x^2 \sin \alpha} = \frac{28}{121}$

Ответ: $\frac{28}{121}$.

5) Построим заданную область, обозначим D , на координатной плоскости.

Первое неравенство даёт ограничение на переменную x : $2 - x \geq 0$, откуда $x \in (-\infty, 2]$, а из второго неравенства $x \in [0, \infty)$. Следовательно, $x \in [0, 2]$.

Первое неравенство $\sqrt{2-x} + 4x \geq 0$ выполняется при всех $x \in [0, 2]$, что на координатной плоскости будет изображаться полосой, параллельной оси Oy . Второе неравенство определяет область между графиками функций $y_1 = \sqrt{x} + 1$ и $y_2 = \sqrt{x} - 2$, где график функции y_2 может быть получен из графика функции y_1 параллельным переносом вдоль оси Oy на три единицы вниз (рис. 2).

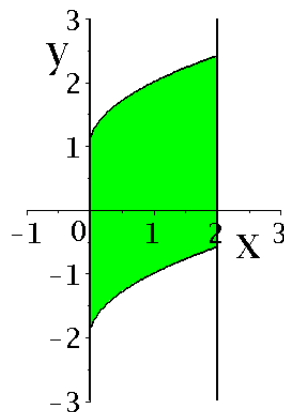


Рис. 2. Чертеж к задаче 5

Заметим, что область D равновелика прямоугольнику со сторонами 2 и 3. Для этого достаточно выполнить разрез области D , например, по линии $y = 1$ и верхнюю часть перенести вдоль оси Oy на три единицы вниз.

Отсюда площадь области D будет равна $S = 2 \cdot 3 = 6$.

Ответ: 6.

6) Пусть общее количество оценок Пети за четверть равно n , а сумма оценок без одной «4» равна S .

Тогда средняя оценка будет $\frac{S+4}{n} = 3,5$, откуда $S = 3,5n - 4$.

Замена одной оценки «4» на две оценки, «3» и «5», увеличивает количество оценок на единицу и дает новую среднюю оценку $\frac{S+3+5}{n+1} = \frac{S+8}{n+1}$.

Рассмотрим разность новой и старой оценок

$$\frac{S+8}{n+1} - \frac{S+4}{n} = \frac{4n-4-S}{n(n+1)} = \frac{4n-4-3,5n+4}{n(n+1)} = \frac{0,5n}{n(n+1)}.$$

Для всех натуральных n разность $\frac{0,5n}{n(n+1)} > 0$. Следовательно, средняя оценка Пети увеличилась после замены.

Заключение

Проведенная в ноябре 2015 года на физико-математическом факультете Камчатского государственного университета имени Витуса Беринга математическая олимпиада преследовала, в основном, профориентационные цели и была ориентирована на потенциальных абитуриентов. Победитель, призеры и участники олимпиады в случае поступления в этот университет получают дополнительные баллы к балам ЕГЭ по профильной математике.

Авторы надеются, что представленные задачи и их решения дадут возможность школьникам старших классов ознакомиться с уровнем и тематикой олимпиадных заданий, а преподаватели математики смогут использовать их для подготовки школьников к олимпиаде по математике.

Библиографический список

1. 34-й Турнир имени М. В. Ломоносова 25 сентября 2011 года. Задания. Решения. Комментарии. М.: МЦНМО, 2013. 197 с.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 19.11.2015