Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

A. G. Nalimov, V. V. Kotlyar, Yu. V. Khanenko, Calculation of the intensity at the sharp focus of a cylindrical vector beam by three methods,
Computer Optics, 2023, Volume 47, Issue 5, 734–741

https://www.mathnet.ru/eng/co1174

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.14.82
January 21, 2026, 08:56:08

Расчет тремя методами интенсивности цилиндрического векторного пучка в остром фокусе

А.Г. Налимов [1,2], В.В. Котляр [1,2], Ю.В. Ханенко [1]
[1] ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН,
443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 151;
[2] Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва,
443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, д. 34

Аннотация

В работе проводится сравнение расчета поля дифракции в остром фокусе тремя непараксиальными методами: методом конечных разностей во временной области (FDTD-метод), интегралом Рэлея–Зоммерфельда и преобразованием Ричардса–Вольфа при векторном цилиндрическом начальном поле. Преобразование Ричардса–Вольфа использовалось с двумя функциями аподизации выходного зрачка – для сферической и тонкой дифракционной линз. Результаты показали, что при существенной экономии времени расчета с помощью интегралов Рэлея–Зоммерфельда и Ричардса–Вольфа при задании обоих поперечных компонент поля можно получать результаты со среднеквадратичным отклонением от FDTD-метода всего 2 %. Причем при сверхкоротком фокусном расстоянии (менее 1,6…2,6 мкм для длины волны 633 нм) более точным оказывается преобразование Ричардса–Вольфа, а при удалении от начальной плоскости и вне фокальной плоскости более точным является интеграл Рэлея–Зоммерфельда.

Ключевые слова: векторный пучок, острая фокусировка, интеграл Рэлея–Зоммерфельда, преобразование Ричардса–Вольфа, FDTD-метод.

Цитирование: **Налимов, А.Г.** Расчет тремя методами интенсивности цилиндрического векторного пучка в остром фокусе / А.Г. Налимов, В.В. Котляр, Ю.В. Ханенко // Компьютерная оптика. – 2023. – Т. 47, № 5. – С. 734-741. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1346.

Citation: Nalimov AG, Kotlyar VV, Khanenko YV. Calculation of the intensity at the sharp focus of a cylindrical vector beam by three methods. Computer Optics 2023; 47(5): 734-741. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1346.

Введение

Скалярная теория дифракции позволяет рассчитать распространение когерентного света в пространстве [1, 2]. Для расчета распространения света в свободном пространстве в параксиальном приближении можно использовать преобразование Френеля. Если его выполнить с помощью алгоритма быстрого преобразования Фурье, то это существенно уменьшит время расчета. Для ускорения расчетов также было разработано неоднородное быстрое преобразование Фурье, которое позволяет масштабировать результирующее поле [3, 4]. Однако в большинстве задач расчета дифракции света параксиального приближения недостаточно. Точный численный расчет распространения света необходим во многих исследованиях в оптике – в цифровой голографии [5], формировании нужного распределения интенсивности пучка [6, 7], создании оптического пинцета для задач генной инженерии [8], моделирования работы дифракционных оптических элементов [9], металинз [10], оптических резонаторов [11] и т.д. В этом случае целесообразно использовать, например, метод конечных элементов (МКЭ) [12, 13], метод граничных элементов (МГЭ) [14, 15], метод конечных разностей во временной области (FDTD-метод) [16 – 18], различные интегральные методы расчета распространения света, такие как интеграл Рэлея–Зоммерфельда [19, 20], методы разложения по плоским волнам [21], в том числе с различными модификациями – с ограничением полосы [22], широкодиапазонные [23, 24], преобразование Ричардса–Вольфа [25] и др. С помощью МКЭ или МГЭ можно рассчитать стационарное поле дифракции, однако эти методы для работы требуют весьма большого объема оперативной памяти и процессорного времени. FDTD является одним из самых быстрых и универсальных численных методов. С помощью FDTD можно рассчитывать распространение света как в свободном пространстве, так и в различных оптических объектах. Однако, если появляется задача расчета распространения света в свободном пространстве в непараксиальной области, метод FDTD, хотя и подходит, является весьма затратным по ресурсам и часто избыточным. Интегральные методы расчета, такие как интеграл Рэлея–Зоммерфельда и преобразование Ричардса–Вольфа, могут справиться с такой задачей при потреблении намного меньшего количества ресурсов – процессорного времени и памяти. Оба эти метода подходят для непараксиальных расчетов. Из-за относительно невысокой скорости расчета с помощью FDTD-метода, но возможности промоделировать с помощью него рас-

пространение света через оптические объекты, часто он и интеграл Рэлея–Зоммерфельда используются совместно, для сверки результатов вычислений [26] или как комбинированный метод расчета [27, 28].

В данной работе рассматривается возможность использования интеграла Рэлея–Зоммерфельда и преобразования Ричардса–Вольфа вместо метода FDTD для расчета фокусировки света. В качестве начального поля использовался Гауссов пучок и цилиндрический векторный пучок. Интерес к векторным пучкам связан с проявлением в них эффекта Холла – возможности разделения различных оптических вихрей с помощью устройств нанофотоники. В [29] уже было проведено сравнение нескольких методов расчета дифракции, и в том числе с применением интеграла Рэлея–Зоммерфельда. Однако авторы сравнивали поля лишь визуально, по совпадению профиля сечения амплитуды в плоскости расчета, без численной оценки точности и времени расчета. Причем за эталон расчета был принят интеграл Рэлея–Зоммерфельда, поскольку использовали его в дальней зоне. В работе [30] тоже проводилось сравнение использования интеграла Рэлея–Зоммерфельда с другими методами, но тоже в параксиальном случае. В данной работе сравнение проводится в плоскости острого фокуса и в то же время в ближней зоне, когда фокусное расстояние сравнимо с длиной волны.

1. Моделирование

Для сравнения результатов расчета распространения света интегралом Рэлея–Зоммерфельда и FDTD-методом был использован Гауссов пучок с радиусом $w = 3$ мкм и длиной волны $\lambda = 633$ мкм с азимутальной поляризацией второго порядка

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -\sin 2\varphi \\ \cos 2\varphi \end{pmatrix}$$

(рис. 1*а*). Данное поле относится к цилиндрическим векторным пучкам, которые используются для получения эффекта Холла [31]. Поскольку в преобразовании Рэлея–Зоммерфельда не учитывается наличие сферической лнизы, к полю была добавлена сферическая волна с радиусом, равным f (рис. 1*б*). Размер начального поля – 8×8 мкм, 200×200 отсчетов.

Интеграл Рэлея–Зоммерфельда для компонент поля E_x и E_y имеет вид [19]:

$$E_p(x, y, z > 0) = \\ = -\frac{z}{2\pi} \int\int_{u,v} E_p(u, v, 0) \frac{\exp(ikL)}{L^2} \left(ik - \frac{1}{L} \right) dudv, \quad (1)$$

где p – проекция x или y, $L = \sqrt{(u-x)^2 + (v-y)^2 + z^2}$, z – продольная координата, k – волновое число света для длины волны λ. Компоненту поля E_z можно вычислить на основании начальных поперечных компонент поля E_x и E_y:

$$E_z(x, y, z > 0) = \\ = \frac{1}{2\pi} \int\int_{u,v} \left[E_x(u, v, 0)(u - x) + E_y(u, v, 0)(v - y) \right] \times \quad (2) \\ \times \frac{\exp(ikL)}{L^2} \left(ik - \frac{1}{L} \right) dudv.$$

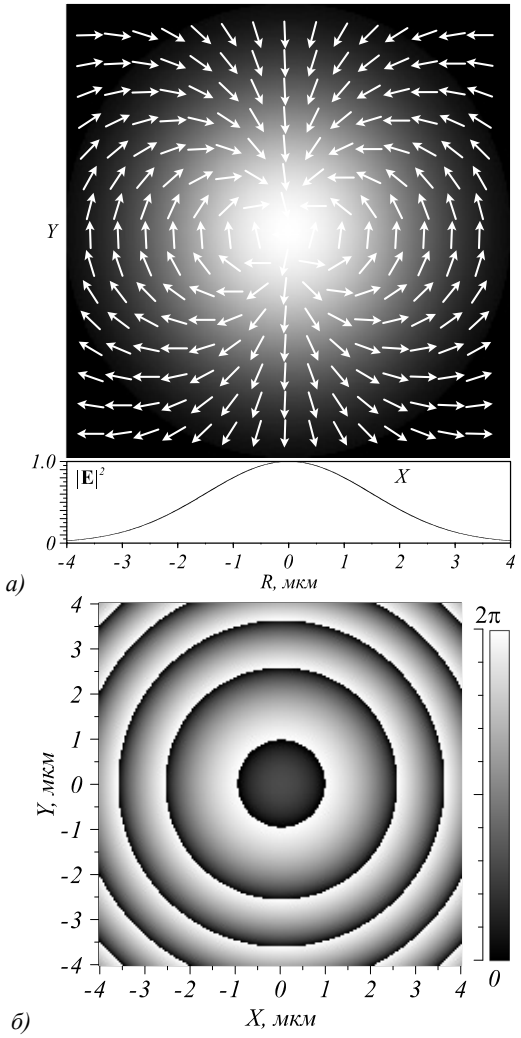

Рис. 1. Интенсивность, поляризация начального поля (а) и его фаза (б)

В отличие от FDTD-метода интеграл Рэлея–Зоммерфельда можно вычислять параллельно с минимальными накладными расходами. Возможности к распараллеливанию расчета между процессорами или между узлами суперкомпьютера самим методом не ограничены. Расчет двумерного интеграла сводится к написанию 4 вложенных друг в друга циклов, что накладывает ограничение на возможность увеличения площади расчета (при увеличении линейных размеров входного и выходного поля в 2 раза время расчета увеличивается в 16 раз), однако при прочих равных условиях данный метод намного быстрее FDTD-метода. Ниже в работе даны оценки времени его работы.

На рис. 2 представлены результаты расчета интенсивности $|\mathbf{E}|^2$ вектора напряженности электрического

поля **E** в плоскости фокуса на расстоянии $f = 4$ мкм от начальной плоскости и интенсивности его компонент с помощью метода FDTD (на вставках), и их сечения, полученные с помощью интеграла Рэлея–Зоммерфельда и FDTD-метода. Аналогичные двумерные распределения интенсивности, полученные с помощью интеграла Рэлея–Зоммерфельда, не приводятся, так как они визуально неотличимы. Для сравнения графиков сечений интенсивности приводится их среднеквадратичное отклонение (СКО) между собой. СКО рассчитывалось по формуле:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(I_{1i} - I_{2i}\right)^2}, \tag{3}$$

где I_1, I_2 – интенсивности, полученные с помощью разных методов расчета, N – количество отсчетов.

Сечения интенсивностей на рис. 2 нормированы на единицу для корректного расчета СКО. Максимальный вклад в интенсивность дает компонента E_y. СКО двух методов расчета между собой не превышает 0,025. На других проекциях СКО еще меньше и равно 0,0046 для E_x, 0,0074 для E_z. Расчет всех компонент поля методом FDTD в программе FullWave занял 1 час 13 минут. При этом сетка разбиения вдоль всех трех координат была взята $\lambda/30$, рассчитывалось поле в области 8,2×8,2×5 мкм. Моделирование проводилось на временном отрезке $cT = 15$ мкм, где c – скорость света в вакууме. Расчет с помощью интеграла Рэлея–Зоммерфельда так же всех трех проекций поля **E** занял приблизительно 0,7 секунды, входное и выходное поля имели размерность 200×200 отсчетов. Расчет производился на сервере с двумя ЦП Intel Xeon E5-2699 V4 2,2 GHz, каждый из которых содержит 22 ядра. Преобразование FDTD рассчитывалось параллельно на 8 потоках. Использование большего количества потоков не дает прироста в скорости из-за роста накладных расходов. Интеграл Рэлея–Зоммерфельда рассчитывался с помощью всех 44 ядер, накладные расходы в параллельных вычислениях при его расчете близки к нулю.

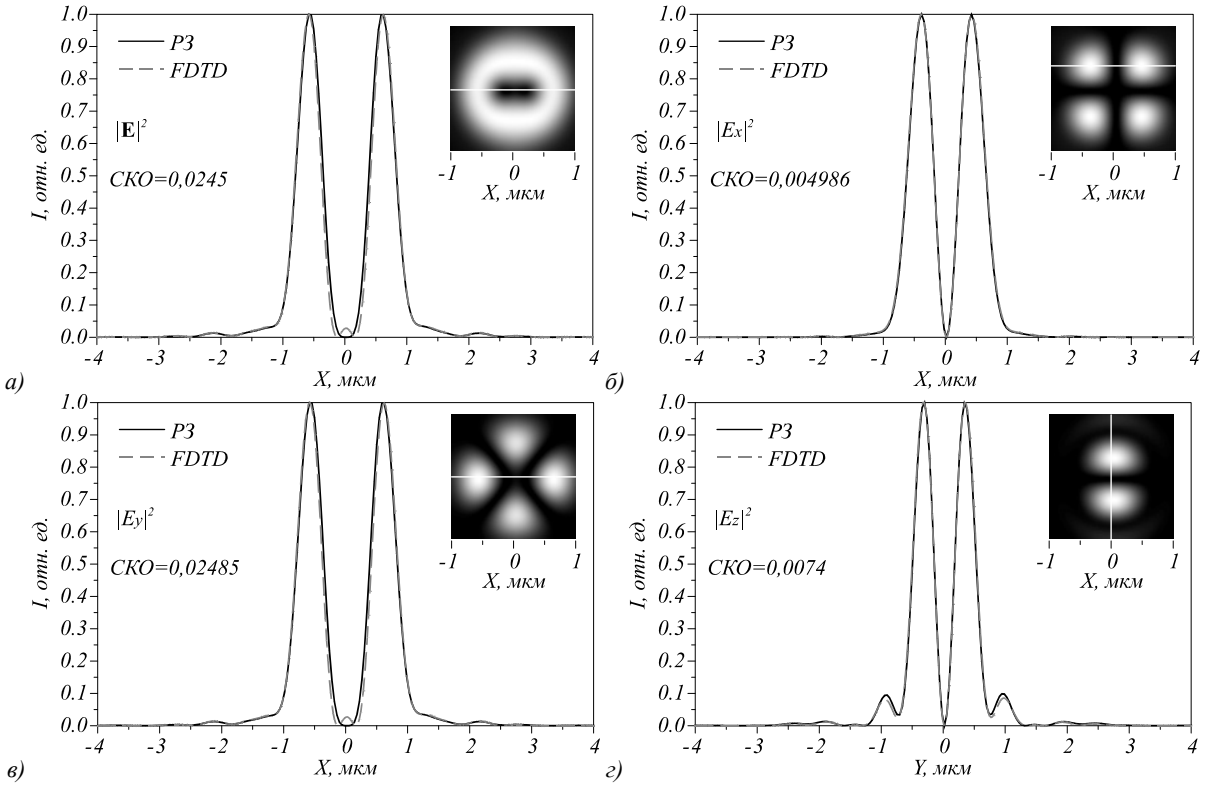

*Рис. 2. Сечение интенсивности **E** (а) и отдельно компонент E_x, E_y, E_z (б – г) вдоль оси X, y = 0 (а, в) и y = 0,422 (б), и вдоль оси y (г), x = 0. Черный непрерывный график – расчет интегралом Рэлея–Зоммерфельда (РЗ), серый пунктирный – FDTD. На вставках приведены распределения интенсивности размером 2×2 мкм в центре поля, графики сечений интенсивности строились вдоль белой линии на вставках*

В данном примере была рассчитана фокусировка поля **E**, имеющего две компоненты в начальной плоскости – E_x и E_y. Поскольку поле рассчитывалось в фокусной плоскости, подобный расчет можно произвести и с помощью преобразования Ричардса–Вольфа. Данное преобразование позволяет рассчитать поле вблизи фокуса идеальной широкоапертурной оптической системы [25]:

$$\mathbf{U}(\rho,\psi,z) = -\frac{if}{\lambda}\int_0^{\alpha}\int_0^{2\pi} B(\theta,\varphi)T(\theta)\mathbf{P}(\theta,\varphi)\times \\ \times\exp\left(ik\left(\rho\sin\theta\cos(\varphi-\psi)+z\cos\theta\right)\right)\sin\theta d\theta d\varphi, \tag{4}$$

где $\mathbf{U}(\rho,\psi,z)$ – выходное электрическое поле на расстоянии z от фокусной плоскости, f – фокусное расстояние, λ – длина волны, $T(\theta)$ – функция аподизации

линзы, θ, φ – полярный и азимутальный углы, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число, α – максимальный полярный угол, определяемый числовой апертурой линзы (NA = sin α). $B(\theta, \varphi)$ – представляет собой амплитуду входного электрического поля в координатах θ и φ, **P**(θ, φ) представляет собой вектор поляризации, различный для компонент E_x, E_y, E_z:

$$P(\theta,\varphi) = \begin{bmatrix} 1+\cos^2\varphi(\cos\theta-1) \\ \sin\varphi\cos\varphi(\cos\theta-1) \\ -\sin\theta\cos\varphi \end{bmatrix} a(\theta,\varphi) + \begin{bmatrix} \sin\varphi\cos\varphi(\cos\theta-1) \\ 1+\sin^2\varphi(\cos\theta-1) \\ -\sin\theta\sin\varphi \end{bmatrix} b(\theta,\varphi), \quad (5)$$

где $a(\theta,\varphi) = E_x(\theta,\varphi)$, $b(\theta,\varphi) = E_y(\theta,\varphi)$ – начальное поле, падающее на оптическую систему, в координатах выходного зрачка. Данное преобразование можно рассчитывать в двух вариантах аподизации выходного зрачка: $T(\theta) = \sqrt{\cos\theta}$, что актуально для расчета поля после сферической линзы, и $T(\theta) = \cos^{-(3/2)}\theta$ для фокусировки света с помощью тонкой дифракционной линзы (рис. 3). Для расчета распространения поля, изображенного на рис. 1, из него необходимо убрать сферическую функцию, так как преобразование Ричардса–Вольфа уже предполагает прохождение света через оптическую систему. В данном преобразовании примем $f = 4$ мкм, $z = 0$ (плоскость фокуса).

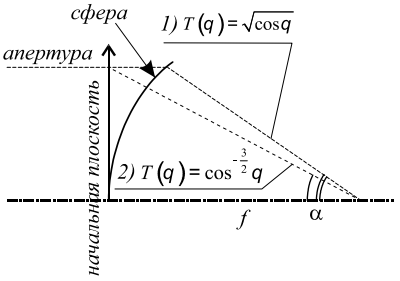

Рис. 3. Аподизация выходного зрачка в случае сферической рефракционной линзы 1) и тонкой дифракционной линзы 2)

На рис. 4 приведены сечения интенсивности вектора **E** и компонент E_x, E_y, E_z, рассчитанные методом FDTD и преобразованием Ричардса–Вольфа для обеих функций аподизации $T(\theta)$. Расчет всех трех проекций электрического вектора **E** занял 3 секунды. Использовались также все доступные 44 ядра, при этом входное и выходное поля также имели размер 200×200 отсчетов.

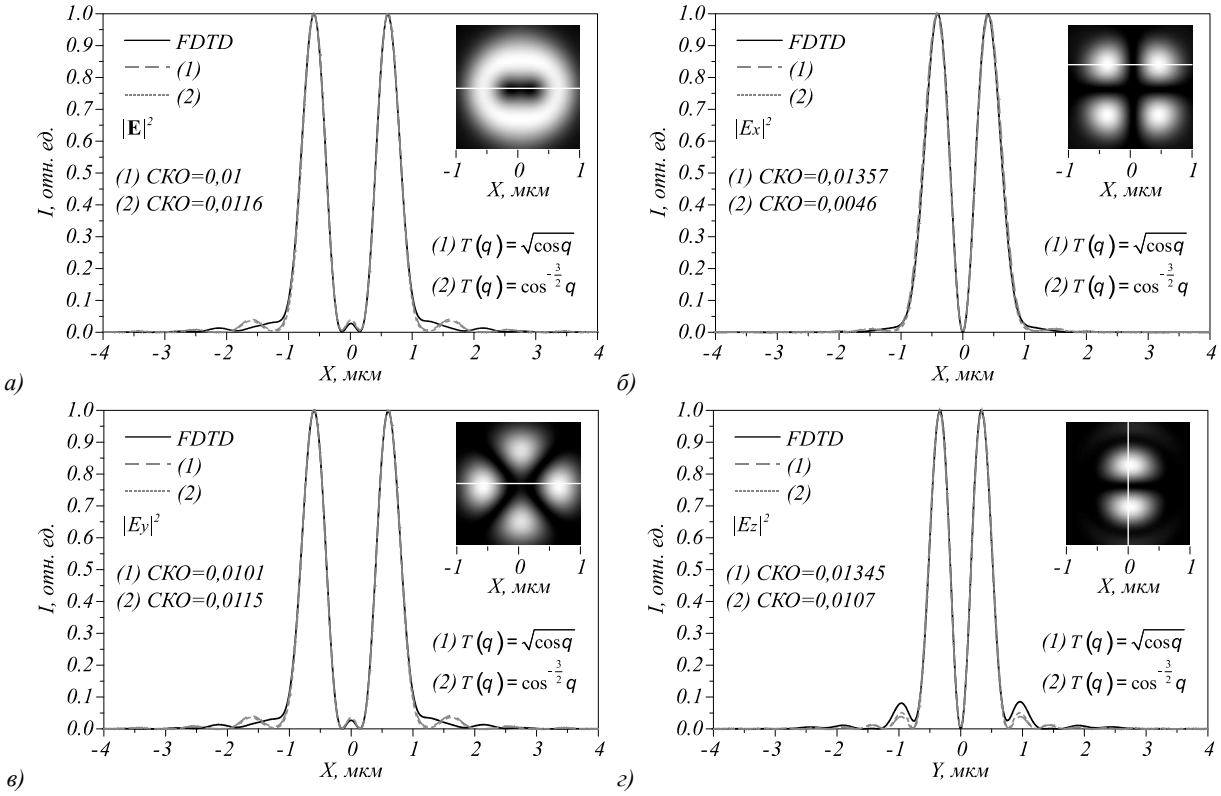

*Рис. 4. Сечение интенсивности поля **E** (а) и отдельно компонент E_x, E_y, E_z (б – г) вдоль оси X, y = 0 (а, в) и y = 0,422 (б) и вдоль оси y (г), x = 0. Черный график – метод FDTD, серый график – преобразование Ричардса–Вольфа. График с длинным пунктиром – функция аподизации для сферической линзы $T(\theta) = \sqrt{\cos\theta}$, с коротким пунктиром – функция аподизации $T(\theta) = \cos^{-(3/2)}\theta$*

При данных начальных параметрах использование функции аподизации для сферической рефракционной линзы дало большее совпадение с FDTD-методом, примерно на 10 %, чем с функцией аподизации для тонкой линзы. Также видно, что результат, полученный с помощью преобразования Ричардса–Вольфа, ближе аппроксимирует результат расчета с помощью FDTD-метода. Наихудшее СКО сечения интенсивности равно 0,0116, в то время как при расчете интегралом Рэлея–Зоммерфельда оно было 0,0245. Наилучшее СКО получилось в случае компоненты E_x и аподизации для тонкой линзы: СКО = 0,0046 – в этом случае боковые лепестки практически отсутствуют, а наибольшее отличие от FDTD-метода заметно в них, что видно из рис. 4*а*,*в*,*г*. Также можно заметить, что в случае интеграла Рэлея–Зоммерфельда наибольшее различие в расчетах находится ближе к оптической оси, в то время как результат расчета преобразования Ричардса–Вольфа больше всего различается с результатом FDTD в боковых лепестках. Например, в интенсивности, полученной с помощью FDTD-метода и преобразования Ричардса–Вольфа на оптической оси, есть небольшой пик (рис. 4*а*), которого нет в результатах интеграла Рэлея–Зоммерфельда (рис. 2*а*).

Проекции E_x, E_y с помощью интеграла Рэлея–Зоммерфельда рассчитываются на основании проекций полей в начальной плоскости, без учета друг друга. То есть если в начальной плоскости задана только проекция E_x, $E_y = E_z = 0$, в выходной плоскости можно рассчитать проекции E_x и E_z, а поле E_y останется равным нулю. Однако при сходящемся волновом фронте за счет того, что проекция E_x располагается под углом к обеим координатным осям (например, из точки $x, y \neq 0$, $z = 0$ в точку $x = y = 0$, $z = f$), в выходной плоскости будут присутствовать все три компоненты, включая E_y. Это учитывается в методе FDTD и преобразовании Ричардса–Вольфа, с помощью которых можно получить все три компоненты поля, включая E_y. Например, если рассчитать распространение Гауссова пучка, заданного проекцией поля E_x ($E_y = 0$) с радиусом $w = 3$ мкм, ограниченного апертурой радиусом 4 мкм, с тем же фокусным расстоянием $f = 4$ мкм, то в фокусной плоскости мы получим ненулевую компоненту E_y при расчете с помощью FDTD-метода и преобразованием Ричардса–Вольфа. СКО, рассчитанное по интенсивности проекции E_y по сечению вдоль оси X при $y = 0{,}32$ мкм, равно 0,002 (рис. 5). В данном примере была использована аподизация выходного зрачка для случая тонкой линзы, так как СКО в этом случае получается меньше (0,002 против 0,005).

Если необходимо рассчитывать поля на фокусном расстоянии некоторой оптической системы, то интеграл Рэлея–Зоммерфельда и преобразование Ричардса–Вольфа дают очень близкий результат, если в начальной плоскости существуют обе поперечные проекции электрического поля E_x и E_y. На рис. 6 показана зависимость СКО интенсивности $|\mathbf{E}|^2$ от величины фокусного расстояния f и числовой апертуры NA для начального поля, содержащего Гауссов пучок с тем же радиусом $w = 3$ мкм и левой круговой поляризацией. Поле рассчитывалось в фокусной плоскости, фокусное расстояние f менялось в диапазоне от 0,75 до 4 мкм с шагом 0,25 мкм. За эталон бралась интенсивность, полученная с помощью FDTD-метода, далее рассчитывалось СКО между ней и результатом преобразования Ричардса–Вольфа и интеграла Рэлея–Зоммерфельда. Использовались обе функции аподизации в расчете преобразования Ричардса–Вольфа.

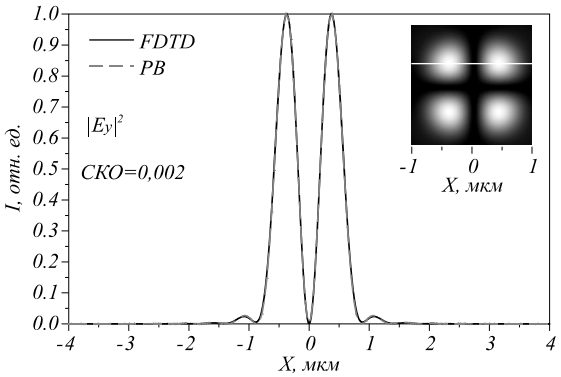

Рис. 5. Интенсивность проекции E_y, появившейся при расчете с помощью метода FDTD (на вставке) и сравнение сечений интенсивности этой компоненты, рассчитанной методом FDTD и с помощью преобразования Ричардса–Вольфа (PB). Начальная интенсивность поля E_y равна нулю. Функция аподизации была выбрана для случая тонкой линзы ($T(\theta) = cos^{-(3/2)}\theta$)

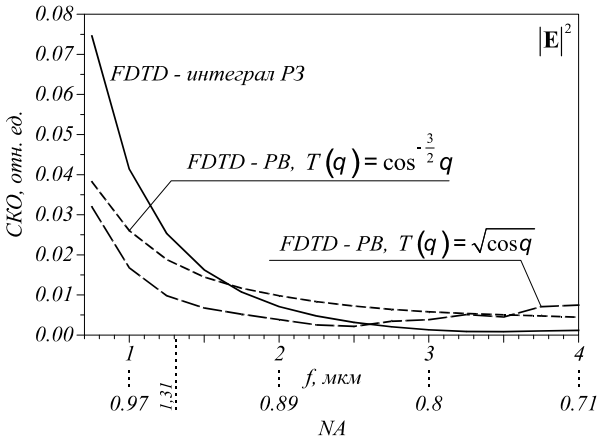

Рис. 6. Зависимость СКО между интенсивностями, полученными с помощью FDTD-метода и преобразования Ричардса–Вольфа, интеграла Рэлея–Зоммерфельда от фокусного расстояния f. Падающее поле – Гауссов пучок с радиусом w = 3 мкм с круговой поляризацией, ограниченный апертурой R = 4 мкм

Из рис. 6 можно сделать вывод, что вблизи начального поля ($NA > 0{,}97$) преобразование Ричардса–Вольфа дает более точный результат при любой функции аподизации, с ростом расстояния интеграл Рэлея–Зоммерфельда в результатах начинает при-

ближаться к FDTD-методу. Это согласуется с тем, что интеграл Рэлея–Зоммерфельда не учитывает вклад одной поперечной проекции поля в другой, что проявляется больше всего при наиболее острой фокусировке света. В данном расчете в преобразовании Ричардса–Вольфа (4) менялось значение f, то есть распространение света рассчитывалась все время в фокусе оптической системы ($z = 0$).

Если же рассчитывать поле на расстоянии L от начальной плоскости, отличном от f, то результаты будут иными (рис. 7). Остальные параметры расчета те же: $f = 4$ мкм, $w = 3$ мкм, все поле – 8×8 мкм, в преобразовании Ричардса–Вольфа (4) было принято $z = L - f$, в интеграле Зоммерфельда (1) $z = L$.

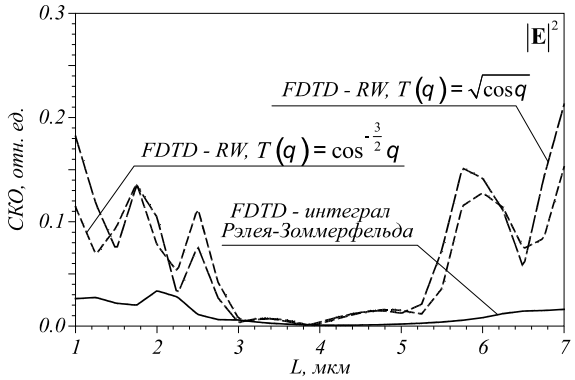

Рис. 7. Зависимость СКО между интенсивностями, полученными FDTD-методом и преобразованием Ричардса–Вольфа, интегралом Рэлея–Зоммерфельда от расстояния наблюдения L, f = 4 мкм. Падающее поле – Гауссов пучок с радиусом w = 3 мкм и с круговой поляризацией, ограниченный апертурой R = 4 мкм

Результат, полученный с помощью преобразования Ричардса–Вольфа, близок к результату, рассчитанному с помощью FDTD и интеграла Рэлея–Зоммерфельда только в области от $3 < L < 5{,}2$ мкм. При этом все результаты дают наименьшее СКО при приближении к фокусу, так как на большей части поля интенсивность близка к нулю. Когда расстояние z при расчете преобразованием Ричардса–Вольфа превышает четверть фокусного расстояния (в данном примере это смещение на 1…1,2 мкм от фокусной плоскости), его точность падает (СКО > 0,05).

2. Обсуждение результатов

Поскольку в FDTD-методе нет никаких приближений, связанных с дистанцией расчета и фокусным расстоянием оптической системы, оно выигрывает у методов, использующих различные приближения. Однако время расчета аналогичной задачи в часы против секунд может сделать его использование неоптимальным. Как показало моделирование, в случае, если заданы обе поперечные проекции начального поля, целесообразно использовать преобразование Рэлея–Зоммерфельда как по скорости расчета, так и по точности. СКО его результатов расчета от метода FDTD находятся на минимальных значениях (СКО < 0,03). Однако бывают случаи, когда его использование нецелесообразно: если начальное поле имеет только одну проекцию, но необходимо получить все результирующие проекции светового поля, или расчет производится вплотную к начальной плоскости на ультракоротком фокусном расстоянии (расстояние расчета меньше или намного меньше размера начального поля, в данной работе это менее 2 мкм). В ближней зоне ($z < w$) точность расчета интегралом РЗ уступает преобразованию Ричардса–Вольфа, если говорить о расчете поля в фокусе оптической системы. Однако по мере удаления от фокусной плоскости точность преобразования Ричардса–Вольфа падает, например, при удалении от фокусной плоскости на f/4…f/3 СКО растет вплоть до значений 0,1…0,15. При расчете поля с помощью преобразования Ричардса–Вольфа лучшие результаты показала аподизация выходного зрачка для сферической линзы, однако аподизация для тонкой линзы уступает не сильно – разница в результатах СКО в фокусе примерно от 0,001 до 0,009 (рис. 4), около 0,004 (рис. 7), а где-то выигрывает (рис. 5). За фокусной плоскостью немного лучше показала себя аподизация для случая рефракционной линзы (рис. 7), до фокусной плоскости – аподизация для тонкой линзы. Это справедливо для областей, где СКО между преобразованием Ричардса–Вольфа и результатом FDTD-метода расчета превышает значение 0,01. Интеграл Рэлея–Зоммерфельда из рассмотренных является самым быстрым методом. Расчет полей с разрешением 200×200 отсчетов в начальной и конечной плоскостях занял менее одной секунды без модификаций этого интеграла под быстрые преобразования. Преобразование Ричардса–Вольфа при различных параметрах может потребовать в 2 – 5 раз больше времени. Чтобы с помощью метода FDTD получать точные результаты, необходимо, чтобы световая волна прошла через все компоненты оптики достаточное количество периодов. Но на это уходит на порядки большее время. Кроме того, в методе FDTD от сетки разбиения зависит и точность, что применительно к интегралу Рэлея–Зоммерфельда или преобразованию Ричардса–Вольфа не всегда так – медленно меняющиеся функции (например, Гауссов пучок) в начальном поле можно аппроксимировать более грубой сеткой без ущерба для точности расчета. Время расчета особенно важно, когда нужно рассчитать график какой-либо величины, каждая точка которого получается на основании анализа результатов расчета поля одним или несколькими методами (например, рис. 6, 7). В этом случае для получения подобного графика с помощью FDTD может потребоваться сутки и более времени работы компьютера, даже при запуске до 6 потоков с расчетами одновременно.

Заключение

В работе проведено сравнение расчета поля дифракции в остром фокусе тремя непараксиальными методами: FDTD, интегралом Рэлея–Зорммерфельда и преобразованием Ричардса–Вольфа. В качестве начального поля был взят векторный пучок с азимутальной поляризацией второго порядка и простой Гауссов пучок. Из расчетов видно, что в области острого фокуса можно использовать как интеграл Рэлея–Зоммерфельда, так и преобразование Ричардса–Вольфа, если заданы обе поперечные проекции электрического вектора **E** начального поля. При этом точность интеграла Рэлея–Зоммерфельда при числовой апертуре 0,93 и менее (фокусное расстоянии до 1,5…2 мкм в данной работе) уступает преобразованию Ричардса–Вольфа. Однако если необходимо рассчитать поле на некотором удалении от фокусной плоскости, то ситуация другая. При числовой апертуре 0,71 (фокусное расстояние 4 мкм) на удалении от фокуса до 1…1,2 мкм оба интегральных метода дают удовлетворительную точность, СКО не превышает 0,02. Но если рассчитывать поле с б*о*льшим смещением от фокусной плоскости, то точность расчета преобразованием Ричардса–Вольфа резко падает, СКО поднимается до значений 0,1…0,15 и более, то есть при таких смещениях можно использовать только интеграл Рэлея–Зоммерфельда. При этом оба интегральных метода существенно экономят время расчета – вместо часа расчет при тех же параметрах занял 0,7 секунды для интеграла Рэлея–Зоммерфельда и 3 секунды для преобразования Ричардса–Вольфа, при этом размер начальных и выходных полей был 200×200 отсчетов.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант 23-12-00236) в частях «Моделирование», «Обсуждение результатов», а также при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках выполнения работ по Государственному заданию ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН в частях «Введение», «Заключение».

References

[1] Goodman JW. Introduction to Fourier optics. 3rd ed. Greenwood Village: Roberts & Company Publishers; 2005. ISBN: 0-9747077-2-4.

[2] Ersoy OK. Diffraction, Fourier optics and imaging. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons Inc; 2007. ISBN: 978-0-471-23816-4.

[3] Lee J-Y, Greengard L. The type 3 nonuniform FFT and its applications. J Comput Phys 2005; 206(1): 1-5. DOI: 10.1016/j.jcp.2004.12.004.

[4] Greengard L, Lee JY. Accelerating the nonuniform fast Fourier transform. SIAM Rev 2004; 46: 443-454. DOI: 10.1137/S003614450343200X.

[5] Long J, Cai P, Liu C, Qu W, Yan H. Aperture synthesis based solely on phase images in digital holography. Chin Opt Lett 2021; 19(7): 070501. DOI: 10.1364/COL.19.070501.

[6] Xiao L, Qin Y, Tang X, Wan C, Li G, Zhong L. Beam shaping characteristics of an unstable-waveguide hybrid resonator. Appl Opt 2014; 53(10): 2213-2219. DOI: 10.1364/AO.53.002213.

[7] Wu C, Ko J, Rzasa JR, Paulson DA, Davis CC. Phase and amplitude beam shaping with two deformable mirrors implementing input plane and Fourier plane phase modifications. Appl Opt 2018; 57(9): 2337-2345. DOI: 10.1364/AO.57.002337.

[8] Skidanov RV, Rykov MA, Innacchione GS, Krivoshlykov SG. The modification of laser beam for optimization of optical trap force characteristics. Computer Optics 2012; 36(3): 377-386.

[9] Soifer VA, Kotlyar VV, Doskolovich LL. Diffractive optical elements in nanophotonics devices. Computer Optics 2009; 33(4): 352-368.

[10] Kotlyar VV, Nalimov AG, Stafeev SS, O'Faolain L, Kotlyar MV. Thin metalens with high numerical aperture. Computer Optics 2017; 41(1): 5-12. DOI: 10.18287/2412-6179-2017-41-1-5-12.

[11] Tu X, Wang Y, Guo Z, Chen Z, Huang T, Wu X, Luo W. Underwater acoustic wave detection based on packaged optical microbubble resonator. J Lightw Technol 2022; 40(18): 6272-6279. DOI: 10.1109/JLT.2022.3187960.

[12] Tsuji Y, Koshiba M. Finite element method using port truncation by perfectly matched layer boundary conditions for optical waveguide discontinuity problems. J Lightw Technol 2002; 20(3): 463-468. DOI: 10.1109/50.988995.

[13] Koshiba M. Optical waveguide theory by the finite element method. Tokyo: KTK Scientific; 1992: 43-47.

[14] Bendickson JM, Glytsis EN, Gaylord TK. Scalar integral diffraction methods: unification, accuracy, and comparison with a rigorous boundary element method with application to diffractive cylindrical lenses. J Opt Soc Am A 1998; 15(7): 1822-1837. DOI: 10.1364/JOSAA.15.001822.

[15] Kojima T, Ido J. Boundary-element method analysis of light-beam scattering and the sum and differential signal output by DRAW-type optical disk models. Electron Commun Jpn Pt 2 Electron 1991; 74(5): 11-20. DOI: 10.1002/ecjb.4420740502.

[16] Hirayama K, Glytsis EN, Gaylord TK. Rigorous electromagnetic analysis of diffractive cylindrical lenses. J Opt Soc Am A 1996; 13: 2219-2231. DOI: 10.1364/JOSAA.13.002219.

[17] Yee KS. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media. IEEE Trans Antennas Propag 1966; AP-14(3): 302-307. DOI: 10.1109/TAP.1966.1138693.

[18] Taflove A, Hagness SC. Computational electrodynamics: the finite-difference time-domain method. Norwood, MA: Artech House; 2000.

[19] Sommerfeld, A. Lectures on theoretical physics. New York: Academic Press; 1954: 361-373.

[20] Khonina SN, Kharitonov SI. Analogue of Rayleigh-Sommerfeld integral for anisotropic and gyrotropic media. Computer Optics 2012; 36(2): 172-182.

[21] Goodman JW. Introduction to Fourier optics. 2nd ed. McGraw-Hill; 1996.

[22] Matsushima K, Shimobaba T. Band-limited angular spectrum method for numerical simulation of free-space propagation in far and near fields. Opt Express 2009; 17: 19662-19673. DOI: 10.1364/OE.17.019662.

[23] Kim Y-H, Byun C-W, Oh H, Lee J, Pi J-Y, Kim GH, Lee M-L, Ryu H, Chu H-Y, Hwang C-S. Non-uniform sampling and wide range angular spectrum method. J Opt 2014; 16(2): 125710. DOI: 10.1088/2040-8978/16/12/125710.

[24] Zhang W, Zhang H, Jin G. Band-extended angular spectrum method for accurate diffraction calculation in a wide propagation range. Opt Lett 2020; 45(6): 1543-1546. DOI: 10.1364/OL.385553.
[25] Richards B, Wolf E. Electromagnetic diffraction in optical systems, II. Structure of the image field in an aplanatic system. Proc R Soc Lond A 1959; 253: 358-379. DOI: 10.1098/rspa.1959.0200.
[26] Siraji AA, Zhao Y. Design and analysis of thin optical lens composed of low-index subwavelength structures. Appl Opt 2019; 58(17): 4654-4664. DOI: 10.1364/AO.58.004654.
[27] Yin S, Zhou C, Luo X, Du C. Imaging by a subwavelength metallic lens with large field of view. Opt Express 2008; 16(4): 2578-2583. DOI: 10.1364/OE.16.002578.
[28] Stafeev SS, Nalimov AG, Kotlyar MV, O'Faolain L. A four-zone reflective azimuthal micropolarizer. Computer Optics 2015; 39(5): 709-715. DOI: 10.18287/0134-2452-2015-39-5-709-715.
[29] Zhang W, Zhang, Sheppard CJR, Jin G. Analysis of numerical diffraction calculation methods: from the perspective of phase space optics and the sampling theorem. J Opt Soc Am A 2020; 37(11): 1748-1766. DOI: 10.1364/JOSAA.401908.
[30] Nalimov AG, Khonina SN. Comparison of simulation methods of X-ray propagation through DOE in paraxial area. Izvestia of Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences 2010; 12(4): 26-31.
[31] Kovalev AA, Kotlyar VV. Spin Hall effect of double-index cylindrical vector beams in a tight focus. Micromachines 2023; 14(2): 494. DOI: 10.3390/mi14020494.

Сведения об авторах

Налимов Антон Геннадьевич, 1980 года рождения, окончил Самарский государственный аэрокосмический университет в феврале 2003 года по специальности «Физика». Поступил в очную аспирантуру СГАУ по специальности 05.13.18 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» в 2003 году, окончил её по специальности 01.04.05 «Оптика» в 2006 году. Работает на кафедре технической кибернетики в Самарском университете в должности доцента, в ИСОИ РАН – филиале ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН в должности научного сотрудника. Кандидат физико-математических наук, соавтор 140 работ и 3 патентов. E-mail: *anton@ipsiras.ru* .

Сведения об авторе **Котляр Виктор Викторович** –см. стр 715 этого номера.

Ханенко Юрий Владимирович, 1999 года рождения, окончил Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва в 2021 году по специальности «Конструирование и технология электронных средств». Работает в Самарском университете в научно-исследовательской лаборатории автоматизированных систем научных исследований в должности старшего лаборанта, в ИСОИ РАН – филиале ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН в должности инженера. E-mail: *khanenko.yuv@ssau.ru* .

ГРНТИ: 29.31.15
Поступила в редакцию 16 мая 2023 г. Окончательный вариант – 31 мая 2023 г.

Calculation of the intensity at the sharp focus of a cylindrical vector beam by three methods

A.G. Nalimov [1,2], V.V. Kotlyar [1,2], Yu.V. Khanenko [1,2]
[1] IPSI RAS – Branch of the FSRC "Crystallography and Photonics" RAS,
443001, Samara, Russia, Molodogvardeyskaya 151;
[2] Samara National Research University, 443086, Samara, Russia, Moskovskoye Shosse 34

Abstract

We conduct a comparative analysis of diffraction fields upon sharply focusing vortex and non-vortex incident beams, calculated using three non-paraxial methods. The methods employed are a finite difference time domain (FDTD) method, a Rayleigh–Sommerfeld integral, and a Richards–Wolf transformation. The Richards-Wolf transformation is used with two apodization functions of the exit pupil , for a spherical lens and a thin diffractive lens. The numerical simula-tion shows that the Rayleigh–Sommerfeld integral and the Richards-Wolf transformation can produce almost the same result and save time significantly. Meanwhile, the root-mean-square de-viation of the results of both methods from the FDTD method can be as low as 2 %. If an ultra-short focal length is used, the Richards-Wolf transformation is found to be more accurate, where-as with increasing distance from the initial plane and outside the focal plane, the Rayleigh-Sommerfeld integral is more accurate.

Keywords: vector beam, sharp focusing, Rayleigh-Sommerfeld integral, Richards-Wolf transformation.

Citation: Nalimov AG, Kotlyar VV, Khanenko Y.V. Calculation of the intensity at the sharp focus of a cylindrical vector beam by three methods. Computer Optics 2023; 47(5): 734-741. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1346.

Acknowledgements: The work was partly funded by the Russian Science Foundation under grant #23-12-00236 (Sec-tions "Numerical simulation", "Discussion") and the RF Ministry of Science and Higher Education within a state contract with the FSRC "Crystallography and Photonics" RAS (Sections "Introduc-tion", "Conclusion").

Authors' information

Anton Gennadyevich Nalimov (b. 1980), graduated from Samara State Aerospace University in February, 2003. Entered in postgraduate study in 2003 on speciality 05.13.18 "Mathematical modeling and program complexes", finished it in 2006 with speciality 01.04.05 "Optics". A.G. Nalimov works on Technical Cybernetics department in Samara National Research University as an associate professor, works as a scientist in the Image Processing Systems Institute of RAS – Branch of the FSRC "Crystallography and Photonics" RAS, Samara, Russia. Candidate in Physics and Mathematics, coauthor of 100 papers and 3 inventions. E-mail: *anton@ipsiras.ru* .

Victor Victorovich Kotlyar is a head of Laboratory at the Image Processing Systems Institute of RAS – Branch of the FSRC "Crystallography and Photonics" RAS and professor of Computer Science department at Samara National Research University. He received his MS, PhD and DrSc degrees in Physics and Mathematics from Samara State University (1979), Saratov State University (1988) and Moscow Central Design Institute of Unique Instrumentation, the Russian Academy of Sciences (1992). He is SPIE- and OSA-member. He is co-author of 300 scientific papers, 5 books and 7 inventions. His current interests are diffractive optics, gradient optics, nanophotonics, and optical vortices.
E-mail: *kotlyar@ipsiras.ru* .

Yuriy Vladimirovich Khanenko (b. 1999), graduated from Samara National Research University (short – Samara University) in 2021, majoring in Design and Technology of Radioelectronic Equipment. Currently works in Samara National Research University as a laboratory assistant, works as an engineer at the Image Processing Systems Institute of RAS – Branch of the FSRC "Crystallography and Photonics" RAS, Samara, Russia. E-mail: *khanenko.yuv@ssau.ru* .

Received May 16, 2023. The final version – May 31, 2023.