V. G. Drinfeld, Finitely additive measures on S^2 and S^3, invariant with respect to rotations,

Funktsional. Anal. i Prilozhen., 1984, Volume 18, Issue 3, 77

https://www.mathnet.ru/eng/faa1481

Функциональный анализ и его приложения,
1984, т. 18, вып. 3, 77.

УДК 517

КОНЕЧНО-АДДИТИВНЫЕ МЕРЫ НА S^2 И S^3, ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ВРАЩЕНИЙ

В. Г. Дринфельд

Мерой Рузевича на S^n назовем конечно-аддитивную $SO(n+1)$-инвариантную меру на σ-алгебре измеримых по Лебегу подмножеств S^n. С. Банах [3] доказал, что на S^1 существует мера Рузевича, не пропорциональная лебеговой мере. Г. А. Маргулис [4] и Д. Сулливан [5], используя один результат работы [7], доказали, что при $n \geqslant 4$ любая мера Рузевича на S^n пропорциональна лебеговой мере.

Теорема. *Любая мера Рузевича на S^2 и S^3 пропорциональна лебеговой мере.*

Доказательство. Пусть $n \in \{2, 3\}$, μ — мера Лебега на S^n. В работах [4, 5] показано, что если на S^n существует мера Рузевича, не пропорциональная μ, то для любой дискретной группы Γ и любого гомоморфизма $\varphi\colon \Gamma \to SO(n+1)$ соответствующее представление Γ в пространстве $L_0^2(S^n, \mu) \overset{\text{def}}{=} \left\{f \in L^2(S^n, \mu) \,\middle|\, \int\limits_{x \in S^n} f(x)\, d\mu = 0\right\}$ слабо содержит единичное представление. Положим $\Gamma = D^*$, где D — тело кватернионов над $\mathbf{Q}$ такое, что $D \otimes \mathbf{R} = \mathbf{H}$, а в качестве φ возьмем композицию $D^* \to (D \otimes \mathbf{R})^*/\mathbf{R}_+^* \simeq SU(2) \xrightarrow{\psi} SO(n+1)$, где $\mathbf{R}_+^* = \{x \in \mathbf{R}^* \mid x > 0\}$, ψ — гомоморфизм, превращающий S^n в однородное пространство группы $SU(2)$ (ψ существует, так как $n \in \{2, 3\}$). Если представление D^* в $L_0^2(S^n, \mu)$ слабо содержит единичное представление, то тем же свойством обладает представление ρ группы D^* в пространстве $L_0^2(SU(2))$. Так как D^* — решетка в $(D \otimes \mathbf{A}_f)^*$, то и индуцированное представление $\tilde\rho$ группы $(D \otimes \mathbf{A}_f)^*$ слабо содержит единичное представление. Пусть $X = (D \otimes \mathbf{A})^*/D^* \cdot \mathbf{R}_+^*$, σ — представление $(D \otimes \mathbf{A}_f)^*$ в пространстве V, состоящем из функций $f \in L^2(X)$ таких, что интегралы от f вдоль слоев отображения $\det\colon X \to \mathbf{A}_f^*/\mathbf{Q}_+^*$ равны 0. Тогда σ содержит $\tilde\rho$ и, следовательно, слабо содержит единичное представление.

Обозначим через Σ множество неприводимых унитарных представлений ω группы $GL(2, \mathbf{A})$, входящих в пространство параболических автоморфных форм и таких, что ω_∞ принадлежит дискретной серии. По теореме Жаке — Ленглендса ([2], теорема 14.4) каждому неприводимому представлению ω группы $(D \otimes \mathbf{A})^*$, входящему в V, соответствует представление $\pi' \in \Sigma$ такое, что $\pi'_p = \pi_p$, если $D \otimes \mathbf{Q}_p \simeq \mathrm{Mat}(2, \mathbf{Q}_p)$. Поэтому для любого p такого, что $D \otimes \mathbf{Q}_p \simeq \mathrm{Mat}(2, \mathbf{Q}_p)$, представление $\bigoplus\limits_{\omega \in \Sigma} \omega_p$ группы $GL(2, \mathbf{Q}_p)$ слабо содержит единичное представление. Следовательно, для любого p такого, что $D \otimes \mathbf{Q}_p \simeq \mathrm{Mat}(2, \mathbf{Q}_p)$, и любого $\varepsilon > 0$ существует $\omega \in \Sigma$ такое, что ω_p — представление класса 1, а собственное значение $t_p(\omega)$ оператора Гекке T_p, действующего в пространстве $GL(2, \mathbf{Z}_p)$-инвариантных векторов представления ω, удовлетворяет неравенству $|t_p(\omega) - p - 1| < \varepsilon$. С другой стороны, из гипотезы Петерсона, доказанной П. Делинем ([1], теорема 8.2), следует, что $|t_p(\omega)| \leqslant 2\sqrt{p}$ для любого $\omega \in \Sigma$ такого, что ω_p — представление класса 1. Полученное противоречие доказывает теорему. $\square$

Заметим, что вместо неравенства $|t_p(\omega)| \leqslant 2\sqrt{p}$, доказательство которого очень сложно, можно было бы воспользоваться более слабым неравенством $|t_p(\omega)| \leqslant p^{4/5} + p^{1/5}$, доказанным в [6] сравнительно элементарными средствами.

ЦИТИРУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Делинь П.*— УМН, 1975, т. 30, вып. 5, с. 159—190. 2. *Жаке Э., Ленглендс Р. П.* Автоморфные формы на $GL(2)$. М.: Мир, 1973. 3. *Banach S.* Oeuvres, Warszawa, 1967, v. 1, p. 318—322. 4. *Margulis G. A.*— Monatshefte für Mathematik, 1980, Bd 90, № 3, S. 233—235. 5. *Sullivan D.*— Bull. Amer. Math. Soc. (New Series), 1981, v. 4, № 1, p. 121—123. 6. *Rankin R. A.*— Proc. Cambridge Philos. Soc., 1939, v. 35, p. 351—372. 7. *Del Junco A., Rosenblatt J.*— Math. Ann., 1979, Bd 245, S. 185—197.

Физико-технический институт
низких температур АН УССР

Поступило в редакцию
11 марта 1984 г.