А. М. Чернев, О модулях с конечной размерностью Голди и относительной размерностью Крулля,
Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 1996, номер 5, 98–101

https://www.mathnet.ru/vmumm2062

Предположим, что $\lim\limits_{t\to+\infty} P(\mathscr{M}(t)<f(t))=L_g(f)=e^{-u}\in(0, 1)$. Тогда $g_{\ulcorner f(t)\urcorner}\sim u/t$, $t\to+\infty$. Заметим, что $q_n\sim\gamma_n/T$, а $\gamma_n=1-F(n-1)$, где $F(n)$ — распределение максимума на периоде регенерации. Согласно [3], чтобы выбрать последовательность n_m, такую, что $1-F(n_m)\sim c/m$, $m\to\infty$, необходимо выполнить требование $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-F(n)}{1-F(n-1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}=$ $=1$, откуда получаем, что радиус сходимости ряда $\gamma(s)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\gamma_n s^n$ равен единице. Тогда из оценки в лемме 2 следует, что $R(w)\leqslant R(\gamma)=1$. В первом и втором случаях это условие не выполняется ($R=\infty$ и $R=a>1$ соответственно). В третьем случае для решения вопроса требуются более точные оценки, чем в лемме 2.

Заметим, что специфика бесконечнолинейной системы использовалась только при выводе формулы для $\pi(s)$. Таким образом, наши рассуждения применимы к гораздо более широкому классу СМО с групповым поступлением и позволяют оценивать асимптотику максимального числа клиентов в системе через свойства входного потока и стационарного распределения числа клиентов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соловьев А. Д. Асимптотическое поведение момента первого наступления редкого события в регенерирующем процессе//Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1971. № 6. 79—89.
2. Афанасьева Л. Г., Булинская Е. В. Случайные процессы в теории массового обслуживания и управления запасами. М., 1980.
3. Лидбеттер М., Линдгрен Г., Ротсен Х. Экстремумы случайных последовательностей и процессов. М., 1989.

Поступила в редакцию
25.11.94

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1996. № 5

УДК 553.1

А. М. Чернев

О МОДУЛЯХ С КОНЕЧНОЙ РАЗМЕРНОСТЬЮ ГОЛДИ И ОТНОСИТЕЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТЬЮ КРУЛЛЯ

В теории колец важную роль играют размерности Голди и Крулля. В настоящей работе они изучаются с помощью техники теории кручений, что позволило ослабить условие теоремы 1.2 из [1]. Кроме этого доказывается относительный вариант теоремы 2.2 из [1].

Пусть τ — кручение (см. [2, 3]). Обозначения в основном соответствуют [3] за исключением следующих: $[N]^c_M=\{x\in M : (N:x)\in L_\tau\}$ — τ-замыкание N в M; $C_\tau(M)$ — множество всех τ-замкнутых (т. е. $[N]^c_M=$ $=N$) подмодулей модуля M. Если M — τ-полупростой модуль, то τ-цоколем ($\mathrm{Soc}_\tau M$) называется сумма всех его τ-критических подмодулей. Кручение называется нетеровым, если объединение τ-замкнутых подмодулей M, образующих возрастающую цепь, τ-замкнуто в M.

Любой подмодуль какого-нибудь фактормодуля модуля M будем для краткости называть подфактором M. Фактор M будем иногда называть M-циклическим модулем. Если N — существенный подмодуль K, то назовем K существенным расширением N. Модуль M — CS-модуль, если каждый его подмодуль, не имеющий собственных существенных расширений, лежащих в M, выделяется прямым слагаемым. Запись $N \subseteq_{es} M$ (или $[N]_M^{es} = M$) будет обозначать, что N — существенный. Модуль P — $M\tau$-проективный, если он проективен относительно гомоморфизмов M на τ-полупростые факторы. По поводу размерностей Голди и Крулля см. [4].

1. Полупростые модули с конечной размерностью Голди. Теорема 1. *Пусть M — полупростой модуль относительно нетерова кручения τ; P — конечно-порожденный $M\tau$-проективный модуль. Пусть M — P-циклический и*

каждый τ-полупростой P-циклический подфактор M есть прямая сумма CS-модуля и конечномерного модуля. (1)

Тогда M имеет конечную размерность Голди.

Доказательство. Допустим, что M — бесконечномерный модуль. В силу (1) его можно считать CS-модулем. Пусть $\oplus_{i\in \mathbf{N}} M_i$ — прямая сумма ненулевых подмодулей M. Обозначим $E_1 = [M_1]_M^{es}$. Тогда $M = E_1 \oplus F_1$, так как M — CS-модуль. Обозначим $M_2' = (E_1 \oplus M_2) \cap F_1$ и по модулярности $E_1 \oplus M_2' = E_1 \oplus M_2$. Модуль F_1 — CS-модуль (прямое слагаемое CS-модуля). Обозначим $E_2 = [M_2]_{F_1}^{es}$. Тогда $F_1 = E_2 \oplus F_2$ и $M = E_1 \oplus E_2 \oplus F_2$. Повторяя эту процедуру, получим $M = E_1 \oplus E_2 \oplus \ldots$ $\ldots \oplus E_k \oplus F_k$ для любого $k \in \mathbf{N}$. Выберем максимальные τ-замкнутые $K_i \subset E_i$. Положим: $S_i = E_i/K_i$ — τ-критические, $S = \oplus_{i\in \mathbf{N}} S_i$, $\bar{M} = (M/\oplus_{i\in \mathbf{N}} K_i)/\tau(M/\oplus_{i\in \mathbf{N}} K_i)$. Видно, что $S \subset \bar{M}$ и любая конечная сумма модулей S_i — прямое слагаемое M. Согласно (1), имеем $\bar{M} = \bar{M}' \oplus \bar{M}''$, где $\bar{M}'$ — CS, $\bar{M}''$ — конечномерный модуль. Пусть размерность Голди $\bar{M}''$ равна k. Тогда $K = (\oplus_{i=1}^{k+1} S_i) \cap \bar{M}' \neq 0$ и K есть прямое слагаемое $\bar{M}'$, поэтому $K = \tilde{S}_1 \oplus \ldots \oplus \tilde{S}_m$, $\tilde{S}_i$ — однородные модули. Имеем $\mathrm{Soc}_\tau (\oplus_{i=1}^{k+1} S_i) = \oplus_{i=1}^{k+1} S_i$. Согласно [5, теорема 3.7, с. 57], $\mathrm{Soc}_\tau K = K$, $\mathrm{Soc}_\tau \tilde{S}_i = \tilde{S}_i$ и $\tilde{S}_i$ — τ-критические модули. Повторяя это рассуждение для других групп модулей S_i, получаем, что $\bar{M}' \supseteq \oplus_{i\in \mathbf{N}} \tilde{S}_i$, $\tilde{S}_i$ — τ-критические и каждая конечная сумма модулей $\tilde{S}_i$ выделяется в M прямым слагаемым. Из этого следует, что сумма $\oplus_{i=1}^{n} \tilde{S}_i$ τ-замкнута в M для любого n. В силу нетеровости τ модуль $\tilde{S}$ тоже τ-замкнут. Обозначим $\bar{M} = [\tilde{S}]_{\bar{M}'}^{es}$, $\tilde{M}$ — прямое слагаемое $\bar{M}'$. Следовательно, $\tilde{M}$ — P-циклический, конечно-порожденный CS-модуль, $\tilde{M} \supseteq \oplus_{i\in \mathbf{N}} \tilde{S}_i$ и любая конечная сумма модулей $\tilde{S}_i$ есть прямое слагаемое $\tilde{M}$. Имеем $\tilde{S} = [\tilde{S}]_{\tilde{M}}^{c} = \mathrm{Soc}_\tau (\tilde{M})$ согласно [5, теорема 3.7, с. 57]. Модуль $\tilde{M}/\tilde{S}$ — τ-полупростой и в силу (1) $\tilde{M}/\tilde{S} = C \oplus D$, где C — CS-, а D — конечномерный модули. Докажем, что $D = 0$. Модуль D — P-циклический. Возьмем P-циклический модуль Y, такой, что $(Y + \tilde{S})/\tilde{S} = D$. Ввиду (1) $Y = Y' \oplus Y''$, Y' — CS-, Y'' — конечномерный модули. Имеем $\mathrm{Soc}_\tau Y'' \subseteq \oplus_{i\in A} \tilde{S}_i$, A — конечное подмножество $\mathbf{N}$. Поэтому $Y'' = [\mathrm{Soc}_\tau Y'']_{Y''}^{es}$ тоже лежит в $\oplus_{i\in A} \tilde{S}_i$ и $Y'' \subseteq \tilde{S}$. Модуль $(Y + \tilde{S})/\tilde{S} \cong Y'/(Y' \cap \tilde{S})$ — конечномерный. Согласно [1, 1.1, с. 123], модуль $Y' \cap \tilde{S}$ конечно-порожден. Кроме того, $Y' \cap \tilde{S}$ — прямое слагаемое Y'. Значит, $Y' \subseteq \tilde{S}$. Отсюда $D = 0$ и $\tilde{M}/\tilde{S}$ — CS-модуль.

Пусть $\mathbf{N} = \bigcup_{i\in \mathbf{N}} A_i$ и A_i — бесконечные подмножества $\mathbf{N}$. Пусть $X_j = \oplus_{i\in A_j} \tilde{S}_i]_{\tilde{M}}^{es}$, $\bar{X}_j$ — проекция X_j при отображении $\tilde{M} \to \tilde{M}/\tilde{S}$. Модуль

$\overline{X}=[\oplus_{j\in\mathbf{N}}\overline{X}_j]^{es}_{\tilde{M}/S}$ — прямое слагаемое $\tilde{M}/\tilde{S}$ и, следовательно, является P-циклическим. Поэтому существует P-циклический модуль X, такой, что $(X+\tilde{S})/\tilde{S}=\overline{X}$. Ввиду (1) $X=X'\oplus X''$, X' — CS-, X'' — конечномерный модули. Имеем $\mathrm{Soc}_\tau X''\subseteq\oplus_{i\in B}\tilde{S}_i$ (B — конечное подмножество $\mathbf{N}$), $X''=[\mathrm{Soc}_\tau X'']^{es}_{X''}\subseteq\tilde{S}$, $X_j\subseteq X'+\tilde{S}$ при любом j. Так как X_j — прямое слагаемое $\tilde{M}$ и X_j не лежит в $\tilde{S}$, то $X'\cap X_j\neq 0$ для всех j. Выберем τ-критический модуль $W\subset X'\cap X_j\cap(\oplus_{k\in A}\tilde{S}_k)$, где $A\subseteq A_j$ и конечно (существует согласно [6, лемма 1.6, с. 634]). Пусть $V_j=[W]^{es}_{X'}$. Так как $\oplus_{i\in A}\tilde{S}_i$ — прямое слагаемое $\tilde{M}$, то $V_j\subseteq\oplus_{i\in A}\tilde{S}_i$. Модуль $V=[\oplus_{j\in\mathbf{N}}V_j[^{es}_{X'}$ выделяется прямым слагаемым в X'. Поэтому V — конечно-порожденный модуль и V не лежит в $\tilde{S}$. Модуль $\oplus_{j=1}^m V_j$ — прямое слагаемое X' и $\oplus_{j=1}^m V_j\subseteq_{es}V\cap(\oplus_{j=1}^m X_j)$. Значит, $\oplus_{j=1}^m V_j=V\cap(\oplus_{j=1}^m X_j)$ и $V\cap(\oplus_{j=1}^m X_j)\subseteq\subseteq\tilde{S}$. Это верно для любого m. Отсюда $V\cap(\oplus_{j\in\mathbf{N}}X_j)\subseteq\tilde{S}$. Но, с другой стороны, $(\oplus_{j\in\mathbf{N}}X_j+\tilde{S})/\tilde{S}\subseteq_{es}\overline{X}$ и $(V+\tilde{S})/\tilde{S}\neq 0$. Получаем противоречие, показывающее, что M — конечномерный модуль.

2. Относительная размерность Крулля. τ-Размерностью Крулля модуля M (τK-$\dim M$) назовем размерность Крулля решетки $C_\tau(M)$.

Теорема 2. *Пусть M — R-модуль, τ — нетерово кручение и каждый фактор M имеет существенный подмодуль с τK-$\dim\leqslant\alpha$. Тогда τK-$\dim M\leqslant\alpha$.*

Говорят, что M имеет существенную (локальную) τ-размерность Крулля $\leqslant\alpha$, если существует $N\subseteq_{es}M$ и τK-$\dim N\leqslant\alpha$ (каждый конечно-порожденный подмодуль M имеет τ-размерность Крулля $\leqslant\alpha$).

Теорема 3. *Пусть M — τ-полупростой относительно нетерового кручения τ, P-конечно порожденный $M\tau$-проективный модуль, порождающий все подмодули M. Пусть M — P-циклический и*

каждый τ-полупростой P-циклический подфактор M есть прямая сумма M-инъективного модуля и модуля с существенной размерностью Крулля $\leqslant\alpha$. (2)

Тогда M имеет локальную размерность Крулля $\leqslant\alpha$.

Доказательство. Достаточно показать, что любой P-циклический подмодуль L модуля M имеет размерность Крулля $\leqslant\alpha$. Согласно (2) и теореме 1, L — конечномерный по Голди модуль. Пусть $\oplus_{i=1}^k U_i\subseteq_{es}L$, U_i — однородные модули. Зафиксируем $j\in 1,\dots,k$. Если U_j — простой модуль, то τK-$\dim U_j=0$. Если U_j не простой, то существует модуль V_j, такой, что $V_j\subset U_j$. По предположению $\mathrm{Hom}(P,V_j)\neq 0$. Тогда V_j содержит P-циклический τ-полупростой подмодуль, который согласно (2) имеет существенную τ-размерность Крулля $\leqslant\alpha$. Это верно для любого j. Значит, L имеет существенную τ-размерность Крулля $\leqslant\alpha$. Аналогично получаем, что любой τ-полупростой фактор L имеет существенную τ-размерность Крулля $\leqslant\alpha$. Следовательно, по теореме 2 τK-$\dim L\leqslant\alpha$.

Автор глубоко признателен А. В. Михалеву и В. Т. Маркову за помощь в написании данной работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Huynh D. V., Dung N. V., Wisbauer R. On modules with finite uniform and Krull dimension//Arch. Math. 1991. **57**. 122—132.
2. Мишина А. П., Скорняков Л. А. Абелевы группы и модули. М., 1969.
3. Golan J. S. Torsion theories. N. Y., 1986.
4. Nastasecku C., Oystaeyen F. van. Dimensions of ring theory. Dordrecht, 1987.
5. Bueso J. L., Jara P. A generalization of semisimple modules//Meth. in ring theory. Dordrecht, 1984. 53—65.
6. Bueso J. L., Jara P. Semiartinian modules relative to a torsion theory//Communs Algebra. 1985. **13(3)**. 631—644.

Поступила в редакцию
27.11.95