V. M. Korchevsky, On the strong law of large numbers for sequence of independent random variables, *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 2015, Volume 442, 97–100

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 442, 2015 г.

В. М. Корчевский

ОБ УСИЛЕННОМ ЗАКОНЕ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

В настоящей работе приведено доказательство одного нового результата о применимости усиленного закона больших чисел к последовательности независимых случайных величин.

Следуя [1], будем использовать обозначение Ψ_c для множества функций $\psi(x)$, таких что каждая $\psi(x)$ положительна и не убывает в области $x > x_0$ при некотором x_0 и ряд $\sum \frac{1}{n\psi(n)}$ сходится. Значение x_0 не предполагается одним и тем же для различных функций ψ. Если в этом определении заменим слово "сходится" словом "расходится", то мы получим определение класса функций Ψ_d. Примерами функций класса Ψ_c являются функции x^δ и $(\log x)^{1+\delta}$ при любом $\delta > 0$. Функции $\log x$ и $\log\log x$ принадлежат классу Ψ_d.

Теорема A (В. В. Петров). *Пусть* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– последовательность независимых случайных величин с конечными дисперсиями, удовлетворяющая условию*

$$\mathbf{D}(S_n) = O\left(\frac{n^2}{\psi(n)}\right) \qquad \textit{для некоторой функции } \psi \in \Psi_c. \tag{1}$$

Тогда

$$\frac{S_n - \mathbf{E}\, S_n}{n} \to 0 \qquad \textit{п.н.},$$

где $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

Эта теорема была доказана В. В. Петровым в работе [2]. Там же было показано, что условие (1) в теореме A нельзя ослабить, потребовав вместо него выполнение содержащегося в (1) равенства для некоторой функции $\psi \in \Psi_d$.

Ключевые слова: усиленный закон больших чисел, последовательности независимых случайных величин.

Работа выполнена в рамках государственного заказа Минобрнауки России Санкт-Петербургскому государственному университету аэрокосмического приборостроения, проектная часть.

В работе [3] получен следующий результат, являющийся обобщением теоремы А на случай произвольной нормирующей последовательности:

Теорема B. *Пусть* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– последовательность независимых случайных величин с конечными дисперсиями. Пусть* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– неубывающая неограниченная последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию*

$$\frac{a_{2n}}{a_n} \leqslant Q \qquad \text{для всех достаточно больших } n, \tag{2}$$

где Q *– некоторая постоянная. Если выполнено условие*

$$\mathbf{D}(S_n) = O\left(\frac{a_n^2}{\psi(n)}\right) \qquad \text{для некоторой функции } \psi \in \Psi_c,$$

то

$$\frac{S_n - \mathbf{E}\,S_n}{a_n} \to 0 \qquad \text{п.н.} \tag{3}$$

Теорема А соответствует случаю $a_n = n$ для всех $n \geqslant 1$. В [3] также показано, что условие (2) в теореме В не может быть опущено.

Целью настоящей работы является доказательство следующей теоремы, обобщающей теорему В.

Теорема 1. *Пусть* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– последовательность независимых случайных величин, такая что* $\mathbf{E}\,|X_n|^p < \infty$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *для некоторого* $p \geqslant 1$. *Пусть* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– неубывающая неограниченная последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию* (2). *Если выполнено условие*

$$\mathbf{E}\,|S_n - \mathbf{E}\,S_n|^p = O\left(\frac{a_n^p}{\psi(n)}\right) \qquad \text{для некоторой функции } \psi \in \Psi_c, \tag{4}$$

то имеет место соотношение (3).

Теорема В соответствует случаю $p = 2$.

Доказательство теоремы 1 основано на следующей лемме Марцинкевича–Зигмунда [4] (см. также [5, с. 579]):

Лемма 1. *Пусть* $X_1, \ldots, X_n$ *– независимые случайные величины, такие что* $\mathbf{E}\,X_k = 0$, $\mathbf{E}\,|X_k|^p < \infty$ $(k = 1, \ldots, n)$ *для некоторого* $p \geqslant 1$. *Тогда*

$$\mathbf{E}\left(\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |S_k|\right)^p \leqslant c(p)\,\mathbf{E}\,|S_n|^p,$$

где $c(p)$ – положительная постоянная, зависящая только от p.

Доказательство теоремы 1. Не ограничивая общности, будем считать, что $\mathbf{E}\,X_n = 0$ для всех $n \geqslant 1$. В силу неравенства Чебышева и условия (4) для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{S_{2^n}}{a_{2^n}}\right| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{E}\,|S_{2^n}|^p}{a_{2^n}^p} \leqslant C\varepsilon^{-p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(2^n)}, \tag{5}$$

где C – постоянная. В силу леммы 1 из [6] ряд $\sum 1/\psi(b^n)$ сходится для любого $b > 1$, если $\psi(x) \in \Psi_c$. Поэтому ряд в правой части (5) сходится. Применение леммы Бореля–Кантелли приводит к соотношению

$$\frac{S_{2^n}}{a_{2^n}} \to 0 \qquad \text{п.н.}$$

Для завершения доказательства достаточно показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \max_{2^n < k \leqslant 2^{n+1}} \left|\frac{S_k}{a_k}\right| = 0 \qquad \text{п.н.}$$

Имеем

$$\max_{2^n < k \leqslant 2^{n+1}} \left|\frac{S_k}{a_k}\right| \leqslant \max_{2^n < k \leqslant 2^{n+1}} \left|\frac{S_k}{a_{2^{n+1}}}\right| \frac{a_{2^{n+1}}}{a_{2^n}} \leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant 2^{n+1}} \left|\frac{S_k}{a_{2^{n+1}}}\right| \frac{a_{2^{n+1}}}{a_{2^n}}.$$

Следовательно, учитывая (2), нам достаточно доказать соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1 \leqslant k \leqslant 2^n} \left|\frac{S_k}{a_{2^n}}\right| = 0 \qquad \text{п.н.} \tag{6}$$

В силу леммы 1 для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(\max_{1 \leqslant k \leqslant 2^n} \left|\frac{S_k}{a_{2^n}}\right| > \varepsilon\right) &\leqslant \frac{1}{\varepsilon^p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{E}\left(\max_{1 \leqslant k \leqslant 2^n} |S_k|\right)^p}{a_{2^n}^p} \\ &\leqslant C\varepsilon^{-p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{E}\,|S_{2^n}|^p}{a_{2^n}^p} < \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, (6) выполнено в силу леммы Бореля–Кантелли. Теорема доказана. □

Литература

1. В. В. Петров, *Суммы независимых случайных величин.* Наука, М., 1972.
2. В. В. Петров, *Об усиленном законе больших чисел.* — Теория вероятн. и ее примен. **14** (1969), 193–202.
3. V. Korchevsky, *A generalization of the Petrov strong law of large numbers.* — Statist. Probab. Letters **104** (2015), 102–108.
4. J. Marcinkiewicz, A. Zygmund, *Quelques théorèmes sur les fonctions indépendantes.* — Studia Math. **7** (1938), 104–120.
5. T. Kawata, *Fourier Analysis in Probability Theory.* Academic Press, New York, 1972.
6. В. В. Петров, *Об усиленном законе больших чисел для последовательности неотрицательных случайных величин.* — Теория вероятн. и ее примен. **53** (2008), 379–382.

Korchevsky V. M. On the strong law of large numbers for sequence of independent random variables.

New sufficient conditions for the applicability of the strong law of large numbers are established for a sequence of independent random variables.

С.-Петербургский
государственный университет
аэрокосмического приборостроения,
ул. Большая Морская, д. 67,
Санкт-Петербург 190000, Россия
E-mail: valery_ko@list.ru

Поступило 12 октября 2015 г.