B. T. Rumov, Existence of some cyclic BIB-schemes, *Mat. Zametki*, 1990, Volume 47, Issue 3, 130–133

При выполнении условий, сформулированных выше, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1. *Пучок $L(\lambda)$ имеет дискретный спектр. Для числа $N(t)$ — собственных значений пучка $L(\lambda)$, не превосходящих по модулю t, справедлива оценка $N(t) = O(1)\, t^n$, $t \to +\infty$.*

Для получения точных асимптотических формул распределения собственных значений предположим, что корни уравнения (2) лежат на лучах

$$\gamma_j = \{z\colon \arg z = \varphi_j\}, \qquad 0 \leqslant \varphi_1 < \varphi_2 < \ldots < \varphi_p, \qquad p \leqslant kl.$$

Далее предположим, что выполнены следующие условия.

I. Для любого замкнутого угла Ψ с началом в нуле, не имеющего общих точек с $\Gamma = \bigcup_{j=1}^{p} \gamma_j$, при достаточно больших по модулю $\lambda \in \Psi$ оператор $L(\lambda)$ имеет непрерывный обратный.

II. Для любого луча $\gamma = \{z\colon \arg z = \varphi\}$, $\varphi \neq \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ при достаточно больших по модулю $\lambda \in \gamma$ справедлива оценка вида (3).

При выполнении перечисленных условий из теоремы 1 следует, что пучок $L(\lambda)$ имеет дискретный спектр. Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ — последовательность собственных значений пучка $L(\lambda)$, занумерованных в порядке неубывания их модулей, с учетом кратности.

Из условия I выводится, что множество $\{\lambda_j\}$ представимо в виде

$$\{\lambda_j\} = \bigcup_{i=1}^{p} \{\mu_{ij}\}, \quad \text{где } \arg_{j \to +\infty} \mu_{ij} = \varphi_i, \ i = \overline{1, p}.$$

Обозначим через $N_i(t, x, s)$ — число корней уравнения (2), лежащих на луче γ_i и не превосходящих по модулю t.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть выполнены условия* (1), I—II. *Тогда для функции* $N_i(t) = \sum_{|\mu_{ij}| < t} 1$ *при $t \to +\infty$ справедлива асимптотическая формула*

$$N_i(t) \sim (2\pi)^{-n} \int_{\Omega} \int_{R_n} N_i(t, x, s)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}s, \qquad i = \overline{1, p}.$$

Аналогичный результат для пучка $L(\lambda)$ при граничных условиях типа Шапиро—Лопатинского получил З. Э. Цихистави [1]. Отметим, что в [1] требуется, чтобы $\partial\Omega \subset C^\infty$.

Доказательство теоремы 2 основано на оценках резольвенты пучка $L(\lambda)$ и применении многолучевых тауберовых теорем А. А. Шкаликова [2].

Математический институт
с ВЦ АН ТаджССР
Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
16.10.89

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Цихистави З. Э. Об асимптотическом распределении спектра полиномиальных пучков дифференциальных операторов: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1989. 2. Шкаликов А. А. // Мат. сб. 1984. Т. 123, № 3. С. 317—347.

О СУЩЕСТВОВАНИИ НЕКОТОРЫХ ЦИКЛИЧЕСКИХ BIB-СХЕМ

Б. Т. Румов

$(v, k, \lambda;\ G, G')$-р[азностным] с[емейством] $\mathfrak{A}$ в аддитивной абелевой группе G порядка v называется такое семейство $(B_i,\ i \in I)$ k-элементных подмножеств (блоков) v-множества G, что мультимножество разностей $(a - b \mid a, b \in$

$\in B_i$, $a \neq b$, $i \in I$) есть $\lambda \{G \setminus G'\}$, где G' — подгруппа G. Если $G' = \{0\}$, то пользуемся сокращенным обозначением (v, k, λ)-р. с. в G (см. [1]).

Если элементы блоков $\mathfrak{A}$ упорядочены циклически и $(a - b \mid a, b \in B_i, \rho(a, b) = j, i \in I) = \mu \{G \setminus G'\}, j = 1, 2, \ldots, k - 1$, где $\rho(a, b)$ означает расстояние между a и b, то $\mathfrak{A}$ называется $T_\mu(v, k, k - 1; G, G')$-р. с. в G [2]. Мы будем пользоваться обозначением $\tilde{T}_\mu(v, k, k - 1; G, G')$-р. с., если $(a \mid a \in B_i, i \in I) = \mu \{G \setminus G'\}$, и называть семейство свободным, если $\mu = 1$ [3]. В случае $G' = \{0\}$ условимся в обозначениях опускать группы.

Целью является рекурсивное построение циклических разностных семейств и циклических BIB-схем.

ТЕОРЕМА 1. *Если существуют* $\tilde{T}_\mu(v, k, k - 1)$-*р. с. в* Z_v *и* $\tilde{T}_\nu(w, k, k - 1)$-*р. с. в* Z_w, *то существует* $\tilde{T}_{\mu\nu}(vw, k, k - 1)$-*р. с. в* Z_{vw}.

Доказательство. Пусть Z_u означает группу классов вычетов по $\bmod\ u$. Обозначим:

$$
\begin{aligned}
&A_0 = B_0 = \{0, 0, \ldots, 0\},\ A_i = \{a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ik}\}, B_j = \{b_{j1}, b_{j2}, \ldots, b_{jk}\},\\
&B_j^q = \{b_{j\ k+1-q}, b_{j\ k+2-q}, \ldots, b_{jk}, b_{j1}, b_{j2}, \ldots, b_{jk-q}\}, \qquad (1)\\
&(A_i, B_j) = \{a_{i1} + b_{j1}v, a_{i2} + b_{j2}v, \ldots, a_{ik} + b_{jk}v\} \pmod{vw}.
\end{aligned}
$$

Если $\mathfrak{A} = \bigcup_{i=1}^{\mu(v-1)/k} A_i = \mu \{Z_v \setminus Z_0\}$ и $\mathfrak{B} = \bigcup_{j=1}^{\nu(w-1)/k} B_j = \nu \{Z_w \setminus Z_0\}$ означают соответственно $\tilde{T}_\mu(v, k, k - 1)$-р. с. в Z_v и $\tilde{T}_\nu(w, k, k - 1)$-р. с. в Z_w, то искомое семейство образуют блоки

(A_0, B_j) $(j = 1, 2, \ldots, \nu(w - 1)/k)$ взяты μ раз,
(A_i, B_0) $(i = 1, 2, \ldots, \mu(v - 1)/k)$ взяты ν раз,
(A_i, B_j^q) $(i = 1, 2, \ldots, \mu(v - 1)/k;\ j = 1, 2, \ldots, \nu(w - 1)/k;$
$q = 0, 1, \ldots, k - 1)$.

Подобным образом доказывается

ТЕОРЕМА 2. *Если существуют* (*свободное*) (v, k, λ)-р. с. *в* Z_v, (*свободное*) $T(w, k, k - 1)$-*р. с. в* Z_w *и* (*свободное*) (w, k, λ)-*р. с. в* Z_w, *то существует* (*свободное*) $(vw, k, k - 1)$-*р. с. в* Z_{vw}.

Из указанных утверждений вытекают

Следствие 1.1. *Если* $q = 2^\alpha$ *и* $q + 1$ *есть простое число, то существует свободное* $T(v, k, k - 1)$-*р. с. в* Z_v, *где* $v = \prod_{i=1}^{m} (q^{n_i} - 1)/(q - 1)$, $k = 2^j$ $(j = 1, 2, \ldots, \alpha)$.

Предварительно используем теорему Зингера [4] о существовании циклической BIB-схемы с параметрами $((q^{n_i} - 1)/(q - 1), q + 1, 1)$, а затем с помощью свободного $T(q + 1, 2^j, 2^j - 1)$-р. с. в Z_{q+1} строим $T((q^{n_i} - 1)/(q - 1), 2^j, 2^j - 1)$-р. с. в $Z_{(q^{n_i}-1)/(q-1)}$ методом [3] (следствие 2), если n_i — нечетное число, и методом [3] (следствие 3), если n_i — четное.

Следствие 1.2. *Если* q *и* $q + 1$ *являются степенями простых чисел, то существует свободное* $T(v, k, k - 1)$-*р. с. в* Z_v, *где* $v = \prod_{i=1}^{m} (q^{n_i} - 1)/(q - 1)$, $k = q$ *и* n_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ — *нечетные числа.*

Следствие 2.1. *Существует свободное* (v, k, λ)-*р. с. в* Z_v *с параметрами:*

а) $v = p^\alpha$, $k = (p - 1)/4$, $\lambda = (p - 5)/16$ ($p = 4x^2 + 1$ — *простое*, x — *нечетное*);

б) $v = p^\alpha$, $k = (p - 1)/8$, $\lambda = (p - 9)/64$ ($p = 8a^2 + 1 = 64b^2 + 9$ — *простое*, a *и* b — *нечетные*);

в) $v = \prod_{i=1}^{\nu} p_i^{\alpha_i}$ ($p_i \equiv 1 \pmod{20}$ — *простые*), $k = 5$, $\lambda = 1$ (здесь используем существование соответствующих разностных множеств и разностного семейства при $\alpha = \nu = 1$ [5]).

Аналогично теореме 1 доказывается

ТЕОРЕМА 3. *Если существуют (v, k, λ)-р. с. в Z_v и T_μ $(w, k, k-1)$-р. с. в Z_w, то существует $(vw, k, \lambda\mu\ (k-1))$-р. с. в Z_{vw}.*

Следствие 3.1. *Если существуют $(v, k, 1)$-р. с. в Z_v и $T\ (w, k, k-1)$-р. с. в Z_w, то существует $(vw, k, k-1)$-р. с. в Z_{vw}.*

Следствие 3.2. *Если существуют (v, k, λ_1)-р. с. в Z_v, $T\ (w, k, k-1)$-р. с. в Z_w и (w, k, λ_2)-р. с. в Z_w, то существует (vw, k, λ)-р. с. в Z_{vw}, где λ — наименьшее общее кратное чисел λ_1 и λ_2.*

Теперь рассмотрим существование циклических BIB-схем с параметрами (v, k, λ), где $k \mid v$.

ТЕОРЕМА 4. *Если существует $T\ (v, k, k-1)$-р. с. в Z_v ($v \equiv 1 \pmod{k}$) и k — нечетное простое число, то существует $T\ (kv, k, k-1; Z_{kv}, Z_k)$-р. с. в Z_{kv}.*

Доказательство. Пусть (σ_{ij}) — квадратная матрица порядка k, первая строка которой есть нулевой вектор, а каждая последующая получается из предыдущей сложением по mod k вектора $(0, 1, 2, \ldots, k-2, k-1)$. Тогда искомое р. с. в Z_{kv} образуют $v-1$ блоков

$$\{a_{it} + b_{tj}v \pmod{kv} \mid t = 1, 2, \ldots, k\},$$
$$i = 1, 2, \ldots, (v-1)/k, \quad j = 1, 2, \ldots, k;$$

где $A_i = \{a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ik}\}$ $(i = 1, 2, \ldots, (v-1)/k)$ — произвольный блок $T\ (v, k, k-1)$-р. с. в Z_v.

ТЕОРЕМА 5. *В условиях теоремы 4, если $T\ (v, k, k-1)$-р. с. разбивается на два разностных семейства, каждое с параметрами $(v, k, (k-1)/2)$, то существует циклическая BIB-схема с параметрами $(kv, k, (k-1)/2)$.*

Доказательство. Строим $(v-1)/2$ полных орбит, используя лишь те блоки, что образуют $(v, k, (k-1)/2)$-р. с. в Z_v, и присоединяем $(k-1)/2$ коротких орбит, порожденных блоком $\{0, v, 2v, \ldots, (k-1)v\}$.

Следствие 5.1. *Если k — нечетное простое число и $v = \prod_{i=1}^{\nu} p_i^{\alpha_i}$ ($p_i \equiv 1 \pmod{k}$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$), то существует циклическая BIB-схема с параметрами $(kv, k, (k-1)/2)$* (здесь используем существование $T\ (v, k, k-1)$-р. с. в Z_v, разбиваемого в два семейства с параметрами $(v, k, (k-1)/2)$ [6]).

Подобно теореме 4 доказывается

ТЕОРЕМА 6. *Если существует $T_\mu\ (v, k, k-1)$-р.с. в Z_v, где $v \equiv 1 \pmod{k}$ и k — нечетное простое число, то существует $T_\mu\ (kv, k, k-1; Z_{kv}, Z_k)$-р.с. в Z_{kv}.*

Следствие 6.1. *В условиях теоремы 6 существует циклическая BIB-схема с параметрами $(kv, k, \mu\ (k-1))$.*

ТЕОРЕМА 7. *Если существует циклическая BIB-схема с параметрами $(kv, k, 1)$ и $\tilde{T}_\mu\ (k, k_1, k_1 - 1)$-р.с. в Z_k, то существует $\tilde{T}\ (kv, k_1, k_1 - 1)$-р.с. в Z_{kv}.*

Доказательство. Пусть $A_i = \{a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ik_1}\}$, $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, \mu\ (k-1)/k_1$ означает $\tilde{T}_\mu\ (k, k_1, k_1 - 1)$-р. с. в Z_k, $B_j = \{b_{j1}, b_{j2}, \ldots, b_{jk}\}$ $(j = 1, 2, \ldots (v-1)/(k-1))$ — базовые блоки полных орбит циклической BIB-схемы $(kv, k, 1)$. Блоки A_i и их всевозможные циклические перестановки представим в виде вектор-столбцов, добавив $(k_1 + 1)$-ю строку из одних нулей. Действуем на получившуюся матрицу группой автоморфизмов Z_k. Устанавливаем взаимно однозначное соответствие между элементами Z_k и элементами каждого из блоков B_j (поочередно), результат подставляем в последнюю матрицу и из каждой строки вычитаем $(k_1 + 1)$-ю строку. В итоге получим $\mu\ (v-1)\ k/k_1$ циклически упорядоченных блок-столбцов, к которым присоединим $\mu(k-1)/k_1$ блоков $\tilde{T}_\mu(k, k_1, k_1-1)$-р. с. в Z_k, каждый элемент которых умножен на v (сравните с доказательством теоремы 1 в [3]).

Заметим, что если $\mu = 1$ и k — нечетное простое число, то теорема 7 приводит к следствию 4 из работы [3].

Математический институт
им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступило
20.07.87

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wilson R. M. // J. Numer Theory. 1972. V. 4, N 1. P. 17—47. 2. Румов Б. Т. // Мат. сб. 1975. Т. 98, № 2. С. 280—291. 3. Румов Б. Т. // Математические заметки. 1985. Т. 38, вып. 6. С. 888—899. 4. Singer J. // Trans. Amer. Math. Soc. 1938. V. 43. P. 377—385. 5. Холл М. Комбинаторика. М.: Мир, 1970. 6. Румов Б. Т. // Математические заметки. 1971. Т. 10, вып. 6. С. 649—659.

ОБ ОДНОМ НЕСАМОСОПРЯЖЕННОМ ОПЕРАТОРНОМ ПУЧКЕ

Чан Тху Ха

В классической теореме М. В. Келдыша [1] установлена полнота в гильбертовом пространстве H системы собственных и присоединенных векторов (СПВ) оператора вида $C(I+T) = D$, где C — вполне непрерывный неотрицательный оператор класса σ_p ($p < \infty$), $T \in \sigma_\infty$ и оператор $I + T$ обратим. Оператор D такого вида в дальнейшем называется оператором Келдыша. В настоящей заметке рассматривается операторный пучок

$$\mathscr{L}(\lambda) = I - D_0 - \lambda D_1 - \lambda^{-1} D_2, \tag{1}$$

где D_1 и D_2 операторы Келдыша, $D_i = C_i(I + T_i)$ $(i = 1, 2)$, $D_0 \in \sigma_\infty$ и $I - D_0$ обратим. Пучок, в котором D_1 и D_2 самосопряжены, возник впервые в работе С. Г. Крейна [2] в связи с задачей о колебаниях вязкой жидкости и исследовался многими авторами. Пучок (1) возникает в задаче о колебаниях неравномерно нагретой вязкой жидкости (см. ниже).

Обозначим через H_i $(i = 1, 2)$ замыкание областей значений операторов C_i и через P_i ортопроекторы на эти подпространства. Положим $I - S_0 = (I - D_0)^{-1}$. Тогда $S_0 \in \sigma_\infty$.

ТЕОРЕМА 1. *В предположениях, что существуют ограниченные операторы*

$$[I + (T_i + S_0 + T_i S_0)P_i]^{-1} =: I + S_i \quad (i = 1, 2)$$

пучок $\mathscr{L}(\lambda)$ обратим в областях:

1) $\Lambda_1 = \{\lambda: |\arg\lambda| > \varepsilon, |\lambda| > R_1\}$,
2) $\Lambda_2 = \{\lambda: |\arg\lambda| > \varepsilon, |\lambda|^{-1} > R_2\}$,

где ε — достаточно малое, а $R_i = R_i(\varepsilon)$ $(i = 1, 2)$ — достаточно большие числа.

Схема доказательства. Обозначим $G_{01} = (I + T_1)(I + S_0) D_2 (I + T_1)^{-1}$, и пусть $|\lambda| > \|G_{01}\|$. После громоздких вычислений получаем представление

$$\mathscr{L}(\lambda) = (I - D_0)(I + T_1)^{-1}(I - \lambda^{-1}G_{01})[I + (T_1 + S_0 + T_1 S_0)P_1]F_1(\lambda)(I + T_1), \tag{2}$$

где

$$F_1(\lambda) = I + S_1 P_1 - (I + S_1)G_{01}(I + T_1)(I + S_0)C_1 - (I + S_1)G_1(\lambda) - \lambda C_1 = I + BP_1 + K(\lambda)P_1 - \lambda C_1, \tag{3}$$

