N. A. Sidorov, A. V. Sinitsyn, Nontrivial solutions and bifurcation points of the Vlasov–Maxwell system, *Dokl. Akad. Nauk*, 1996, Volume 349, Number 1, 26–28

ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1996, том 349, № 1, с. 26–28

МАТЕМАТИКА

УДК 517.958:517.93

О НЕТРИВИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ И ТОЧКАХ БИФУРКАЦИИ СИСТЕМЫ ВЛАСОВА–МАКСВЕЛЛА

© 1996 г. Н. А. Сидоров, А. В. Синицын

Представлено академиком В.М. Матросовым 09.09.94 г.

Поступило 13.10.94 г.

Рассмотрим систему Власова–Максвелла (ВМ) [1]

$$\partial_r f_i(r,v)\cdot v + (q_i/m_i)(E+(1/c)[v\times B])\cdot\partial_v f_i(r,v) = 0, \quad (1)$$

$$r\in\Omega\subseteq R^3,\quad v\in R^3,\quad f_i(r,v)\ge 0,$$

$$i = 1,\dots,N,$$

$$\operatorname{rot}E = 0,$$

$$\operatorname{div}B = 0,$$

$$\operatorname{div}E = 4\pi\sum_{k=1}^N q_k\int_{R^3} f_k(r,v)dv \overset{\text{def}}{=} \rho,$$

$$\operatorname{rot}B = \frac{4\pi}{c}\sum_{k=1}^N q_k\int_{R^3} f_k(r,v)v\,dv \overset{\text{def}}{=} j, \quad (2)$$

отвечающую функциям распределения вида [2]

$$f_i(r,v) = \lambda\hat f_i(-\alpha_i v^2+\varphi_i(r),\ (v,d_i)+\psi_i(r)) \overset{\text{def}}{=} \lambda\hat f_i(R,G). \quad (3)$$

Здесь

$$\varphi_i = c_{1i}+l_{i\varphi},\quad \psi_i = c_{2i}+k_i\psi;\quad \varphi\colon R^3\to R;$$

$$\psi\colon R^3\to R;\quad r\in\Omega\subseteq R^3;\quad v\in R^3;$$

$$\lambda\in R^+;\quad \alpha_i\in R^+ \overset{\text{def}}{=} [0,\infty);\quad d_i\in R^3;$$

$$c_{1i}, l_i, c_{2i}, k_i\in R^1 = (-\infty,+\infty);\quad i = 1,\dots,N.$$

Функции φ, ψ, порождающие распределения f_i и соответствующее электромагнитное поле (E, B), подлежат определению.

В п. 1 данной заметки определение функций φ и ψ сводится к системе нелинейных эллиптических уравнений с параметром λ. В п. 2 система нелинейных эллиптических уравнений рассматривается в ограниченной области, причем при $\forall\lambda$ она имеет тривиальное решение (φ^0, ψ^0) и ему отвечают нулевые плотности заряда ρ и тока j.

1. Пусть выполнено условие:

(I) В распределениях (3) $\hat f_i(R, G)$ – фиксированные, дифференцируемые функции своих аргументов; α_i, d_i – свободные параметры, интегралы

$$\int_{R^3}\hat f_i dv,\quad \int_{R^3}\hat f_i v\,dv$$

сходятся при $\forall\varphi_i, \psi_i$;

$$l_i = \frac{m}{2\alpha q}\frac{\alpha_i q_i}{m_i},\quad k_i = \frac{q_i}{m_i}\frac{m}{q}\frac{(d_i,d)}{d^2},$$

$$d \triangleq d_1;\quad m \triangleq m_1,\quad \alpha \triangleq \alpha_1,\quad q \triangleq q_1.$$

Теорема 1. *Пусть выполнено условие* I. *Пусть функции* φ, ψ *удовлетворяют системе*

$$\Delta\varphi = \mu\sum_{k=1}^N q_k\int_{R^3} f_k dv,$$

$$\Delta\psi = \nu\sum_{k=1}^N q_k\int_{R^3}(v,d)f_k dv, \quad (4)$$

причем

$$(\nabla\varphi,d) = 0,\quad (\nabla\psi,d) = 0,$$

$$\mu = (8q\pi\alpha)/m,\quad \nu = -(4\pi q)/(mc^2). \quad (5)$$

Пусть

$$E = \frac{m}{2\alpha q}\nabla\varphi,$$

$$B = \frac{d}{d^2}\left(\beta+\int_0^1(d\times J(tr),r)dt\right) - [d\times\nabla\psi]\frac{mc}{qd^2},$$

где

$$\beta = \text{const},\quad J \overset{\text{def}}{=} \frac{4\pi}{c}\sum_{k=1}^N q_k\int_{R^3} v f_k dv.$$

Тогда (f_i, E, B) *есть решение системы ВМ.*

Иркутский государственный университет

Лемма 1. *Пусть в R^3 найдется вектор $\beta = \beta(d, \alpha, \varphi, \psi)$ такой, что функция $f(-\alpha(v+\beta)^2 + \varphi, d(v+\beta)+\psi)$ четная по v; тогда*

$$j = \beta\cdot\rho, \tag{6}$$

где

$$j \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{R^3} vf\,dv, \quad \rho \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{R^3} f\,dv.$$

Введем обозначения:

$$j_i \triangleq \int\limits_{R^3} f_i v\,dv, \quad \rho_i \triangleq \int\limits_{R^3} f_i dv, \quad i = 1, \ldots, N,$$

и условие

(II) Существуют векторы $\beta_i \in R^3$ такие, что

$$j_i = \beta_i\rho_i, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Если выполнено условие II, то система (4) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \lambda\mu\sum_{i=1}^N q_i A_i, \\ \Delta\psi &= \lambda\nu\sum_{i=1}^N q_i(\beta_i, d)A_i, \end{aligned} \tag{7}$$

где

$$A_i(l_i\varphi, k_i\psi) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{R^3}\hat{f}_i dv.$$

Если $\beta_i = \dfrac{d_i}{2\alpha_i}$, то ввиду тождеств

$$\frac{(d_i, d)}{\alpha_i} = \frac{d^2 k_i}{\alpha\, l_i}$$

второе уравнение системы (7) принимает вид

$$\Delta\psi = \lambda\frac{\nu d^2}{2\alpha}\sum_{i=1}^N \frac{k_i q_i}{l_i}A_i.$$

2. Пусть Ω – ограниченная область в R^3 с границей $\partial\Omega$ класса $C_{2,\alpha}$, $\alpha \in (0, 1]$, и выполнены условия I, II. Рассмотрим систему (7) на подпространстве, определяемом условиями (5).

Пусть φ^0, ψ^0 – такие постоянные, что

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^N q_k A_k(l_k\varphi^0, k_k\psi^0) = 0, \\ &\sum_{k=1}^N q_k(\beta_k, d)A_k(l_k\varphi^0, k_k\psi^0) = 0, \quad N \geq 3. \end{aligned} \tag{8}$$

Тогда система (7) с граничными условиями

$$\varphi|_{\partial\Omega} = \varphi^0, \quad \psi|_{\partial\Omega} = \psi^0 \tag{9}$$

при $\forall\lambda \in R^+$ имеет тривиальное решение $\varphi = \varphi^0$, $\psi = \psi^0$.

Введем банаховы пространства $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ и $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$, $\alpha \in (0, 1]$.

Определение [4]. Точка λ^0 называется **точкой бифуркации задачи** (7), (9), если в любой окрестности точки $(\varphi^0, \psi^0, \lambda^0)$ найдется точка (φ, ψ, λ), удовлетворяющая системе (7), (9), и при этом

$$|\varphi - \varphi^0|_{2,\alpha,\Omega} + |\psi - \psi^0|_{2,\alpha,\Omega} > 0.$$

Так как в (9) путем сдвига можно перейти к однородным условиям, то в дальнейшем будем предполагать в (8), (9) $\varphi^0 = \psi^0 = 0$.

Введем банахово пространство E_1 вектор-функций $u = (\varphi(r), \psi(r))$; $\varphi, \psi \in C^{2,\alpha,\Omega}$; $(\nabla\varphi, d) = 0$, $(\nabla\psi, d) = 0$ при $r \in \Omega$, удовлетворяющих граничным условиям $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$, $\psi|_{\partial\Omega} = 0$ с нормой

$$\|u\|_{E_1} = \max(|\varphi|_{2,\alpha,\Omega}, |\psi|_{2,\alpha,\Omega}).$$

Пусть E_2 – банахово пространство вектор-функций $U = (U_1, U_2)$, где $U_1, U_2 \in C^{0,\alpha,\Omega}$ с нормой

$$\|U\|_{E_2} = \max(|U_1|_{0,\alpha,\Omega}, |U_2|_{0,\alpha,\Omega}).$$

Тогда задачу о существовании точки бифуркации λ^0 системы (7), (9) можно трактовать как задачу о точке бифуркации операторного уравнения

$$(L_0 - \lambda L_1)_u + \lambda R(u) = 0, \tag{10}$$

где

$$L_0 = \begin{bmatrix}\Delta & 0\\ 0 & \Delta\end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} L_1 &= \begin{bmatrix}\mu T_1 & \mu T_2\\ \nu T_3 & \nu T_4\end{bmatrix} \triangleq \Xi, \\ T_1 &\triangleq \sum_{i=1}^N q_i l_i \frac{\partial A_i(x,y)}{\partial x}\bigg|_{x=0,\,y=0}, \\ T_2 &\triangleq \sum_{i=1}^N q_i k_i \frac{\partial A_i(x,y)}{\partial y}\bigg|_{y=0,\,x=0}, \\ T_3 &\triangleq \sum_{i=1}^N q_i l_i(\beta_i, d) \frac{\partial A_i(x,y)}{\partial x}\bigg|_{x=0,\,y=0}, \\ T_4 &\triangleq \sum_{i=1}^N q_i k_i(\beta_i, d) \frac{\partial A_i(x,y)}{\partial y}\bigg|_{y=0,\,x=0}, \\ &\|R(u)\| = o(\|u\|). \end{aligned} \tag{11}$$

Операторы L^0 и L^1 в (14) – линейные ограниченные операторы из E_1 в E_2. При сформулированных условиях все особые точки оператора

$$L(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} L_0 - \lambda L_1$$

фредгольмовы [4]. Для вычисления точек бифуркации необходимо (но не достаточно) найти такие значения λ^*, для которых $N(L_0 - \lambda^* L_1) \neq \{0\}$.

Введем условия:
(III) $T_1 < 0$,
(IV) $T_1T_4 - T_2T_3 > 0$.

Если $\left.\frac{\partial \hat{f}_k}{\partial x}\right|_{x=y=0} > 0$, то неравенство III выполнено.

Введем матрицу

$$\|\Theta_{ij}\|_{i,j=1,\ldots,N},$$

где

$$\Theta_{ij} = q_iq_j(l_jk_i - k_jl_i)(\beta_j - \beta_i, d).$$

Если производные $\frac{\partial A_i}{\partial x}$, $\frac{\partial A_i}{\partial y}$ в точке $x = y = 0$ положительны и равны, $\Theta_{ij} > 0$, $i \neq j$, то условия III, IV будут выполнены. Очевидно, что при $\beta_i = \frac{d_i}{2\alpha_i}$ элементы Θ_{ij} будут неотрицательны в силу равенств

$$\operatorname{sign}\frac{q_i}{l_i} = \operatorname{sign}q, \quad \frac{(d_i, d)}{\alpha_i} = \frac{d^2}{\alpha}\frac{k_i}{l_i}.$$

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* III, IV. *Тогда матрица* Ξ *имеет два однократных собственных числа*

$$\chi_+ = \mu T_1 + o(1), \quad \mu = -\frac{8\pi\alpha|q|}{m},$$
$$\chi_- = \eta\varepsilon\frac{T_1T_4 - T_2T_3}{T_1} + o(\varepsilon), \quad \eta = \frac{4\pi|q|}{m} > 0 \tag{12}$$

при $\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{c^2} \to 0$.

Собственному числу χ_- *отвечают собственные векторы*

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{T_2}{T_1} \\ 1 \end{bmatrix} + O(\varepsilon), \quad \begin{bmatrix} c_1^* \\ c_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + O(\varepsilon)$$

соответственно матриц Ξ и Ξ'.

Введем однородную задачу Дирихле

$$-\Delta e = \mu e,$$
$$e|_{\partial\Omega} = 0. \tag{13}$$

Пусть

(V) μ_n – собственное число задачи Дирихле (13), $\{e_{in}\}$, $i = 1, \ldots, j_n$, – ортонормированный базис в подпространстве собственных функций, $0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots$

Лемма 3. *Пусть* $\chi_- < 0$, $(c_1, c_2)'$ *– собственное число и собственный вектор матрицы* Ξ, $a(c_1^*, c_2^*)'$ *– собственный вектор матрицы* Ξ' *(см. лемму 2). Пусть выполнено условие* V.

Тогда точки $\lambda_n = -\mu_n/\chi_-$ *будут* j_n*-кратными фредгольмовыми точками оператора* $L_0 - \lambda L_1$, *векторы*

$$e_{in}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad e_{in}\begin{pmatrix} c_1^* \\ c_2^* \end{pmatrix}, \quad i = 1, \ldots, j_n,$$

образуют базисы соответственно в подпространствах

$$N(L_0 - \lambda_nL_1), \quad N^*(L_0 - \lambda_nL_1),$$

корневое число оператор-функции $L_0 - \lambda L_1$ *в точке* λ_n *равно* j_n.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* (8) *при* $\varphi^0 = \psi^0 = 0$, *условия* I–V, *причем* μ_n *– нечетнократное собственное число. Пусть* $\chi_- < 0$ *– собственное число матрицы* Ξ, *определенное в лемме* 2. *Тогда*:

1) $\lambda_n = -\mu_n/\chi_-$ *есть точка бифуркации системы ВМ*;

2) *для точки* $(\lambda_n, 0) \in R^1 \times E_1$ *найдется компонента* $J_{\lambda_n} = \langle(\lambda, u)\rangle$ *решений задачи* (10). *При этом компонента* J_{λ_1} *не ограничена в пространстве* $R^1 \times E_1$, *а компонента* J_{λ_n}, $n \geq 2$, *или не ограничена в* $R^1 \times E_1$, *или содержит, кроме точки* $(\lambda_n, 0)$, *точку* $(\lambda_m, 0)$, *где* $\lambda_m = -\mu_m\backslash\chi_-$, μ_m *– собственное число задачи Дирихле* (13), $\mu_m \neq \mu_n$.

На основании леммы 3 доказательство вытекает из теоремы 2.1 работы [3] и теоремы 1.3 работы [5].

Результаты теории ветвления [3–5] позволяют построить асимптотику ветвей решения в окрестности точек бифуркации системы ВМ, а также разработать итерационные методы ее решения [6]. В некоторых специальных случаях [2, с. 268] система (7) сводится к уравнению типа sinh-Gordon, когда возможно построение точных решений на основе методов работы [7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Власов А.А.* Теория многих частиц. М.: ГИТТЛ, 1950. 348 с.
2. *Markov Y., Rudykh G., Sidorov N. et al.* // Steady-state solutions of the Vlasov–Maxwell system and their stability. Acta Appl. Math. 1992. V. 28. P. 253–293.
3. *Сидоров Н.А., Треногин В.А.* Исследование точек бифуркации и непрерывных ветвей решений нелинейных уравнений. В сб.: Дифференциальные и интегральные уравнения. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1972. № 1. С. 216–247.
4. *Вайнберг М.М., Треногин В.А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1968. 527 с.
5. *Rabinovich P.H.* Some global results for nonlinear eigen value problems // J. Function Anal. 1971. № 7. P. 487–513.
6. *Сидоров Н.А.* // ДАН. 1994. Т. 336. № 5. С. 592–594.
7. *Андреев В.К., Капцов О.В., Пухначев В.В., Родионов А.А.* Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике. Новосибирск: Наука, 1994. 318 с.