



# Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. G. Khachatryan, Investigation of stability of stationary and periodic solutions of non-linear parabolic system, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1979, Volume 84, 286–304

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.88

January 16, 2025, 19:24:51



ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ И ПЕРИОДИЧЕСКИХ  
РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

§ I. Введение

В работе дано обоснование метода линеаризации в задаче об устойчивости стационарных и периодических решений нелинейных параболических систем в пространствах  $C^s(\Omega)$  с любым  $s \geq 0$ .

Вопросам устойчивости решений нестационарных уравнений и систем посвящена обширная литература (см. напр., работы [1-7]). Однако применяемая в большинстве этих работ техника исследования нестационарных уравнений в гильбертовых пространствах и в пространствах  $L_p(\Omega)$  позволяет охватить сравнительно узкий класс нелинейных задач. Значительно более широкий класс задач удастся рассмотреть, если в качестве основного пространства выбрать пространство  $C^s$ , как это сделано в работах В.С.Белоносова, М.П.Вишневого и Т.И.Зеленяка [8-10]. Аналитической основой этих работ послужили оценки решения линейных параболических начально-краевых задач в гильбертовских нормах, полученные В.А.Солонниковым [11].

В [8,10] показано, что стационарное решение  $u(x)$  нелинейной  $2b$ -параболической начально-краевой задачи устойчиво относительно малых возмущений из класса  $C^{2b+d}$ ,  $d \in (0,1)$ , если спектр соответствующей стационарной линеаризованной на  $u(x)$  задачи расположен в левой полуплоскости комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ . Более того, в одномерном случае с помощью полученных в [8] оценок решений линейных задач в весовых гильбертовских пространствах функций установлено, что если исходная система линейно зависит от производных  $D^k u$  при  $k < |k| \leq 2b$ , то упомянутое решение устойчиво также относительно малых возмущений из класса  $C^s$ ,  $s \geq k$ .

В настоящей работе этот результат распространяется на многомерный случай. Необходимые для этого оценки решений линейных задач получены В.А.Солонниковым и автором [12,13].

Результат этой работы был недавно анонсирован В.С.Белоносовым [14].

Введем необходимые нам функциональные пространства. Пусть  $\Omega$  - область пространства  $R^n$  с гладкой границей  $S$ . Обозначим через  $C^s(\Omega)$ ,  $s \geq 0$  пространство функций, заданных в  $\Omega$ , [5] раз непрерывно дифференцируемых и имеющих конечную норму

$$|u|_{\Omega}^{(s)} = \sum_{|\alpha| \leq s} |D^{\alpha} u(x)|_{\Omega} + [u]_{\Omega}^{(s)},$$

где  $D^{\alpha} u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ ,  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ .

$$|v|_{\Omega} = \sup_{x \in \Omega} |v(x)|, \quad [u]_{\Omega}^{(s)} = |D^s u|_{\Omega}$$

при целом  $s$ ,

$$[u]_{\Omega}^{(s)} = \sum_{|\alpha| = |s|} \sup_{x, y \in \Omega} \frac{|D^{\alpha} u(x) - D^{\alpha} u(y)|}{|x - y|^{|s| - 1}}$$

при нецелом  $s$ .

Пространством  $C^{\ell, \frac{\ell}{2\delta}}(Q_T)$  при любом нецелом  $\ell > 0$  и целом  $\delta > 0$  назовем пространство функций, заданных в  $Q_T = \Omega \times (0, T)$  ( $x \in \Omega, t \in (0, T)$ ) и имеющих конечную норму

$$|u|_{Q_T}^{(\ell)} = [u]_{Q_T}^{(\ell)} + \sum_{2\delta k + |\alpha| \leq \ell} |D_t^k D_x^{\alpha} u(x, t)|_{Q_T},$$

где

$$[u]_{Q_T}^{(\ell)} = \sup_{\substack{t \geq T \\ t \leq T}} [u]_{\Omega}^{(\ell)} + \sum_{\substack{\tau < t \\ \ell - 2\delta k - |\alpha| \leq \ell}} \sup_{\substack{\tau < t \\ \tau < T}} \frac{|D_t^k D_x^{\alpha} u(x, t) - D_t^k D_x^{\alpha} u(x, \tau)|}{|t - \tau|^{\frac{\ell - 2\delta k - |\alpha|}{2\delta}}}. \quad (I.1)$$

Определим теперь весовое пространство  $C_S^{\ell, \frac{\ell}{2\delta}}(Q_T)$  с любым  $S \in [0, \ell]$  как замыкание множества функций из  $C^{\ell, \frac{\ell}{2\delta}}(Q_T)$  в норме

$$|u|_{S, Q_T}^{(\ell)} = \sup_{t < T} t^{\frac{\ell - S}{2\delta}} [u]_{Q_t}^{(\ell)} + \sum_{\substack{t < \tau \\ S < 2\delta k + |\alpha| \leq \ell}} \sup_{t < \tau} t^{\frac{2\delta k + |\alpha| - S}{2\delta}} |D_t^k D_x^{\alpha} u(x, t)|_{\Omega} + [u]_{Q_T}^{(S)} + \sum_{2\delta k + |\alpha| \leq S} \sup_{t < T} |D_t^k D_x^{\alpha} u(x, t)|_{\Omega}. \quad (I.2)$$

Здесь  $Q_t' = \Omega \times (\frac{t}{2}, t)$ , а  $[u]_{Q_t}^{(S)}$  как при целом, так и

при нецелом  $S$  определяется формулой (I.1). При  $S < 0$  определим пространство  $C_S^{\ell, \frac{\ell}{2\delta}}(Q_T)$  той же формулой (I.2) без двух последних членов правой части. Очевидно, что  $C_e^{\ell, \frac{\ell}{2\delta}}(Q_T) = C^{\ell, \frac{\ell}{2\delta}}(Q_T)$ .

Аналогично определяются пространства  $C^{\ell, \frac{\ell}{2b}}(S_T)$  и  $C^{\ell, \frac{\ell}{2b}}(S_T)$ ,  $S_T = S \times (0, T)$

Приведем нужные нам свойства пространств  $C^{\ell, \frac{\ell}{2b}}(Q_T)$

ЛЕММА I.1. Если  $f \in C^{\alpha}_s(Q_T)$  и  $u \in C^{2b+\alpha, \frac{2b+\alpha}{2b}}(Q_T)$ ,  $S \geq 0$ , то функция  $g(x, t) = f(x, t) \mathcal{D}_x^\alpha u(x, t)$ ,  $|\alpha|+1 \leq \beta \leq 2b$  удовлетворяет неравенству

$$|g(x, t)|_{S-2b, Q_T}^{(\alpha)} \leq C \|u\|_{S, Q_T}^{(2b+\alpha)} \|f\|_{\alpha, Q_T}^{(\alpha)} T^{\frac{2b-|\beta|}{2b}} \quad (I.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем, во-первых,

$$\sup_{t < T} t^{\frac{2b-s}{2b}} |g(x, t)|_{\Omega} \leq T^{\frac{2b-|\beta|}{2b}} \sup_{t < T} \|f\|_{\Omega} \sup_{t < T} t^{\frac{|\beta|-s}{2b}} |\mathcal{D}_x^\beta u|_{\Omega} \quad (I.4)$$

Оценим теперь  $t^{\frac{2b-s}{2b}} [g]_{Q'_t}^{(\alpha)}$ . Из неравенства

$$[g]_{Q'_t}^{(\alpha)} \leq \|f\|_{Q'_t} [ \mathcal{D}_x^\beta u ]_{Q'_t}^{(\alpha)} + [f]_{Q'_t}^{(\alpha)} | \mathcal{D}_x^\beta u |_{Q'_t}$$

следует

$$\sup_{t < T} t^{\frac{2b-s}{2b}} [g]_{Q'_t}^{(\alpha)} \leq T^{\frac{2b-|\beta|}{2b}} (\|f\|_{Q_T} \sup_{t < T} t^{\frac{|\beta|-s}{2b}} | \mathcal{D}_x^\beta u |_{Q'_t}^{(\alpha)} +$$

$$\sup_{t < T} t^{\frac{2b-s}{2b}} [f]_{Q'_t}^{(\alpha)} \sup_{t < T} t^{\frac{|\beta|-s}{2b}} | \mathcal{D}_x^\beta u |_{\Omega}).$$

Складывая это неравенство с (I.4) выводим (I.3), что и требовалось.

Следующие три свойства  $C^{\ell, \frac{\ell}{2b}}(Q_T)$  приведены в книге [8]:

I. Если  $S_1 \leq S_2$  и  $\ell_1 \leq \ell_2$ , то  $C^{\ell_2, \frac{\ell_2}{2b}}(Q_T) \subset C^{\ell_1, \frac{\ell_1}{2b}}(Q_T)$ , при этом для любой функции из класса  $C^{\ell_2, \frac{\ell_2}{2b}}(Q_T)$  имеет место оценка

$$\|u\|_{S_1, Q_T}^{\ell_1} \leq C \|u\|_{S_2, Q_T}^{\ell_2} \quad (I.5)$$

где  $C$  зависит от  $\ell_1, \ell_2, S_1, S_2$  и  $T$ .

2. Если  $u \in C^{\ell-p, \frac{\ell-p}{2b}}(Q_T)$  и  $p = 2bk + |\alpha|$ , то  $\mathcal{D}_x^\alpha \mathcal{D}_t^k u \in C^{\ell-p, \frac{\ell-p}{2b}}(Q_T)$ , причем

$$| \mathcal{D}_x^\alpha \mathcal{D}_t^k u |_{S-p, Q_T}^{\ell-p} \leq C \|u\|_{S, Q_T}^{\ell} \quad (I.6)$$

3. Если  $u \in C^{\ell, \frac{\ell}{2b}}(Q_T)$ , где  $|\alpha| < \ell$  и  $\mathcal{D}_x^{[\alpha]} u(x, t)|_{t=0} = 0$ ,

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} | \mathcal{D}_x^{[\alpha]} u |_{\alpha, Q_T}^{(\ell-|\alpha|)} = 0 \quad (I.7)$$

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - A(x, t, \frac{\partial}{\partial x}) u = f(x, t) \quad (I.8)$$

$$B(x, t, \frac{\partial}{\partial x})u|_{x \in S} = \Phi(x, t) \quad (I.9)$$

$$u|_{t=0} = \psi(x), \quad (I.10)$$

где  $u = (u_1, \dots, u_m)$ ,  $f = (f_1, \dots, f_m)$ ,  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$  (I.8) - система,  $2b$  - параболическая по Петровскому,  $B$  - матричный дифференциальный оператор с  $\tau = b m$  строками и  $m$  столбцами, удовлетворяющий условию дополнителности [II].  $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_m)$ . Предполагается, что порядков оператора  $B_{qj}(x, t, \frac{\partial}{\partial x})$  - элемента матрицы  $B$  - не превосходит  $b_q + 2b$ , причем  $-2b \leq b_q \leq -1$ . В [I2, I3] доказана следующая теорема.

**ТЕОРЕМА I.I.** Пусть  $0 < s < 2b$ ,  $S \in C^{2b+d}$ ,  $d \in (0, 1)$  коэффициенты оператора  $A$  принадлежат  $C^{d, \frac{d}{2b}}(Q_T)$ , операторов  $B_{qj} \in C^{d-b_q, \frac{d-b_q}{2b}}(S_T)$ . Задача (I.8)-(I.10) имеет единственное решение  $u = (u_1, \dots, u_m)$ ,  $u_j \in C^{s, \frac{s}{2b}}(Q_T)$  при любых  $f_j \in C^{s-2b}(Q_T)$ ,  $\varphi_j \in C^s(\Omega)$ ,  $\Phi_q \in C^{s-2b+b_q}(S_T)$  удовлетворяющих условиям согласования

$$\sum_{j=1}^m B_{qj}(x, 0, \frac{\partial}{\partial x}) \varphi_j|_S = \Phi_q(x, 0) \quad (I.11)$$

для тех  $q$ , для которых  $b_q + 2b \leq s$  и при всех  $t \leq T$  имеет место неравенство

$$\sum_{j=1}^m \|u_j\|_{s, Q_T}^{(2b+d)} \leq C(T) \left[ \sum_{j=1}^m \|f_j\|_{s-2b, Q_T}^{(d)} + \sum_{q=1}^r \|\Phi_q\|_{s-b_q-2b, S_T}^{(d)} + \sum_{j=1}^m \|\varphi_j\|_{\Omega}^{(s)} \right] \quad (I.12)$$

Если указанные выше условия выполнены при  $S=0$  и, кроме того, старшие коэффициенты оператора  $A$  непрерывно дифференцируемы по  $x$  и при некотором  $d \in (0, 1]$  конечна норма

$\sup_{t < T} t^{1-\frac{d}{2b}} \|f(x, t)\|_{\Omega}$ , то задача (I.8)-(I.10) имеет единственное решение  $u \in C_0^{2b+d, 1+\frac{d}{2b}}(Q_T)$ , и оно удовлетворяет неравенству

$$\sum_{j=1}^m \|u_j\|_{0, Q_T}^{(2b+d)} \leq C(T) \left[ \sum_{j=1}^m \|f_j\|_{-2b, Q_T}^{(d)} + \sum_{q=1}^r \|\Phi_q\|_{-2b-b_q, S_T}^{(d)} + \sum_{j=1}^m \sup_{t \leq T} t^{1-\frac{d}{2b}} \|\varphi_j\|_{\Omega} \right] \quad (I.13)$$

Постоянная  $C(T)$  в неравенствах (I.12), (I.13) может расти при  $T \rightarrow \infty$ , однако мы будем пользоваться этими неравенствами при конечном  $T$ .

ТЕОРЕМА I.2. Если операторы  $A$  и  $B$  удовлетворяют условиям теоремы I.1 при  $T = \infty$ , то в области  $Q_{t_0, t} = \Omega \times (t_0, t)$ , где  $t > t_0 > 0$ , решение задачи (I.8)-(I.10) подчиняется неравенству

$$|u|_{Q_{t_0, t}}^{(2b+\alpha)} \leq C \left( |f|_{Q_{t_0, t}}^{(\alpha)} + |u(x, t_0)|_{\Omega}^{(2b+\alpha)} + |u|_{Q_{t_0, t}}^{(\alpha)} \right) \quad (I.14)$$

с постоянной  $C$ , не зависящей от  $t$ .

Независимость постоянной  $C$  от  $t$  легко усматривается при доказательстве неравенства (I.14) методом Шаудера. Оценки типа (I.14) использовались для исследования устойчивости решений нестационарных задач в работах [8, 10].

## § 2. Разрешимость нелинейной задачи

Рассмотрим нелинейную задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + A(x, t, \frac{\partial}{\partial x}) u &= f(x, t, u, \nabla u, \dots, \nabla_{2b} u) \\ B(x, t, \frac{\partial}{\partial x}) u|_{x \in S} &= 0, \\ u|_{t=0} &= \varphi(x), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $\nabla_x u$  - вектор компонентами которого являются всевозможные производные  $D^{\beta} u_i$  порядка  $|\beta| = \tau$  компонент вектора  $u$ ,  $A$  и  $B$  подчиняются условиям §1, а вектор  $f$  имеет вид

$$\begin{aligned} f(x, t, p^{(0)}, p^{(1)}, \dots, p^{(2b)}) &= f_0(x, t, p^{(0)}, p^{(1)}, \dots, p^{(k)}) + \\ &+ \sum_{i=1}^m \sum_{|\beta| \leq 2b} f_j^{\beta}(x, t, p^{(0)}, p^{(1)}, \dots, p^{(k)}) p_j^{\beta}, \quad 0 \leq k < 2b \\ (p^{(\tau)} - \text{вектор с компонентами } p_j^{\beta}, |\beta| = \tau \text{ той же размерности, что } \nabla_x p). \end{aligned}$$

Предположим, что вектор  $f_0$  и матрицы  $f_i^{\beta}$  обладают следующими свойствами:

а)  $f_0, f_i^{\beta}$  определены на множестве  $K_{p, Q_T} = \{(x, t) \in Q_T, |p^{(k)}| \leq \rho\}$ .

б) при фиксированных  $(x, t) \in Q_T$   $f_0, f_i^{\beta}$  дважды непрерывно

дифференцируемы по аргументам  $p_i^\beta$ .

в) при фиксированных  $p^\beta f_0$  и  $f_i^\beta$ , а также их производные по  $p_i^\beta$  принадлежат  $C^{d, \frac{1}{2b}}(Q_T)$ ,  $\lambda \in (0, 1)$  и их нормы ограничены постоянной, не зависящей от  $p_i^\beta$

$$\text{г) } f_0(x, t, 0, \dots, 0) = \frac{\partial f_0}{\partial p_i^\beta} \Big|_{p_i^\beta=0} = 0, f_i(x, t, 0, \dots, 0) = 0.$$

Для доказательства разрешимости задачи (2.1) и устойчивости решения нам понадобятся некоторые оценки функции

$$f(x, t, u, \dots, \nabla_{2b} u).$$

ЛЕММА 2.1. Справедливо неравенство

$$|g(x, t, u, \dots, \nabla_k u)|_{0, Q_T}^{(\lambda)} \leq C_1 |u|_{k, Q_T}^{(\lambda+k)}, \quad (2.2)$$

где  $g$  - какая-либо из функций  $f_0, f_i, \frac{\partial f_0}{\partial p_i^\beta}$ . Если  $g = \frac{\partial f_i}{\partial p_j^\beta}$ , то

$$|g(x, t, u, \dots, \nabla_k u)|_{0, Q_T}^{(\lambda)} \leq C_2 (|u|_{k, Q_T}^{(\lambda+k)} + 1). \quad (2.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что

$$|g(x, t, u, \dots, \nabla_k u)|_{0, Q_T}^{(\lambda)} \leq \sup_{t \in T} \int_{\Omega} |g(x, t, u, \dots, \nabla_k u)|_{\Omega}^{(\lambda)}$$

$$+ \sup_{(y, \tau) \in Q_T} [g(x, t, u(y, \tau), \dots, \nabla_k u(y, \tau))]^{(\lambda)} + \sup_{Q_T} [g(y, \tau, u(x, t), \dots, \nabla_k u(x, t))]^{(\lambda)}$$

Так как  $g$  удовлетворяет условию Липшица по  $p_i^\beta$ , то последний член не превосходит  $C \sum_{j=0}^k |\nabla_j u|_{0, Q_T}^{(\lambda)} \leq C |u|_{k, Q_T}^{(\lambda+k)}$ . Первые два слагаемых правой части ограничены некоторой постоянной  $C(T)$ , но если  $g(x, t, 0, \dots, 0) = 0$ , то из формулы

$$g(x, t, u, \dots, \nabla_k u) = \sum_{j=1}^m \sum_{|n| \leq k} \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial p_i^\beta}(x, t, \theta u, \dots, \theta \nabla_k u) d\theta \partial^n u_j$$

следует, что и они оцениваются через  $C |u|_{k, Q_T}^{(\lambda+k)}$ . Лемма доказана.

ЛЕММА 2.2. Для любых  $u, v \in C_S^{2b+d, \frac{1}{2b}}(Q_T)$ , удовлетворяющих условиям  $|u| \leq \tau, \dots, |\nabla_k u| \leq \tau, |v| \leq \tau, \dots, |\nabla_k v| \leq \tau$ , справедливо неравенство

$$|f(x, t, u, \dots, \nabla_{2b} u) - f(x, t, v, \dots, \nabla_{2b} v)|_{S-2b, Q_T}^{(\lambda)} \leq C(T) \left\{ |u|_{k, Q_T}^{(\lambda+k)} |u-v|_{S, Q_T}^{(2b+\lambda)} + (|u|_{k, Q_T}^{(\lambda+k)} + |v|_{k, Q_T}^{(\lambda+k)}) |u-v|_{k, Q_T}^{(\lambda+k)} \right\}$$

$$+ |\nu|_{S, Q_T}^{(2b+d)} (|\mu|_{K, Q_T}^{(k+d)} + |\nu|_{K, Q_T}^{(k+d)} + 1) |u - \nu|_{K, Q_T}^{(k+d)} \}. \quad (2.4)$$

Воспользуемся формулами

$$f_0(x, t, \nu, \dots, \nabla_k \nu) - f_0(x, t, u, \dots, \nabla_k u) =$$

$$= \sum_{j=1}^m \sum_{|\alpha| \leq k} \int_0^1 \frac{\partial f_0}{\partial p_i^\alpha}(x, t, u + \theta \omega, \dots, \nabla_k u + \theta \nabla_k \omega) d\theta \mathcal{D}^\alpha \omega_i, \quad (2.5)$$

$$f_i^\beta(x, t, \nu, \dots, \nabla_k \nu) \mathcal{D}^\beta \nu_i - f_i^\beta(x, t, u, \dots, \nabla_k u) \mathcal{D}^\beta u_i =$$

$$= f_i^\beta(x, t, u, \dots, \nabla_k u) \mathcal{D}^\beta \omega_i +$$

$$+ \sum_{j=1}^m \sum_{|\alpha| \leq k} \int_0^1 \frac{\partial f_i^\beta}{\partial p_i^\alpha}(x, t, u + \theta \omega, \dots, \nabla_k u + \theta \nabla_k \omega) d\theta \mathcal{D}^\alpha \omega_j \mathcal{D}^\beta \omega_i. \quad (2.6)$$

Из этих формул и из леммы I.I и 2.I следует, что

$$\| |f_0(x, t, \nu, \dots, \nabla_k \nu) - f_0(x, t, u, \dots, \nabla_k u) |_{S-2b, Q_T}^{(d)} \leq$$

$$\leq C (|\mu|_{K, Q_T}^{(d+k)} + |\nu|_{K, Q_T}^{(d+k)}) |\omega|_{K+S-2b, Q_T}^{(k+d)},$$

$$|f_i^\beta(x, t, \nu, \dots, \nabla_k \nu) \mathcal{D}^\beta \nu_i - f_i^\beta(x, t, u, \dots, \nabla_k u) \mathcal{D}^\beta u_i |_{S-2b, Q_T}^{(d)} \leq$$

$$\leq C |\mu|_{K, Q_T}^{(k+d)} |\omega|_{S, Q_T}^{(2b+d)} + C |\nu|_{S, Q_T}^{(2b+d)} \sum_{j=1}^m \sum_{|\alpha| \leq k} \int_0^1 \left| \frac{\partial f_i^\beta}{\partial p_i^\alpha} \mathcal{D}^\alpha \omega_j \right|_{0, Q_T}^{(d)} d\theta.$$

Подынтегральное выражение в правой части оценки с помощью легко доказываемого неравенства

$$|f(x, t) g(x, t) |_{0, Q_T}^{(d)} \leq |f|_{0, Q_T}^{(d)} |g|_{0, Q_T}^{(d)} \quad (2.8)$$

и воспользуемся оценкой (2.8). Это дает

$$|f_i^\beta(x, t, \nu, \dots, \nabla_k \nu) \mathcal{D}^\beta \nu_i - f_i^\beta(x, t, u, \dots, \nabla_k u) \mathcal{D}^\beta u_i |_{S-2b, Q_T}^{(d)} \leq$$

$$\leq C |\nu|_{S, Q_T}^{(2b+d)} (|\mu|_{K, Q_T}^{(d+k)} + |\nu|_{K, Q_T}^{(d+k)} + 1) |\omega|_{K, Q_T}^{(k+d)} +$$

$$+ C |\mu|_{K, Q_T}^{(k+d)} |\omega|_{S, Q_T}^{(2b+d)}.$$

Из этого неравенства и из (2.7) и следует (2.4). Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Для всех  $u, \nu \in C_{S, 2b+d, 1+\frac{1}{2b}}^{2b+d, 1+\frac{1}{2b}}(Q_T)$ , удовлетворяющих условиям леммы,

$$|f(x, t, u, \dots, \nabla_{2b} u) - f(x, t, \nu, \dots, \nabla_{2b} \nu) |_{S-2b, Q_T}^{(d)} \leq$$



$$\leq \varepsilon \|u\|_{S, Q_T}^{(2b+d)} + \|v\|_{S, Q_T}^{(2b+d)} \|u-v\|_{S, Q_T}^{(2b+d)}, \quad (2.9)$$

где  $\varepsilon(\rho)$  - неубывающая непрерывная функция, причем  $\varepsilon(0) = 0$  в частности,

$$\|f(x, t, v, \dots, \nabla_{2b} v)\|_{S-2b, Q_T}^{(d)} \leq \varepsilon(\|v\|_{S, Q_T}^{(2b+d)}) \|v\|_{S, Q_T}^{(2b+d)} \quad (2.10)$$

ЛЕММА 2.3. Предположим, что функции и удовлетворяют условиям а), б), в), г) в области  $Q_\infty = \Omega \times (0, \infty)$ . Тогда для любого вектора  $v \in C^{2b+d, 1+\frac{d}{2b}}(Q_T)$ , такого, что  $\|v\| \leq \tau, \dots, |\nabla_k| \leq \tau$ , справедлива оценка

$$\|e^{at} f(x, t, e^{-at} v, \dots, \nabla_{2b} e^{-at} v)\|_{Q_\infty}^{(d)} \leq C_2 (\|v\|_{Q_\infty}^{(2b+d)})^2, \quad (2.11)$$

если  $a \geq 0$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция  $f(x, t, p^{(0)}, \dots, p^{(2b)})$  и ее производные по  $p_j^{(k)}$  обращаются в нуль при  $p_j^{(k)} = 0$ , поэтому

$$f(x, t, p^{(0)}, \dots, p^{(2b)}) = \sum_{i,j=1}^m \sum_{|k| \leq 2b} \int (1-\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial p_i^{(k)} \partial p_j^{(k)}}(x, t, \theta p^{(0)}, \dots, \theta p^{(2b)}) \times p_i^{(k)} p_j^{(k)} \quad (2.12)$$

Из этой формулы следует, что

$$e^{at} \|f(x, t, e^{-at} v, \dots, \nabla_{2b} e^{-at} v)\|_{\Omega} \leq C e^{-at} \sum_{|k| \leq 2b} |\partial^k v|^2 \leq C (\|v\|_{Q_\infty}^{(2b+d)})^2 e^{-at}. \quad (2.13)$$

Оценим теперь полуnormу

$$\begin{aligned} & \|e^{at} f(x, t, e^{-at} v(x, t), \dots, e^{-at} \nabla_{2b} v(x, t))\|_{\Omega} \leq \\ & \leq \sup_{y \in \Omega} [e^{at} f(x, t, e^{-at} v(y, t), \dots, e^{-at} \nabla_{2b} v(y, t))]_{\Omega}^{(d)} + \\ & + \sup_{y \in \Omega} [e^{at} f(y, t, e^{-at} v(x, t), \dots, e^{-at} \nabla_{2b} v(x, t))]_{\Omega}^{(d)}. \end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части также оценим с помощью формулы (2.12) через  $C (\|v\|_{Q_\infty}^{(2b+d)})^2$ . Для оценки второго слагаемого воспользуемся формулой

$$f(y, t, p^{(0)}, \dots, p^{(2b)}) = \sum_{i,j=1}^m \sum_{|k| \leq 2b} \int \frac{\partial^2 f}{\partial p_i^{(k)} \partial p_j^{(k)}}(y, t, \theta p^{(0)}, \dots, \theta p^{(2b)}) d\theta p_i^{(k)}$$

из которой следует

$$\begin{aligned} & [e^{at} f(y, t, e^{-at} v(x, t), \dots, e^{-at} \nabla_{2\beta} v(x, t))]_{\Omega}^{(d)} \leq \\ & \leq C \left\{ \sum_{i=1}^m \sum_{|\beta| \leq 2\beta} |D^{\beta} v_i|_{\Omega} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial f}{\partial p_i} (y, t, \theta e^{at} v(x, t), \dots, \theta e^{-at} \nabla_{2\beta} v(x, t)) \right|_{\Omega}^{(d)} d\theta + \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^m \sum_{|\beta| \leq 2\beta} [D^{\beta} v_i]_{\Omega}^{(d)} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial f}{\partial p_i} (y, t, \theta e^{-at} v(x, t), \dots, \theta e^{-at} \nabla_{2\beta} v(x, t)) \right|_{\Omega} d\theta \right\} \leq \\ & \leq C (|v|_{Q_t}^{(2\beta+d)})^2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\sup_{t>0} [e^{at} f(x, t, e^{-at} v(x, t), \dots, e^{-at} \nabla_{2\beta} v(x, t))]_{\Omega}^{(d)} \leq C (|v|_{Q_{\infty}}^{(2\beta+d)})^2. \quad (2.14)$$

Переходим к оценке постоянной Гельдера по переменной функции  $e^{at} F(x, t) \equiv g(x, t)$ , где  $F(x, t) = f(x, t, e^{-at} v(x, t), \dots, e^{-at} \nabla_{2\beta} v(x, t))$ . Имеем

$$\begin{aligned} g(x, t+h) - g(x, t) &= [e^{a(t+h)} - e^{at}] F(x, t+h) + \\ &+ e^{at} [F(x, t+h) - F(x, t)]. \end{aligned}$$

Рассуждая, как при доказательстве оценки (2.13), можно показать, что

$$|F(x, t+h) - F(x, t)| \leq C e^{-at} (|v|_{Q_{\infty}}^{(2\beta+d)})^2 h^d$$

Учитывая (2.13), получаем

$$|g(x, t+h) - g(x, t)| \leq C [(1 - e^{-ah}) + h^d] (|v|_{Q_{\infty}}^{(2\beta+d)})^2,$$

а значит

$$\sup_{h>0} \frac{|g(x, t+h) - g(x, t)|}{h^d} \leq C_1 (|v|_{Q_{\infty}}^{(2\beta+d)})^2.$$

Отсюда и из (2.13), (2.14) следует (2.11). Лемма доказана.

Докажем теперь основной результат этого параграфа.

**ТЕОРЕМА 2.1.** Пусть  $S \in C^{2\beta+d}$ , матрицы  $A$  и  $B$  удовлетворяют условиям теоремы 1.1 в области  $Q_T$ , а вектор  $f$  - условиям а)-г). Существуют такие постоянные  $M(T)$  и  $\delta(T)$ , что если  $\psi \in C^5(\Omega)$ , где  $S \in [k, 2\beta)$ , а при  $k=0$  то  $S \in (0, 2\beta)$ , и если  $|\psi|_{\Omega}^{(5)} < \delta(T)$  и выполняется условие согласования (1.11), то задача (2.1) имеет единственное решение в пространстве  $C_S^{2\beta+d, 1+\frac{1}{2\beta}}(Q_T)$ .

$$\|u\|_{S, Q_T}^{(2b+d)} \leq M(T) \|\varphi\|_{\Omega}^{(S)}$$

Теорема справедлива и при  $K=S=0$ , если  $f_1^p = 0$  для  $|p|=2b$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала  $S > 0$ . Как и в теореме 6.4 [8], установим разрешимость задачи (2.1) при всех  $\varphi \in C^S(\Omega)$ , удовлетворяющих условию  $\|\varphi\|_{\Omega}^{(S)} \leq \delta_0(T)$ , с помощью принципа сжатых отображений. Возьмем в качестве  $M(T)$  и  $\delta_0(T)$  числа, удовлетворяющие соотношениям

$$M(T) \geq 2C(T), \quad M(T)\delta_0(T) \leq \tau, \quad \varepsilon(M(T)\delta_0(T))M(T) \leq 1, \\ \varepsilon(2M(T)\delta_0(T))C(T) < 1$$

где  $C(T)$  - постоянная в неравенстве (1.12), а  $\varepsilon(\rho)$  - та же функция, что в (2.10).

Обозначим через  $\hat{C}_S^{2b+d}(Q_T)$  множество векторов из  $C_S^{2b+d, 1+\frac{d}{2b}}(Q_T)$ , удовлетворяющих условию  $u(x, 0) = \varphi(x)$  и неравенству  $\|u\|_{S, Q_T}^{(2b+d)} \leq M(T) \|\varphi\|_{\Omega}^{(S)}$ . В силу теоремы 1.1, это множество непусто. На  $\hat{C}_S^{2b+d}(Q_T)$  определим оператор  $V$ , взяв в качестве  $u = V(\varphi)$  решение задачи (1.8)-(1.10) с вектором  $f(x, t, \vartheta_1, \dots, \nabla_{2b} \vartheta_1)$  в правой части. Этот вектор также принадлежит  $\hat{C}_S^{2b+d}(Q_T)$ , так как в силу (1.12) и (2.10)

$$\|V(\varphi)\|_{S, Q_T}^{(2b+d)} \leq C(T) (\|\varphi\|_{\Omega}^{(S)} + \|f(x, t, \vartheta_1, \dots, \nabla_{2b} \vartheta_1)\|_{S-2b}^{(d)}) \leq$$

$$\leq C(T) [\|\varphi\|_{\Omega}^{(S)} + \varepsilon(\|v\|_{S, Q_T}^{(2b+d)}) \|v\|_{S, Q_T}^{(2b+d)}] \leq$$

$$\leq C(T) (1 + \varepsilon(M(T) \|\varphi\|_{\Omega}^{(S)})) M(T) \|\varphi\|_{\Omega}^{(S)} \leq 2C(T) \|\varphi\|_{\Omega}^{(S)} \leq \quad (2.15)$$

Далее, оператор  $V$  сжимающий на  $\hat{C}_S^{2b+d, 1+\frac{d}{2b}}(Q_T)$ , так как

$$\|V(\vartheta_1) - V(\vartheta_2)\|_{S, Q_T}^{(2b+d)} \leq C(T) \|f(x, t, \vartheta_1, \dots, \nabla_{2b} \vartheta_1) -$$

$$- f(x, t, \vartheta_2, \dots, \nabla_{2b} \vartheta_2)\|_{S-2b, Q_T}^{(d)} \leq$$

$$\leq C(T) \varepsilon(2M(T)\delta_0(T)) \|\vartheta_1 - \vartheta_2\|_{S, Q_T}^{(2b+d)} < \|\vartheta_1 - \vartheta_2\|_{S, Q_T}^{(2b+d)}$$

В силу принципа сжатых отображений, в  $\hat{C}_S^{2b+d}(Q_T)$  есть единствен-

ное решение задачи (2.1). Покажем, что оно единственно в  $C_S^{2b+d, 1+\frac{d}{2b}}(Q_T)$ , если  $\|\varphi\|_{\Omega}^{(S)} \leq \delta_0(T)$ , где  $\delta_0(T) \in (0, \delta_0(T))$

Пусть  $v(x, t) \in C_S^{2b+d, 1+\frac{d}{2b}}(Q_T)$  какое либо решение задачи (2.1), а

$t_0 < T$  - точная верхняя граница тех  $t$ , для которых  $v(x,t) = u(x,t)$  при любом  $x \in \Omega$ . Вектор  $w = u - v$  удовлетворяет при  $t \in (t_0, T)$  соотношениям

$$\frac{\partial w}{\partial t} + A(x,t, \frac{\partial}{\partial x})w = f(x,t, u+w, \dots, \nabla_{2\beta} u + \nabla_{2\beta} w) - f(x,t, u, \dots, \nabla_{2\beta} u),$$

$$B(x,t, \frac{\partial}{\partial x})w|_S = 0,$$

и, кроме того,  $w|_{t=t_0} = 0$ . В силу (I.12) и (2.4), в цилиндре  $Q_{t_0, t_0+\tau} = \Omega \times (t_0, t_0+\tau)$ , где  $t_0+\tau < T$ , верна оценка

$$|w|_{S, Q_{t_0, t_0+\tau}}^{(2\beta+d)} \leq C_1 |w|_{S, Q_{t_0, t_0+\tau}}^{(2\beta+d)} |u|_{K, Q_{t_0, t_0+\tau}}^{(k+d)} + C_2 |w|_{K, Q_{t_0, t_0+\tau}}^{(k+d)} \leq C_3 |w|_{S, Q_{t_0, t_0+\tau}}^{(2\beta+d)} |u|_{\Omega}^{(s)} + C_2 |w|_{K, Q_{t_0, t_0+\tau}}^{(k+d)}, \quad (2.16)$$

где постоянная  $C_1$  от  $u$  и  $v$  не зависит и равна произведению  $C(T)$  на константу  $C$  в неравенстве (2.4).

Выберем постоянные  $\delta(T)$  так, чтобы

$$\delta(T) C_3 \leq \frac{1}{2}, \quad \delta(T) \leq \delta_0(T), \quad \delta(T) \leq \frac{\delta_0(T)}{M(T)},$$

а число  $\tau$  возьмем столь малым, чтобы  $C_2 |w|_{K, Q_{t_0, t_0+\tau}}^{(k+d)} \leq \frac{M(T)}{4} \delta(T)$

(Это можно сделать, в силу свойства 3) пространств  $C_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^e(Q_T)$  см. § I). Тогда при  $|u|_{\Omega}^{(s)} \leq \delta_0(T)$  из (2.16) будет следовать

$$|w|_{S, Q_{t_0, t_0+\tau}}^{(2\beta+d)} \leq 2C_2 |w|_{K, Q_{t_0, t_0+\tau}}^{(k+d)} \leq \frac{1}{2} M(T) \delta(T) \leq \frac{1}{2} M(T) \delta_0(T)$$

Значит,  $u$  и  $v$  при  $t > t_0$  оказываются решениями задачи (2.1) совпадающими при  $t = t_0$  и удовлетворяющими неравенствам

$$|u|_{S, Q_{t_0, t_0+\tau}}^{(2\beta+d)} \leq M(T) \delta(T) \leq M(T) \delta_0(T)$$

$$|v|_{S, Q_{t_0, t_0+\tau}}^{(2\beta+d)} \leq |u|_{S, Q_{t_0, t_0+\tau}}^{(2\beta+d)} + |w|_{S, Q_{t_0, t_0+\tau}}^{(2\beta+d)} \leq$$

$$\leq M(T) \delta(T) + \frac{1}{2} M(T) \delta_0(T) \leq M(T) \delta_0(T),$$

причем  $|u(x, t_0)|_{\Omega}^{(s)} \leq M(T) \delta(T) \leq \delta_0(T)$ . Выше мы видели, что такие решения совпадают, но это противоречит тому, что  $u \neq v$  при  $t > t_0$ . Тем самым теорема доказана при  $S > 0$ .

Изложенное доказательство проходит и при  $k = S = 0$ , но вместо оценки (I.12) для решения задачи (2.1) мы должны пользоваться

оценкой (I.13). Так как при  $k=0$  вектор  $f$  предполагается не зависящим от производных  $D^{\beta} v_i$ ,  $|\beta| = 2\ell$ , то

$$\sup_{\tau \leq t} \tau^{1 - \frac{1}{2\ell}} |f(x, t, v, \dots, \nabla_{2\ell-1} v)|_{\Omega} \leq c(\tau) |\sigma|_{\Omega} |\sigma|_{\Omega, \tau}^{(2\ell+1)}$$

Кроме того, из (2.4) и (2.5) следует, что для любых  $u, v \in C_{\tau}^{2\ell+1, 1 + \frac{1}{2\ell}}(\Omega_T)$ , таких, что  $\|u\|_{\Omega_T} \leq \tau$ ,  $\|v\|_{\Omega_T} \leq \tau$

$$\begin{aligned} & \sup_{\tau \leq t} \tau^{1 - \frac{1}{2\ell}} |f(x, t, v, \dots, \nabla_{2\ell-1} v) - f(x, t, u, \dots, \nabla_{2\ell-1} u)|_{\Omega} \\ & \leq c \{ \|u\|_{\Omega_T} \|u - v\|_{\Omega_T}^{(2\ell+1)} + \|v\|_{\Omega_T}^{(2\ell+1)} + 1 \} (\|u\|_{\Omega_T} + \|v\|_{\Omega_T}) \|u - v\|_{\Omega_T} \end{aligned}$$

Поэтому неравенства (2.8) и (2.9) остаются в силе (может быть, с другими постоянными), а значит теорема справедлива и при  $S=0$ .

### § 3. Устойчивость периодических и стационарных решений нелинейных параболических систем

Пусть  $u_0(x, t)$  -  $\omega$ -периодическое решение нелинейной системы

$$\frac{\partial u}{\partial t} + F(x, t, u, \dots, \nabla_{2\ell} u) = 0, \quad (3.1)$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$B(x, t, \frac{\partial}{\partial x}) u|_S = 0.$$

Предположим, что  $F$  и  $B$  являются  $\omega$ -периодическими функциями  $t$  и что в результате линеаризации (3.1) на векторе  $u_0(x, t)$  получается  $2\ell$ -параболическая система, причем оператор  $B$  связан с ней условием дополненности. Для нового неизвестного вектора  $v = u - u_0$  система (3.1) запишется в виде  $\frac{\partial v}{\partial t} - A(x, t, \frac{\partial}{\partial x}) v = f(x, t, v, \dots, \nabla_{2\ell} v)$ , и вопрос об устойчивости  $u_0(x, t)$  сводится к вопросу о поведении при  $t \rightarrow \infty$  решений начально-краевой задачи

$$\frac{\partial v}{\partial t} - A(x, t, \frac{\partial}{\partial x}) v = f(x, t, v, \dots, \nabla_{2\ell} v), \quad (3.2)$$

$$B(x, t, \frac{\partial}{\partial x}) v|_S = 0, \quad v|_{t=0} = \varphi, \quad (3.3)$$

матрица  $A$  здесь также периодически зависит от  $\omega$ . Пусть  $\hat{C}^s(\Omega)$  - пространство векторов  $u \in C^s(\Omega)$ , удовлетворяющих условиям согласования (I.11). Назовем разрешающим оператором задачи (I.8)-(I.10) оператор, сопоставляющий вектору

$\varphi \in \tilde{C}^s(\Omega)$  решение  $\mathcal{V}(x, t) = \mathcal{Z}(t, \tau)\varphi$  задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} + A(x, t) \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} &= 0, \quad t \geq \tau \\ \mathcal{V}(x, t, \frac{\partial}{\partial x}) \mathcal{V}|_S &= 0, \quad \mathcal{V}|_{t=\tau} = \varphi(x). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Операторы  $\mathcal{Z}(t, \tau)$  образуют полугруппу:  $\mathcal{Z}(t, s)\mathcal{Z}(s, \tau) = \mathcal{Z}(t, \tau)$ ,  $\tau \leq s \leq t$ ;  $\mathcal{Z}(t, t) = I$  и являются ограниченными линейными операторами в пространстве  $\tilde{C}^s(\Omega)$ . Кроме того, из теоремы I.1 следует, что при  $t > \tau$  оператор  $\mathcal{Z}(t, \tau)$  действует из пространства  $C^s(\Omega)$  в пространство  $C^{2b+d}(\Omega)$  и при всех  $s_1 \in [s, 2b+d]$  справедлива оценка

$$|\mathcal{Z}(t, \tau)\varphi|_{\Omega}^{(s_1)} \leq \frac{C_0}{(t-\tau)^{\frac{s-s_1}{2b}}} |\varphi|_{\Omega}^{(s)}. \quad (3.5)$$

Оператор  $\mathcal{Z}(\omega, 0)$  называется оператором монодромии. Он удовлетворяет условию  $\mathcal{Z}((k+1)\omega, k\omega) = \mathcal{Z}(\omega, 0) = \mathcal{Z}(\omega)$  при всех  $k \geq 0$ .

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть спектр оператора монодромии  $\mathcal{Z}(\omega)$  задачи (I.8)-(I.10) лежит внутри единичного круга, т.е.

$$|\mathcal{G}(\mathcal{Z})| \leq q < 1.$$

Тогда справедливо неравенство

$$|\mathcal{Z}(t, \tau)\varphi|_{\Omega}^{(s)} \leq C_0 \rho^{-\lambda(t-\tau)} |\varphi|_{\Omega}^{(s)}. \quad (3.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства (3.5) воспользуемся формулами Рисса

$$\mathcal{Z}(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda (\lambda I - \mathcal{Z}(\omega))^{-1} d\lambda \quad (3.7)$$

$$\mathcal{Z}^n(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda^n (\lambda I - \mathcal{Z}(\omega)) d\lambda.$$

При условиях теоремы в качестве контура  $\Gamma$  можно взять окружность  $|\lambda| = q < 1$ . Из (3.7) следует

$$|\mathcal{Z}^n(\omega)\varphi|_{\Omega}^{(s)} \leq C' q^n |\varphi|_{\Omega}^{(s)}.$$

Представим оператор  $\mathcal{Z}(t, \tau)$  в виде

$$\mathcal{Z}(t, \tau) = \mathcal{Z}(t, n\omega)\mathcal{Z}(n\omega, (n-1)\omega) \dots \mathcal{Z}(\ell\omega, \tau)$$

с целыми  $n, \ell > 0$  и  $tn\omega > 0$ ,  $\ell\omega - \tau > 0$ , откуда получим

$$\begin{aligned} |\mathcal{Z}(t, \tau)\varphi|_{\Omega}^{(s)} &\leq |\mathcal{Z}(t, n\omega)\mathcal{Z}^{n-\ell}(\omega)\mathcal{Z}(\ell\omega, \tau)|_{\Omega}^{(s)} \leq \\ &\leq C_0 \rho^{-\lambda(t-\tau)} |\varphi|_{\Omega}^{(s)}, \end{aligned}$$

где  $\lambda = -\frac{\ln q}{\omega}$ .

СЛЕДСТВИЕ. Если выполняются условия теоремы 3.1, то для разрешающего оператора  $\mathbf{z}_1(t, \tau)$  задачи типа (I.8)-(I.10), где оператор  $\mathbf{A}(x, t, \frac{\partial}{\partial x})$  заменен на  $\mathbf{A}(x, t, \frac{\partial}{\partial x}) + aI$ , где  $a < -\frac{\ln q}{\omega}$  и справедлива оценка

$$\|\mathbf{z}_1(t, \tau)\varphi\|_{\Omega}^{(s)} \leq C a e^{-\lambda_1(t-\tau)} \|\varphi\|_{\Omega}^{(s)}, \quad (3.8)$$

в которой  $\lambda_1 = \lambda - a$ .

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть выполняются условия теоремы I.1 при  $\Phi = 0$  теоремы 3.1. Тогда

$$\|v\|_{Q_{t_0, t}}^{(2b+d)} \leq C_1 [\|v(x, t_0)\|_{\Omega}^{(2b+d)} + \|f\|_{Q_{t_0, t}}^{(d)}], \quad (3.9)$$

где  $C_1$  не зависит от  $t$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Решение задачи (I.8)-(I.10) при  $\Phi = 0$  и  $t \geq t_0$  можно записать в виде

$$v(x, t) = \mathbf{z}(t, t_0)v(x, t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{z}(t, \tau)f(x, \tau)d\tau, \quad (3.10)$$

при помощи оценки (3.6) из (3.10) получим

$$\|v(x, t)\|_{\Omega}^{(d)} \leq C_0 e^{-\lambda(t-t_0)} \|v(x, t_0)\|_{\Omega}^{(d)} + C_0 \int_{t_0}^t e^{-\lambda(t-\tau)} \|f(x, \tau)\|_{\Omega}^{(d)} d\tau$$

где  $\lambda > 0$  и, следовательно

$$\|v(x, t)\|_{\Omega}^{(d)} \leq C_2 (\|u(x, t_0)\|_{\Omega}^{(d)} + \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|f(x, \tau)\|_{\Omega}^{(d)}) \quad (3.11)$$

где  $C_2$  не зависит от  $t$ . Неравенство (3.7) вытекает из (3.11) и (I.14).

СЛЕДСТВИЕ. Для решения задачи (I.8)-(I.10), в которой оператор  $\mathbf{A}(x, t, \frac{\partial}{\partial x})$  заменен на  $\mathbf{A}(x, t, \frac{\partial}{\partial x}) + aI$ ,  $a < -\frac{\ln q}{\omega}$  справедлива оценка

$$\|v\|_{Q_{t, t_0}}^{(2b+d)} \leq C_4(a) [\|v(x, t_0)\|_{\Omega}^{(2b+d)} + \|f\|_{Q_{t, t_0}}^{(d)}], \quad (3.12)$$

где  $C_4(a)$  не зависит от  $t$ .

Переходим к вопросу об устойчивости решения  $u_0(x, t)$  системы (3.1), или, что то же самое, нулевого решения системы (3.2), (3.3).

ТЕОРЕМА 3.3. Если спектр оператора монодролли для задачи (3.4) лежит внутри единичного круга, то при  $\|\varphi\|_{\Omega}^{(s)} \leq \rho$  где  $\rho$  - некоторое малое положительное число, задача (3.2), (3.3) имеет единственное решение  $v(x, t)$  определенное при всех  $t > 0$ , принадлежащее классу  $C_S^{2b+d, 1+\frac{1}{S}}(Q_{\infty})$  и подчиняющееся нера-

венству

$$|v(x,t)|_{\Omega}^{(2b+d)} \leq C_0 e^{-\lambda t} |y|_{\Omega}^{(s)}, \quad t \geq t_0 > 0 \quad (3.13)$$

Число  $S$  удовлетворяет условиям:  $S > K$ ;  $S > 0$  при  $K = 0$ , но если  $f_1^p = 0$  при  $|\beta| = 2b$  и  $K = 0$ , то  $S \geq 0$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 2.1, решение задачи (3.2), (3.3)  $v \in C^{2b+d, 1+\frac{1}{2b}}(Q_{2\omega})$  существует и удовлетворяет неравенству  $|v|_{S, Q_{2\omega}}^{(2b+d)} \leq M |y|_{\Omega}^{(s)}$ , если  $|y|_{\Omega}^{(s)} \leq \delta$  (здесь  $M = M(2\omega)$ ,  $\delta = \delta(\omega)$ ). Тем более

$$|v(x, \omega)|_{\Omega}^{(2b+d)} \leq M |y|_{\Omega}^{(s)} \omega^{\frac{s-2b}{2b}} \equiv M |y|_{\Omega}^{(s)}. \quad (3.14)$$

Рассмотрим при  $t > \omega$  задачу

$$\frac{\partial v}{\partial t} = ft(x, t, \frac{\partial}{\partial x}) v = f(x, t, v, \dots, \nabla_{2b} v),$$

$$B(x, t, \frac{\partial}{\partial x}) v|_S = 0,$$

$$v|_{t=\omega} = v(x, \omega) \equiv v_0(x)$$

и докажем, что при малых  $\delta_0$  существует ее решение из класса  $C^{2b+d, 1+\frac{1}{2b}}(Q_{\omega, \infty})$ , где  $Q_{\omega, \infty} = \Omega \times (\omega, \infty)$ . Пусть решение определено в области  $Q_{\omega, T} = \Omega \times (\omega, T)$ . В силу теоремы 3.2 и леммы 2.3, оно подчиняется неравенству

$$|v|_{Q_{\omega, t}}^{(2b+d)} \leq C_1 |v_0|_{\Omega}^{(2b+d)} + C_2 (|v|_{Q_{\omega, t}}^{(2b+d)})^2 \quad (3.15)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  - постоянные в оценках (3.9) и (2.II),  $t \leq T$ ,  $d' < d$ . Покажем, что если  $|v_0|_{\Omega}^{(2b+d)} \leq \frac{1}{6C_1^2 C_2}$ , то

$$|v|_{Q_{\omega, t}}^{(2b+d)} \leq 2C_1 |v_0|_{\Omega}^{(2b+d)} \quad (3.16)$$

при всех  $t \leq T$ . Пусть  $t_1 \leq T$  - точная верхняя граница тех  $t$ , для которых  $|v|_{Q_{\omega, t}}^{(2b+d)} \leq 2C_1 |v_0|_{\Omega}^{(2b+d)}$ .

В силу (3.15), этих  $t$

$$\begin{aligned} |v|_{Q_{\omega, t}}^{(2b+d)} &\leq C_1 [ |v_0|_{\Omega}^{(2b+d)} + 2C_1 C_2 |v_0|_{\Omega}^{(2b+d)} |v|_{Q_{\omega, t}}^{(2b+d)} ] \leq \\ &\leq C_1 |v_0|_{\Omega}^{(2b+d)} + \frac{1}{3} |v|_{Q_{\omega, t}}^{(2b+d)} \end{aligned}$$

и

$$|v|_{Q_{\omega, t}}^{(2b+d)} \leq \frac{3}{2} C_1 |v_0|_{\Omega}^{(2b+d)}.$$



Так как  $|v|^{(2b+d)}$  является непрерывной функцией  $t$  при  $v \in C^{2b+d, 1+\frac{Q+d}{2b}}(Q_T)$ , то из полученной оценки можно заключить, что  $t_1 = T$ . Итак (3.16) установлено для всех  $t \leq T$ . Из (2.16) следует, что при всех

$$|v(x, t)|_{\Omega}^{(s)} \leq C_3 |v|_{\Omega}^{(2b+d)} \leq 2C_1 C_3 |v_0|_{\Omega}^{(2b+d)} \quad (3.17)$$

Предположив, что  $2C_1 C_3 |v_0|_{\Omega}^{(2b+d)} \leq \delta$ , мы можем с помощью теоремы 2.1 построить в цилиндре  $Q_{T-\varepsilon, T-\varepsilon+2\omega}$ ,  $\forall \varepsilon > 0$  решение задачи

$$\frac{\partial v}{\partial t} + Av = f, \quad Bu|_S = 0, \quad v|_{t=T-\varepsilon} = v(x, T-\varepsilon).$$

из класса  $C_s^{2b+d, 1+\frac{1}{2b}}(Q_{T-\varepsilon, T-\varepsilon+2\omega})$ . В силу единственности решения, оно на самом деле принадлежит классу  $C^{2b+d}(Q_{T-\varepsilon, T-\varepsilon+2\omega})$ . При этом, оценка (3.16) справедлива при всех  $t \leq T-\varepsilon+2\omega$  и указанное продолжение можно осуществлять неограниченно, если только

$$|v_0|_{\Omega}^{(2b+d)} \leq \min\left(\frac{1}{6C_1^2 C_2}, \frac{\delta}{2C_1 C_3}\right).$$

В силу (3.14), это условие выполняется при

$$|y|_{\Omega}^{(s)} \leq \beta \leq \frac{1}{M} \min\left(\frac{1}{6C_1^2 C_2}, \frac{\delta}{2C_1 C_3}\right).$$

Из неравенства (3.16) и теоремы 2.1 следует, что

$$|v|_{Q_{\omega, \infty}}^{(2b+d)} \leq C_4 |v_0|_{\Omega}^{(2b+d)} \quad (3.17)$$

Докажем теперь неравенство (3.13). Вектор  $w = e^{at} v$ ;  $0 < a < -\frac{\ln q}{\omega}$  является решением задачи

$$\frac{\partial w}{\partial t} - aw + A(x, t, \frac{\partial}{\partial x}) w = e^{at} f(x, t, e^{-at} w, \dots, e^{-at} \nabla_{2b} w),$$

$$B(x, t, \frac{\partial}{\partial x}) w|_S = 0,$$

$$w|_{t=0} = v_0(x).$$

В силу следствия теоремы 3.2 и леммы 2.3, для вектора  $w$  справедлива оценка (3.15) с другими постоянными, скажем,  $C'_1$  и  $C'_2$ . Повторяя проведенное выше рассуждение, можно показать, что при

$$\beta \leq \frac{1}{M} \min\left\{\frac{1}{6C_1^2 C'_2}, \frac{\delta}{2C'_1 C_3}\right\}$$

вектор  $w$  подчиняется неравенству (3.17) и тем более (3.13). Теорема доказана.

Теперь сформулируем теоремы о неустойчивости и о существо-

вании инвариантных многообразий, которые доказываются примерно так же, как это сделано в работе [1]. Обозначим через  $V(t)$  разрешающий оператор задачи (3.2), т.е. нелинейный оператор, сопоставляющий элементу  $\Psi \in \tilde{C}^s(\Omega)$  решение  $\tilde{V} = V(t)\Psi(x) \in C_S^{2b+d, 1+\frac{2b}{\alpha}}(Q_T)$  задачи (3.2). В дальнейшем мы будем рассматривать  $V(t)$ , как оператор действующий из  $\tilde{C}^s(\Omega)$  в  $C^s(\Omega)$ .

**ТЕОРЕМА 3.4.** Пусть выполнены условия теоремы 2.1 и пусть спектр  $\Theta(Z)$  оператора монодромии  $Z(\omega)$  распадается на две замкнутые компоненты:  $\Theta(Z) = \Theta_1(Z) \cup \Theta_2(Z)$ , из которых  $\Theta_1(Z)$  лежит в круге радиуса  $\beta_1 > 1$ , а  $|\Theta_2(Z)| \leq 1$ . Тогда для любого  $\delta > 0$  существует такое  $n$  и такой элемент  $\Psi \in \tilde{C}^s(\Omega)$ , что  $|\Psi|_{\Omega}^{(s)} \leq \delta$ ,  $|V(n\omega)\Psi|_{\Omega}^{(s)} \geq \varepsilon$  ( $\varepsilon$  не зависит от  $\delta$ ), т.е. периодическое решение будет неустойчивым.

Когда спектр оператора монодромии  $Z$  распадается на две замкнутые компоненты, как это описано в теореме 3.4, то  $Z$  можно представить в виде суммы  $Z = Z_1 + Z_2$ , где

$$Z_k = \frac{1}{2\pi i} \int \lambda (\lambda I - Z)^{-1} d\lambda$$

В качестве  $\Gamma_1$  возьмем две окружности  $|\lambda| = \beta_1$  и  $|\lambda| = \beta^{(1)}$  (окружность с радиусом  $\beta^{(1)}$  должна охватывать весь спектр  $Z$ ), а в качестве  $\Gamma_2$  - окружность  $|\lambda| = \beta_2 < \beta_1$ . Это разложение  $Z$  порождает разложение пространства  $\tilde{C}^s(\Omega)$  в прямую сумму  $\tilde{C}^s(\Omega) = \tilde{C}_1^s(\Omega) \dot{+} \tilde{C}_2^s(\Omega)$ , причем операторы

$$P_k = \frac{1}{2\pi i} \int \lambda (\lambda I - Z)^{-1} d\lambda$$

являются проекторами на  $\tilde{C}_k^s(\Omega)$ ,  $k=1,2$ .

**ТЕОРЕМА 3.5.** Пусть выполнены все условия теоремы 2.1 и пусть известно еще, что  $\Theta(Z) = \Theta_1(Z) \cup \Theta_2(Z)$ , где  $|\Theta_1(Z)| < 1$  и  $|\Theta_2(Z)| > 1$ . Тогда в шаре  $K_\varepsilon = \{\Psi : \Psi \in \tilde{C}^s(\Omega), |\Psi|_{\Omega}^{(s)} \leq \varepsilon\}$  достаточно малого радиуса  $\varepsilon$  существуют два многообразия  $Y_1$  и  $Y_2$ , инвариантные относительно нелинейного оператора  $V$ , касающиеся пространств  $\tilde{C}_1^s(\Omega)$  и  $\tilde{C}_2^s(\Omega)$  в точке  $\Psi = 0$  и обладающие следующими свойствами:

- 1) для  $\forall \Psi \in Y_2$  элементы  $V^n \Psi \in Y_2$ ,  $n=1,2,\dots$  и  $|V^n \Psi|_{\Omega}^{(s)} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ ,
- 2) для  $\forall \Psi \in Y_1$  определены отрицательные степени  $V^{-n} \Psi \in Y_1$  и  $V^{-n} \Psi \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ ,
- 3) если  $\Psi \in Y_2$ , то найдутся такое  $n > 2$ , что точка  $V^n \Psi$  выйдет из шара  $K_\varepsilon$ .

Пусть коэффициенты матрицы  $A$  и  $B$  не зависят от

и пусть  $v_0(x)$  - стационарное решение системы (3.1) и удовлетворяет граничным условиям  $\beta(x, \frac{\partial}{\partial x}) v_0|_S = 0$ , тогда исследование устойчивости решения  $v_0(x)$  или что то же самое, нулевого решения системы (3.2)-(3.3) проводится при помощи таких же рассуждений, как это делалось для периодического случая.

**ТЕОРЕМА 3.6.** Пусть выполнены все условия теоремы 2.1 и пусть спектр оператора  $\mathcal{A}$  находится в левой полуплоскости, т.е.  $\operatorname{Re} \lambda \leq -\nu < 0$ , то при  $|\varphi|_{\Omega}^{(s)} \leq \rho$ , где  $\rho$  - некоторое малое положительное число, задача (3.2)-(3.3) имеет единственное решение  $v(x, t)$  определенное при всех  $t > 0$ , принадлежащее классу  $C_S^{2b+d, 1+\frac{1}{2}k}(Q_\infty)$  и подчиняющееся неравенству

$$|v(x, t)|_{\Omega}^{(2b+d)} \leq c e^{-\lambda_0 t} |\varphi|_{\Omega}^{(s)}, \quad t \geq t_0 > 0, \quad (3.18)$$

число  $S$  удовлетворяет условиям:  $S \geq K$ ;  $S > 0$  при  $K = 0$  но если  $f_i^p = 0$  при  $|p| = 2b$  и  $K = 0$ ,  $S \geq 0$ .

Автор благодарен своему научному руководителю В.А.Солонникову за большую помощь при выполнении работы.

#### Литература

1. Ладженская О.А., Солонников В.А. О принципе линеаризации и инвариантных многообразиях для задач магнитной гидродинамики. - Зап.науч.семинаров Ленингр.отд. Мат.ин-та АН СССР, 1973, т.38, с.46-93.
2. Юдович В.И. Об устойчивости стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости. - Докл.АН СССР, 1965, т.161, № 5, с.1037-1040.
3. Юдович В.И. Об устойчивости автоколебаний жидкости. - Докл.АН СССР, 1970, т.195, № 3, с.574-576.
4. Юдович В.И. Об устойчивости вынужденных колебаний жидкости. - Докл.АН СССР, 1970, т.195, № 2, с.292-295.
5. Далекский Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., "Наука", 1970.
6. N a r f s i m h e n R. On the asymptotic stability of solutions of parabolic differential equation. - Journ. Rat. Mech. and Anal., 1954, 3, p.303-313.
7. H a n s j ö r g K i e l h ö f e r, On the Syapunov-stability of stationary solutions of semilinear parabolic differential equations. - Journ. Diff. Equat., 1976, 22, p.193-208.

8. Белоносов В.С., Зеленик Т.И. Нелокальные проблемы в теории квазилинейных параболических уравнений. - НГУ, 1975, 156 с.
9. Вишневский М.П. Об условной асимптотической устойчивости стационарных решений параболических систем. - Динамика сплошной среды, вып.16, 1974, с.84-90.
10. Белоносов В.С., Вишневский М.П. Об устойчивости стационарных решений нелинейных параболических систем. - Мат.об., 1977, 104(146), с.534-558.
11. Солонников В.А. О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида. - Тр.Мат.ин-та АН СССР, 1965, т.83, с.3-165.
12. Солонников В.А. Об оценке максимумов модулей производных решения однородной параболической начально-краевой задачи. - Препринт ЛОМИ Р-2-77, Ленинград, 1977, с.3-20.
13. Солонников В.А., Качатрян А.Г. Оценки решений параболических начально-краевых задач в весовых гельдеровских нормах. - Тр.Мат.ин-та АН СССР, 197
14. Белоносов В.С. Оценки решений параболических систем в гельдеровских классах с весом. - Докл.АН СССР, 1978, т.241, № 2, с.265-268.
15. Вишневский М.П. Периодическое и близкие к ним решения параболических систем. Динамика сплошной среды, вып.16, 1974, с.84-90.
16. Солонников В.А. Оценки решений нестационарной системы Навье-Стокса. - Зап.науч.семинаров Ленингр.отд.Мат.ин-та АН СССР, 1973, т.38, с.153-231.