Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2010. Том 51, № 3

УДК 510.64

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ СВОЙСТВА В РАСШИРЕНИЯХ ЛОГИКИ НЕРАВЕНСТВА

А. В. Карпенко

Аннотация. Рассмотрены модальные логики $wK4$ и DL, а также соответствующие им слабо транзитивные модальные алгебры и DL-алгебры. Доказано, что существует в точности 16 амальгамируемых многообразий DL-алгебр. Найден критерий слабой амальгамируемости многообразий слабо транзитивных модальных алгебр. Как следствие решена проблема дедуктивной интерполяции для расширений логики неравенства DL. Получен критерий слабой интерполяции над $wK4$.

Ключевые слова: модальная логика $wK4$, модальная логика неравенства DL, интерполяция, дедуктивное интерполяционное свойство, слабое интерполяционное свойство, модальные алгебры, амальгамируемость.

Интерполяционная теорема, доказанная Крейгом в 1957 г. для классической логики предикатов, послужила поводом для изучения интерполяции в различных формальных теориях. В классической логике предикатов интерполяционная теорема Крейга имеет ряд эквивалентных формулировок, однако для модальных логик данные формулировки становятся неэквивалентными. В этой связи было сформулировано несколько основных вариантов интерполяционного свойства: интерполяционное свойство Крейга CIP, дедуктивное интерполяционное свойство IPD, ограниченное интерполяционное свойство IPR и, наконец, слабое интерполяционное свойство WIP [1].

Известно, что CIP и IPD разрешимы над логикой $S4$ [2], но не разрешимы над $K4$ [3, 4]. Одновременно с этим WIP над $K4$ разрешимо [5]. В доказательстве этих фактов использовалось существование дуального изоморфизма между классом расширений логики и классом подмногообразий соответствующего многообразия алгебр (см., например, [6]). Таким образом, исследование интерполяции сводится к изучению амальгамируемости многообразий модальных алгебр.

В работах Л. Л. Максимовой изучаются различные варианты амальгамируемости многообразий модальных алгебр. В частности, в [2] показано, что в точности 50 многообразий топобулевых алгебр являются амальгамируемыми, среди них 38 имеют свойство сильной амальгамируемости. В работе [7] Л. Л. Максимовой найдены необходимые и достаточные условия амальгамируемости, что позволило свести вопрос о наличии указанных свойств у данного

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09–01–00090а), гранта АВЦП Минобразования России «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1.419) и Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки научных исследований молодых российских ученых — докторов наук (грант МД–2587.2010.1).

многообразия модальных алгебр к рассмотрению подкласса конечно порожденных финитно-неразложимых алгебр.

В совместной работе автора с Л. Л. Максимовой [8] основное внимание уделялось изучению слабо транзитивных модальных алгебр, а также DL-алгебр. Данные классы модальных алгебр получили свою известность в связи с изучением модальных логик $wK4$ и DL [9–11], естественной алгебраической семантикой которых они являются. В [8] показано, что класс слабо транзитивных модальных алгебр совпадает с классом простых DL-алгебр, найдено полное описание конечно порожденных простых DL-алгебр и их вложений. Доказано, что многообразие DL-алгебр не является слабо амальгамируемым, а соответствующие модальные логики $wK4$ и DL не обладают никаким интерполяционным свойством. В настоящей работе ведется более детальное изучение амальгамируемости многообразий DL-алгебр.

В § 2 данной статьи доказано, что семейство многообразий DL-алгебр имеет мощность континуума. Доказано, что существует взаимно однозначное соответствие между многообразиями DL-алгебр и подклассами класса $\mathscr{K}(DL) = \{V_n^m \mid n + m > 0\}$, замкнутыми вниз. В § 3 получены необходимые условия амальгамируемости многообразия DL-алгебр. В § 4 доказано, что существует в точности 16 слабо амальгамируемых многообразий DL-алгебр, они же являются и амальгамируемыми. Таким образом, решена проблема амальгамируемости многообразий DL-алгебр. Кроме того, получен критерий слабой амальгамируемости многообразий слабо транзитивных модальных алгебр. Как следствие, в § 5 решена проблема дедуктивной интерполяции над логикой DL. В этом же параграфе получен критерий слабой интерполяции для расширений логики $wK4$.

§ 1. Предварительные сведения

Формулы пропозициональной модальной логики строятся с помощью операций $\to$ и $\Box$ и константы $\bot$. Остальные связки: &, $\vee$, $\neg$, определяются через исходные обычным образом. Полагаем $\Diamond A := \neg\Box\neg A$.

Нормальной модальной логикой называется множество модальных формул, содержащее все классические тавтологии и аксиому $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$ и замкнутое относительно подстановки и правил:

(R1) $\frac{A, (A \to B)}{B}$ (modus ponens);

(R2) $\frac{A}{\Box A}$ (правило навешивания необходимости).

Минимальная модальная логика обозначается через K. В статье будут рассматриваться только нормальные модальные логики, поэтому слово «нормальная» будет опускаться. Семейство всех модальных логик, расширяющих модальную логику L, обозначается с помощью $NE(L)$. В соответствии с [11] через $wK4$ обозначается нормальная модальная логика с дополнительной аксиомой $((A \& \Box A) \to \Box\Box A)$. Наряду с логикой $wK4$ важную роль в данной статье будет играть ее расширение, полученное добавлением аксиомы $(A \to \Box\Diamond A)$, данная логика носит название логики неравенства и обозначается через DL в работе [10] и через KS в работе [11]. В данной статье будем придерживаться обозначения DL. Расширения логики DL называются *DL-логиками.* Известно, что логика $wK4$ полна по Крипке и характеризуется шкалами со слабо транзитивным отношением R, а логика DL полна относительно шкал, где $(xRy \Leftrightarrow x \neq y)$ [10, 11].

Перечислим некоторые другие известные расширения логики K:

$K4 = K + (\Box A \to \Box\Box A)$;

$S4 = K4 + (\Box A \to A)$;

$S5 = S4 + (A \to \Box\Diamond A)$.

Для L из $NE(K)$ иногда пишем $L \vdash A$ вместо $A \in L$; запись $\Gamma \vdash_L A$ означает, что формула A выводима из $\Gamma \cup L$ с помощью правил (R1) и (R2).

Рассмотрим алгебраическую семантику модальной логики. Известно, что существует взаимно однозначное соответствие между нормальными модальными логиками и семейством многообразий модальных алгебр.

Модальной алгеброй называется алгебра $\mathfrak{A} = (|\mathfrak{A}|, \to, 0, \Box)$, которая удовлетворяет тождествам булевой алгебры для операций $\to, 0$ и, кроме того, условиям $\Box 1 = 1$ и $\Box(x \to y) \leq \Box x \to \Box y$, где $1 = 0 \to 0$. В частности, операция $\Box$ обладает свойством монотонности и удовлетворяет условию $\Box(x\&y) = \Box x\&\Box y$. Модальная алгебра $\mathfrak{A}$ называется *слабо транзитивной*, если $\boxdot x = x\&\Box x \leq \Box\Box x$; $\mathfrak{A}$ называется *транзитивной*, или $K4$*-алгеброй*, если она удовлетворяет условию $\Box x \leq \Box\Box x$; слабо транзитивная $\mathfrak{A}$ называется DL*-алгеброй*, если она удовлетворяет условию $x \leq \Box\Diamond x$, где $\Diamond A := \neg\Box\neg A$.

Пусть A — формула модального языка, тогда говорим, что A *общезначима* в $\mathfrak{A}$, и пишем $\mathfrak{A} \models A$, если в $\mathfrak{A}$ выполнено тождество $A = 1$. Пишем $\mathfrak{A} \models L$ вместо $(\forall A \in L)(\mathfrak{A} \models A)$. Пусть $V(L) = \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \models L\}$. Очевидно, что $V(L)$ является многообразием для всякой нормальной модальной логики.

Кроме того, известно, что $L = \{A \mid (\forall \mathfrak{A} \in V(L))(\mathfrak{A} \models A)\}$ (см. [6]). Для любого класса K модальных алгебр множество $L(K) = \{A \mid (\forall \mathfrak{A} \in K)(\mathfrak{A} \models A)\}$ будет модальной логикой. В частности, если K есть семейство слабо транзитивных модальных алгебр, то $L(K)$ будет логикой, расширяющей $wK4$, а если K — семейство DL-алгебр, то $L(K)$ расширяет DL.

Пусть $\mathbf{p}$ — список пропозициональных переменных, $A(\mathbf{p})$ — формула, все переменные которой входят в $\mathbf{p}$, и $\mathscr{F}(\mathbf{p})$ — множество всех таких формул.

Пусть $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ — попарно не пересекающиеся списки переменных.

Будем говорить, что логика L *обладает интерполяционным свойством Крейга* (CIP), если выполнено условие: для любых $A(\mathbf{p},\mathbf{q}), B(\mathbf{p},\mathbf{r})$ из условия $\vdash_L A(\mathbf{p},\mathbf{q}) \to B(\mathbf{p},\mathbf{r})$ следует существование формулы $C(\mathbf{p})$ такой, что $\vdash_L A(\mathbf{p},\mathbf{q}) \to C(\mathbf{p})$ и $\vdash_L C(\mathbf{p}) \to B(\mathbf{p},\mathbf{r})$, причем C содержит только общие переменные формул A и B.

Логики K, $K4$, $S4$ и $S5$ обладают свойством Крейга (см, например [6]).

Логика L обладает *дедуктивным интерполяционным свойством* IPD, если выполнено условие: для любых $A(\mathbf{p},\mathbf{q}), B(\mathbf{p},\mathbf{r})$ из условия $A(\mathbf{p},\mathbf{q}) \vdash_L B(\mathbf{p},\mathbf{r})$ следует существование формулы $C(\mathbf{p})$ такой, что $A(\mathbf{p},\mathbf{q}) \vdash_L C(\mathbf{p})$ и $C(\mathbf{p}) \vdash_L B(\mathbf{p},\mathbf{r})$, причем C содержит только общие переменные формул A и B.

В [12] введено *ограниченное интерполяционное свойство* IPR:

для любых $A(\mathbf{p},\mathbf{q}), B(\mathbf{p},\mathbf{r})$ из условия $A(\mathbf{p},\mathbf{q}), B(\mathbf{p},\mathbf{r}) \vdash_L C(\mathbf{p})$ следует существование формулы $D(\mathbf{p})$ такой, что $A(\mathbf{p},\mathbf{q}) \vdash_L D(\mathbf{p})$ и $D(\mathbf{p}), B(\mathbf{p},\mathbf{r}) \vdash_L C(\mathbf{p})$, причем D содержит только общие переменные формул A, B и C.

Для модальных логик в силу теоремы дедукции IPD влечет IPR, обратное неверно (см. [12]).

Логика L *обладает слабым интерполяционным свойством* WIP [1], если выполнено условие: для любых $A(\mathbf{p},\mathbf{q}), B(\mathbf{p},\mathbf{r})$ условие $A(\mathbf{p},\mathbf{q}),\ B(\mathbf{p},\mathbf{r}) \vdash_L \bot$ влечет существование формулы $C(\mathbf{p})$ такой, что

$$A(\mathbf{p},\mathbf{q}) \vdash_L C(\mathbf{p}) \text{ и } C(\mathbf{p}),\ B(\mathbf{p},\mathbf{r}) \vdash_L \bot.$$

Свойство WIP является частным случаем IPR, и выполнено соотношение CIP $\Rightarrow$ IPD $\Rightarrow$ IPR $\Rightarrow$ WIP.

В модальной логике обратные стрелки не выполняются. В то же время в классической логике все эти свойства эквивалентны.

Приведем следующие теоремы Л. Л. Максимовой.

Теорема 1 [7]. *Для любой модальной логики L следующие условия эквивалентны:*

(1) *L обладает интерполяционным свойством* IPD*;*

(2) *многообразие $V(L)$ амальгамируемо;*

(3) *для любых финитно неразложимых конечно порожденных $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ из $V(L)$ и для любых мономорфизмов $\beta : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, $\gamma : \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$ существуют такие алгебра $\mathfrak{D}$ из $V(L)$ и мономорфизмы $\delta : \mathfrak{B} \to \mathfrak{D}$, $\varepsilon : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$, что $\delta\beta = \varepsilon\gamma$.*

Теорема 2 [13, 14]. *Для каждой модальной логики L следующие условия эквивалентны:*

(1) *L обладает слабым интерполяционным свойством* WIP*;*

(2) *класс простых алгебр многообразия $V(L)$ амальгамируем;*

(3) *класс конечно порожденных простых алгебр многообразия $V(L)$ амальгамируем.*

Класс алгебр $\mathscr{K}$ называется *амальгамируемым*, если выполнено условие (AP): для любых $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \in \mathscr{K}$ если $\beta : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, $\gamma : \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$ — мономорфизмы, то существуют алгебра $\mathfrak{D} \in \mathscr{K}$ и мономорфизмы $\delta : \mathfrak{B} \to \mathfrak{D}$, $\varepsilon : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ такие, что $\delta\beta = \varepsilon\gamma$ для всех $x \in \mathfrak{A}$.

В этом случае $(\mathfrak{D}, \delta, \varepsilon)$ называется *общим расширением* $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ над $\mathfrak{A}$.

Класс алгебр $\mathscr{K}$ называется *слабо амальгамируемым*, если выполнено условие (WAP): для любых $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \in \mathscr{K}$ если $\beta : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, $\gamma : \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$ — мономорфизмы, то существуют алгебра $\mathfrak{D} \in \mathscr{K}$ и гомоморфизмы $\delta : \mathfrak{B} \to \mathfrak{D}$, $\varepsilon : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ такие, что $\delta\beta = \varepsilon\gamma$ для всех $x \in \mathfrak{A}$ и $\mathfrak{D}$ невырожденная, если $\mathfrak{A}$ невырожденная.

Напомним, что алгебра называется *невырожденной*, если она содержит не менее двух элементов.

Теорема 3 [1]. *Многообразие V модальных алгебр имеет* WAP *тогда и только тогда, когда класс конечно порожденных простых алгебр из V имеет* AP.

Алгебра называется *простой*, если она имеет в точности две конгруэнции.

Модальная алгебра называется *финитно неразложимой*, если она не разлагается в подпрямое произведение конечного числа отличных от нее фактор-алгебр.

§ 2. Классификация многообразий *DL*-алгебр

Через V_n^m обозначим конечную модальную алгебру с $n+m$ атомами $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m$ такими, что для любого атома x

$$\Diamond x = \begin{cases} 1, & x = a_i \text{ для некоторого } 1 \le i \le n, \\ \neg x, & x = b_j \text{ для некоторого } 1 \le j \le m. \end{cases}$$

Поскольку любой элемент алгебры V_n^m однозначно представим как сумма атомов и $\Diamond(y \vee z) = \Diamond y \vee \Diamond z$, операция $\Diamond$ однозначно определяется для всех элементов из V_n^m.

Далее приведем основный результаты статьи [8].

Теорема 4. *Любая конечно порожденная финитно неразложимая DL-алгебра является простой и изоморфной алгебре V_n^m для подходящих n, m, где $n + m > 0$.*

Таким образом, класс конечно порожденных простых DL-алгебр с точностью до изоморфизма совпадает с классом $\{V_n^m \mid m + n > 0\}$, обозначим его через $\mathscr{K}(DL)$. Кроме того, Л. Л. Максимовой в [8] доказана следующая

Теорема 5. *Любая простая слабо транзитивная алгебра является DL-алгеброй.*

Для конечных простых DL-алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ пишем $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$, если и только если $\mathfrak{A}$ изоморфно вложима в $\mathfrak{B}$. Ясно, что если $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B} \preccurlyeq \mathfrak{A}$, то $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ изоморфны.

В [8] доказано, что для $m \geq 0, n \geq 1$

$$V_n^m \preccurlyeq V_{n+1}^m, V_n^m \preccurlyeq V_n^{m+1}, V_n^m \preccurlyeq V_{n-1}^{m+2}. \tag{1}$$

Кроме того, доказана следующая

Теорема 6. *Отношение $\preccurlyeq$ является рефлексивным и транзитивным замыканием отношения* (1).

Диаграмма отношения $\preccurlyeq$ представлена на рис. 1.

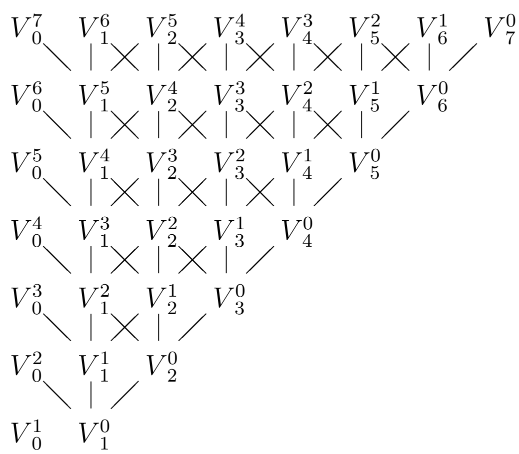

Рис. 1. Структура вложений.

Из теоремы Биркгофа непосредственно следует

Предложение 1. *Каждое многообразие порождается классом своих конечно порожденных финитно неразложимых алгебр.*

Следуя [15, 16], определим понятие характеристической формулы для конечной подпрямо неразложимой слабо транзитивной алгебры.

Пусть X — множество порождающих конечной подпрямо неразложимой слабо транзитивной алгебры $\mathfrak{A}$. Каждому элементу $a \in X$ ставим в соответствие переменную p_a. Обозначим через δ конъюнкцию всех формул вида $p_a \& p_b \leftrightarrow p_{a\&b}$; $p_a \vee p_b \leftrightarrow p_{a\vee b}$; $p_a \to p_b \leftrightarrow p_{a\to b}$; $\neg p_a \leftrightarrow p_{\neg a}$; $\Box p_a \leftrightarrow p_{\Box a}$ для всех $a, b \in \mathfrak{A}$. *Характеристической формулой алгебры* $\mathfrak{A}$ называется формула $\chi(\mathfrak{A}) := \boxdot\delta(\mathfrak{A}) \to p_a$, где a — опремум алгебры $\mathfrak{A}$.

Частным случаем леммы 4.4 статьи [15] является

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{A}$ — конечная подпрямо неразложимая слабо транзитивная алгебра. Тогда*

(1) $\mathfrak{A} \nvDash \chi(\mathfrak{A})$;

(2) *для любой алгебры $\mathfrak{B}$ выполнено $\mathfrak{B} \nvDash \chi(\mathfrak{A})$ тогда и только тогда, когда существует мономорфизм из алгебры $\mathfrak{A}$ в подходящий гомоморфный образ алгебры $\mathfrak{B}$.*

Доказательство см. в [17, 18]. $\square$

Лемма 2. *Для любой слабо транзитивной модальной логики L и конечной подпрямо неразложимой слабо транзитивной алгебры $\mathfrak{A}$ выполнено*

$$\mathfrak{A} \vDash L \Leftrightarrow \chi(\mathfrak{A}) \notin L.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 3 статьи [19]. $\square$

Для всякого множества индексов X введем обозначение $L(X) = DL + \{\chi(V_0^m) \mid m \in X\}$ для соответствующего обозначения расширения логики DL.

Лемма 3. *Пусть $X, Y \subseteq \mathbb{N}$ и $X \neq Y$, тогда $L(X) \neq L(Y)$.*

Доказательство. Пусть $L(X) = L(Y)$, но найдется $k \in \mathbb{N}$ такое, что $k \in X$, $k \notin Y$. Тогда $\chi(V_0^k) \in L(X)$ и по лемме 1 выполнено $V_0^k \nvDash L(X)$. Однако $L(X) = L(Y)$, значит, $\chi(V_0^k) \in L(Y)$ и найдется набор $\chi(V_0^{i_1}), \dots, \chi(V_0^{i_n})$ $(i_1, \dots i_n \in Y)$ аксиом $L(Y)$ такой, что $\chi(V_0^k)$ выводится в $DL + \{\chi(V_0^{i_1}), \dots, \chi(V_0^{i_n})\}$. Заметим, что среди номеров $i_1, \dots, i_n$ нет номера k.

Имеем $V_0^k \nvDash \chi(V_0^k)$, значит, среди номеров $i_1, \dots, i_n$ найдется номер l такой, что $V_0^k \nvDash \chi(V_0^l)$. По лемме 1 существует мономорфизм алгебры V_0^l в подходящий гомоморфный образ простой алгебры V_0^k, а значит, $V_0^l \preccurlyeq V_0^k$. Однако в силу теоремы 6 данные алгебры не могут быть сравнимы по вложению; противоречие. $\square$

Из леммы 3 непосредственно следует

Предложение 2. *Семейство DL-логик имеет мощность континуума.*

Для всякой логики над DL через $\mathscr{K}(L)$ обозначим $\{V_n^m \mid V_n^m \in V(L), n + m > 0\}$. По теореме 4 $\mathscr{K}(L)$ — это с точностью до изоморфизма класс всех конечно порожденных финитно неразложимых алгебр многообразия $V(L)$.

Класс $\mathscr{K}$ называется *замкнутым вниз*, если для любой алгебры $\mathfrak{A} \in \mathscr{K}$ имеем $(\mathfrak{B} \preccurlyeq \mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B} \in \mathscr{K})$.

Теорема 7. *Существует взаимно однозначное соответствие между многообразиями DL-алгебр и подклассами класса $\mathscr{K}(DL)$, замкнутыми вниз.*

Доказательство. Пусть $V(L)$ — многообразие DL-алгебр. Класс $\mathscr{K}(L)$ является замкнутым вниз относительно отношения $\preccurlyeq$.

Пусть для логик L_1 и L_2 выполнено $L_1 \nsubseteq L_2$, тогда $V(L_2) \nsubseteq V(L_1)$ и по предложению 1 найдется финитно неразложимая конечно порожденная DL-алгебра $\mathfrak{A}$ такая, что $\mathfrak{A} \in V(L_2)$ и $\mathfrak{A} \notin V(L_1)$. По теореме 4 она изоморфна подходящей V_n^m, поэтому $\mathfrak{A} \in \mathscr{K}(L_2)$ и $\mathfrak{A} \notin \mathscr{K}(L_1)$, значит, $\mathscr{K}(L_2) \nsubseteq \mathscr{K}(L_1)$.

Пусть $\mathscr{K}$ — подкласс класса $\mathscr{K}(\mathrm{DL})$, замкнутый вниз относительно $\preccurlyeq$. Пусть V — многообразие, порожденное этим подклассом, и L — соответствующая ему логика. Ясно, что $\mathscr{K} \subseteq \mathscr{K}(L)$. Предположим, что $\mathscr{K}(L) \nsubseteq \mathscr{K}$, т. е. пусть существует алгебра V_n^m такая, что $V_n^m \in \mathscr{K}(L)$ и $V_n^m \notin \mathscr{K}$. Тогда $V_n^m \in V(L)$ и существует алгебра $V_{n_1}^{m_1} \in \mathscr{K}$, для которой выполнено $V_{n_1}^{m_1} \nvDash \chi(V_n^m)$.

По лемме 1 существует мономорфизм алгебры V_n^m в подходящий гомоморфный образ простой алгебры $V_{n_1}^{m_1}$, значит, $V_n^m \preccurlyeq V_{n_1}^{m_1}$. В силу замкнутости вниз класса $\mathscr{K}$ получаем, что $V_n^m \in \mathscr{K}$; противоречие. Таким образом, мы показали что $\mathscr{K} = \mathscr{K}(L)$. $\square$

§ 3. Необходимое условие амальгамируемости

Шкалой Крипке называется пара $W = \langle W, R\rangle$, где W — множество возможных миров и R — бинарное отношение на W.

Моделью Крипке называется тройка $M = \langle W, R, \vDash\rangle$, где $W = \langle W, R\rangle$ — шкала Крипке и $\vDash$ — отношение между возможным миром и формулой, удовлетворяющее условию, что для любого $x \in W$ и формул A и B (пишем $x \nvDash A$, если $x \vDash A$ не выполнено)

(M0) $x \nvDash \bot$;

(M1) $x \vDash A \to B \Leftrightarrow (x \nvDash A$ или $x \vDash B)$;

(M2) $x \vDash \Box A \Leftrightarrow \forall y\,(xRy \Rightarrow y \vDash A)$.

Формула A *истинна в мире* x (пишем $(M, x) \vDash A$), если выполнено $x \vDash A$. Формула A *истинна в модели* $M = \langle W, R, \vDash\rangle$ (пишем $M \vDash A$), если A истинна в любом мире x модели M. Говорят, что формула A *общезначима в шкале* $W = \langle W, R\rangle$ (пишем $W \vDash A$), если A истинна в любой модели $\langle W, R, \vDash\rangle$, основанной на этой шкале.

Отображение θ шкалы $F = \langle T, R\rangle$ на шкалу $F' = \langle T', R'\rangle$ называется *p-морфизмом*, если для всех $x, y \in T$, $z \in T'$ выполнены условия

(p1) $xRy \Rightarrow \theta(x)R'\theta(y)$,

(p2) $\theta(x)R'z \Rightarrow (\exists y' \in T)(xRy'$ и $\theta(y') = z)$.

Пусть $\mathfrak{A}$ — конечная модальная алгебра. *Шкалой* $T_{\mathfrak{A}}$ *алгебры* $\mathfrak{A}$ будем называть множество всех атомов с отношением $R_{\mathfrak{A}}$, определенным как $aR_{\mathfrak{A}}b \rightleftharpoons (a \le \Diamond b)$ для всех $a, b \in T_{\mathfrak{A}}$.

Поскольку каждый элемент конечной булевой алгебры представим как сумма атомов, то конечная модальная алгебра $\mathfrak{A}$ однозначно определяется своей шкалой $T_{\mathfrak{A}}$. Для $x = \bigvee\limits_{i\in I} a_i \in \mathfrak{A}$, где $a_i \in T_{\mathfrak{A}}$, имеем

$$\Diamond x = \bigvee_{i\in I} \Diamond a_i = \vee\{a \in T_{\mathfrak{A}} \mid (\exists i \in I)\, aR_{\mathfrak{A}}a_i\}.$$

Согласно [6] если $\mathfrak{A}_0$ и $\mathfrak{A}_1$ — конечные модальные алгебры, то $\mathfrak{A}_0$ изоморфно вложима в $\mathfrak{A}_1$ в том и только том случае, когда существует p-морфизм θ из $T_{\mathfrak{A}_1}$ на $T_{\mathfrak{A}_0}$. Мономорфизм $i : \mathfrak{A}_0 \to \mathfrak{A}_1$ и θ связаны соотношением $i\big(\bigvee\limits_{j\in I} a_j\big) = \bigvee\limits_{j\in I} \theta^{-1}(a_j)$, где $a_j \in T_{\mathfrak{A}_0}$ для $j \in I$.

Лемма 4 [6]. *Пусть* $\mathfrak{A}$ *— конечная модальная алгебра,* $\underline{i} : T_{\mathfrak{A}} \to \mathfrak{B}$ *— отображение из* $T_{\mathfrak{A}}$ *в модальную алгебру* $\mathfrak{B}$*, удовлетворяющее для всех атомов* $a, b \in \mathfrak{A}$ *условиям:*

(1) $\underline{i}(a) > 0_{\mathfrak{B}}$;

(2) $\underline{i}(a) \& \underline{i}(b) = 0_{\mathfrak{B}}$ *при* $a \ne b$;

(3) $\vee\{\underline{i}(d) \mid d \in T_{\mathfrak{A}}\} = 1_{\mathfrak{B}}$;

(4) $(a \le \Diamond b) \Rightarrow (\underline{i}(a) \le \Diamond\underline{i}(b))$, $(a \not\le \Diamond b) \Rightarrow (\underline{i}(a) \le \neg\Diamond\underline{i}(b))$.

Тогда продолжение $i : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ *отображения* $\underline{i}$*, где* $i(y) = \vee\{\underline{i}(x) \mid x \in T_{\mathfrak{A}} \wedge x \le y\}$*, есть мономорфизм из* $\mathfrak{A}$ *в* $\mathfrak{B}$.

Частным случаем данной леммы является

Лемма 5. *Пусть $\mathfrak{A}$ — конечная простая DL-алгебра, $\underline{i} : T_{\mathfrak{A}} \to \mathfrak{B}$ — отображение из $T_{\mathfrak{A}}$ в модальную алгебру $\mathfrak{B}$, удовлетворяющее для всех атомов $a, b \in \mathfrak{A}$ условиям:*

(1) $\underline{i}(a) > 0_{\mathfrak{B}}$;

(2) $\underline{i}(a) \& \underline{i}(b) = 0_{\mathfrak{B}}$ *при* $a \neq b$;

(3) $\vee\{\underline{i}(d) \mid d \in T_{\mathfrak{A}}\} = 1_{\mathfrak{B}}$;

(4) $\Diamond\underline{i}(b) = 1$, *если* $\Diamond b = 1$; $\Diamond\underline{i}(b) = \neg\underline{i}(b)$, *если* $\Diamond b = \neg b$.

Тогда продолжение $i : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ отображения $\underline{i}$, где $i(y) = \vee\{\underline{i}(x) \mid x \in T_{\mathfrak{A}} \wedge x \leq y\}$, есть мономорфизм из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$.

Лемма 6. *Пусть отображение $i : V_n^m \to V_{n_1}^{m_1}$ — мономорфизм DL-алгебры V_n^m в DL-алгебру $V_{n_1}^{m_1}$. Тогда выполнены следующие условия:*

(1) *для любого j $(1 \leq j \leq m)$ существует k $(1 \leq k \leq m_1)$ такой, что $i(b_j) = b_k$;*

(2) *для любого l $(1 \leq l \leq n)$ не существует k $(1 \leq n \leq m)$ такого, что $i(a_l) = b_k$;*

(3) *для любых различных атомов $u, v \in V_n^m$ выполняется $i(u) > 0$, а также $i(u) \& i(v) = 0$;*

(4) $\bigvee\limits_{k \leq n} i(a_k) \vee \bigvee\limits_{j \leq m} i(b_j) = 1$.

Доказательство. (1) Пусть $1 \leq j \leq m$. По определению $\Diamond i(b_j) = i(\Diamond b_j) = i(\neg b_j) = \neg i(b_j)$. Таким образом, $0 < i(b_j) < 1$. Докажем, что $i(b_j)$ будет атомом. Заметим, что в $V_{n_1}^{m_1}$ для $x > 0$ выполнено условие $\neg x \leq \Diamond x$. Допустим, что $i(b_j)$ не атом. Найдутся $u, v \in V_{n_1}^{m_1}$ такие, что $i(b_j) = u \vee v$, $u \& v = 0$, значит, $\Diamond i(b_j) = \Diamond u \vee \Diamond v \geq \neg u \vee \neg v = \neg(u \& v) = 1$; противоречие. Итак, $i(b_j)$ — это атом, для которого выполнено условие $\Diamond i(b_j) = \neg i(b_j)$. Тогда найдется k, $1 \leq k \leq m_1$, такой, что $i(b_j) = b_k$.

(2) Пусть l $(1 \leq l \leq n)$ и существует k $(1 \leq k \leq m)$ такое, что $i(a_l) = b_k$. Тогда $\Diamond b_k = \Diamond i(a_l) = i(\Diamond a_l) = i(1) = 1$; противоречие.

Условия (3) и (4) проверяются очевидным образом. $\square$

Лемма 7. *Пусть класс конечно порожденных простых алгебр многообразия $\mathfrak{M}$ модальных алгебр амальгамируем и содержит алгебру V_{n+2}^m для некоторых $n \geq 0$, $m > 0$. Тогда $V_n^m \in \mathfrak{M}$ для всех $n > 0$, $m \geq 0$.*

Доказательство. Пусть класс конечно порожденных простых алгебр многообразия $\mathfrak{M}$ модальных алгебр амальгамируем. Пусть $\mathfrak{A} = V_2^0$, $\mathfrak{B} = V_{n+2}^m$ и $\mathfrak{C} = V_{n+2}^m$. На $T_{\mathfrak{A}}$ положим

$$\begin{cases} \underline{i_1}(a_1) = a_1 \vee a_3 \vee \cdots \vee a_{n+2} \vee b_1 \vee \cdots \vee b_m, \\ \underline{i_1}(a_2) = a_2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{i_2}(a_1) = a_1, \\ \underline{i_2}(a_2) = a_2 \vee a_3 \vee \cdots \vee a_{n+2} \vee b_1 \vee \cdots \vee b_m. \end{cases}$$

Очевидно, что отображения $\underline{i_1}$ и $\underline{i_2}$ удовлетворяют условиям леммы 5 и их можно расширить до мономорфизмов $i_1 : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, $i_2 : \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$.

В силу того, что класс конечно порожденных алгебр многообразия $\mathfrak{M}$ модальных алгебр амальгамируем, существует $(\mathfrak{D}, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ — общее расширение $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ над $\mathfrak{A}$, при этом $\varepsilon_1 i_1(a_1) = \varepsilon_2 i_2(a_1)$ и $\varepsilon_2 i_2(a_2) = \varepsilon_1 i_1(a_2)$ и $\mathfrak{D} \in \mathfrak{M}$. Пусть $j \in \{1, 3, \ldots, n+2\}$, $k \in \{2, 3, \ldots, n+2\}$, $l, p \in \{1, \ldots, m\}$. Положим

$$c_j = \varepsilon_1(a_j), \quad c_2 = \varepsilon_2(a_2), \quad c_{n+k} = \varepsilon_2(a_k)\ (k \geq 3), \quad d_l = \varepsilon_1(b_l), \quad f_p = \varepsilon_2(b_p).$$

Рассмотрим

$$C = \Big\{ \bigvee_{i \in I} c_i \vee \bigvee_{j \in J} d_j \vee \bigvee_{k \in K} f_k \mid I \subseteq \{1, \ldots, 2n{+}2\},\ J \subseteq \{1, \ldots, m\},\ K \subseteq \{1, \ldots, m\} \Big\}.$$

Пусть $t \in \{1, 2\}$. Для $j \neq k$, $l \neq p$ имеем $\varepsilon_t(a_j) \,\&\, \varepsilon_t(a_k) = \varepsilon_t(a_j \,\&\, a_k) = \varepsilon_t(0) = 0$, $\varepsilon_t(b_l) \,\&\, \varepsilon_t(b_p) = \varepsilon_t(b_l \,\&\, b_p) = \varepsilon_t(0) = 0$, $\varepsilon_t(a_j) \,\&\, \varepsilon_t(b_l) = \varepsilon_t(a_j \,\&\, b_l) = \varepsilon_t(0) = 0$ и $\varepsilon_t(a_k) \,\&\, \varepsilon_t(b_l) = \varepsilon_t(a_k \,\&\, b_l) = \varepsilon_t(0) = 0$.

В дальнейшем при доказательстве мы не будем накладывать дополнительного условия различия индексов j и k, l и p. В силу определения отображений i_1 и i_2 выполняются следующие соотношения: $a_j \leq i_1(a_1)$, $a_k \leq i_2(a_2)$, $b_l \leq i_t(a_t)$, $b_p \leq i_t(a_t)$, и, значит,

$$\varepsilon_1(a_j) \,\&\, \varepsilon_2(a_k) \leq \varepsilon_1 i_1(a_1) \,\&\, \varepsilon_2 i_2(a_2) = \varepsilon_1 i_1(a_1) \,\&\, \varepsilon_1 i_1(a_2) = \varepsilon_1 i_1(a_1 \,\&\, a_2) = 0,$$

$$\varepsilon_1(a_j) \,\&\, \varepsilon_2(b_l) \leq \varepsilon_1 i_1(a_1) \,\&\, \varepsilon_2 i_2(a_2) = 0,$$

$$\varepsilon_2(a_k) \,\&\, \varepsilon_1(b_l) \leq \varepsilon_2 i_2(a_2) \,\&\, \varepsilon_1 i_1(a_1) = 0,$$

$$\varepsilon_1(b_l) \,\&\, \varepsilon_2(b_p) \leq \varepsilon_1 i_1(a_1) \,\&\, \varepsilon_2 i_2(a_2) = 0.$$

Получается, что для $q, r \in \{1, \ldots, 2n+2\}$, $l, s \in \{1, \ldots, m\}$ имеем $c_q \& d_l = 0, c_q \& f_l = 0$, $d_l \& f_s = 0$ и при $l \neq s$, $q \neq r$ выполнено $c_q \& c_r = 0$, $d_l \& d_s = 0$ и $f_l \& f_s = 0$. Имеем

$$\begin{aligned}
&c_1 \vee c_2 \vee \cdots \vee c_{2n+2} \vee d_1 \vee \cdots \vee d_m \vee f_1 \vee \cdots \vee f_m \\
&\quad = \varepsilon_1(a_1) \vee \varepsilon_1(a_3) \vee \cdots \vee \varepsilon_1(a_{n+2}) \vee \varepsilon_2(a_2) \vee \varepsilon_2(a_3) \vee \cdots \vee \varepsilon_2(a_{n+2}) \\
&\qquad \vee \varepsilon_1(b_1) \vee \cdots \vee \varepsilon_1(b_m) \vee \varepsilon_2(b_1) \vee \cdots \vee \varepsilon_2(b_m) \\
&= \varepsilon_1(a_1 \vee a_3 \vee a_4 \vee \cdots \vee a_{n+2} \vee b_1 \vee \cdots \vee b_m) \vee \varepsilon_2(a_2 \vee a_3 \vee \cdots \vee a_{n+2} \vee b_1 \vee \cdots \vee b_m) \\
&\qquad = \varepsilon_1 i_1(a_1) \vee \varepsilon_2 i_2(a_2) = \varepsilon_1 i_1(a_1 \vee a_2) = \varepsilon_1 i_1(1) = 1.
\end{aligned}$$

В итоге получается, что C замкнуто относительно булевых операций.

Наконец, $\Diamond c_2 = \Diamond \varepsilon_2(a_2) = \varepsilon_2(\Diamond a_2) = \varepsilon_2(1) = 1 \in C$, $\Diamond c_j = \Diamond \varepsilon_1(a_j) = \varepsilon_1(\Diamond a_j) = \varepsilon_1(1) = 1 \in C$, $\Diamond c_{k+n} = \Diamond \varepsilon_2(a_k) = \varepsilon_2(\Diamond a_k) = \varepsilon_2(1) = 1 \in C$ $(k \neq 2)$, $\Diamond d_l = \Diamond \varepsilon_1(b_l) = \varepsilon_1(\Diamond b_l) = \varepsilon_1(\neg b_l) = \neg \varepsilon_1(b_l) = \neg d_l \in C$, $\Diamond f_l = \Diamond \varepsilon_2(b_l) = \varepsilon_2(\Diamond b_l) = \varepsilon_2(\neg b_l) = \neg \varepsilon_2(b_l) = \neg f_l \in C$. Получили замкнутость относительно операции $\Diamond$.

Значит, C образует подалгебру алгебры $\mathfrak{D}$ со шкалой

$$T_c = \{c_1, \ldots, c_{2n+2}, d_1, \ldots, d_m, f_1, \ldots, f_m\}.$$

В данной алгебре операция $\Diamond$ для атомов определена следующим образом:

$$\Diamond x = \begin{cases} 1, & x = c_i \ \text{ для некоторого } 1 \leq i \leq 2n+2, \\ \neg x, & x = d_j \ \text{ для некоторого } 1 \leq j \leq m, \\ \neg x, & x = f_j \ \text{ для некоторого } 1 \leq j \leq m, \end{cases}$$

поэтому алгебра C изоморфна V_{2n+2}^{2m}. Заметим, что $2n+2 \geq n+2$, $2m > m$, тем самым $V_{n+2}^m \in \mathfrak{M}$ для сколь угодно большого m, а значит, по теореме 6 $V_n^m \in \mathfrak{M}$ для всех $n > 0$, $m \geq 0$. $\square$

Лемма 8. *Пусть класс конечно порожденных простых алгебр многообразия $\mathfrak{M}$ модальных алгебр амальгамируем и содержит алгебру V_1^m для некоторых $m \geq 2$. Тогда $V_0^{2m} \in \mathfrak{M}$.*

Доказательство. Пусть класс конечно порожденных простых алгебр многообразия $\mathfrak{M}$ модальных алгебр амальгамируем. Пусть также $\mathfrak{A} = V_2^0$, $\mathfrak{B} = V_1^m$ и $\mathfrak{C} = V_1^m$. На $T_{\mathfrak{A}}$ положим

$$\begin{cases} \underline{i_1}(a_1) = a_1, \\ \underline{i_1}(a_2) = b_1 \vee \dots \vee b_m, \end{cases} \qquad \begin{cases} \underline{i_2}(a_1) = b_1 \vee \dots \vee b_m, \\ \underline{i_2}(a_2) = a_1. \end{cases}$$

Очевидно, что отображения $\underline{i_1}$ и $\underline{i_2}$ удовлетворяют условиям леммы 5 и их можно расширить до мономорфизмов $i_1 : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, $i_2 : \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$.

В силу того, что класс конечно порожденных простых алгебр многообразия $\mathfrak{M}$ модальных алгебр амальгамируем, в $\mathfrak{M}$ существует $(\mathfrak{D}, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ — общее расширение $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ над $\mathfrak{A}$, при этом $\varepsilon_1 i_1(a_1) = \varepsilon_2 i_2(a_1)$ и $\varepsilon_2 i_2(a_2) = \varepsilon_1 i_1(a_2)$. Пусть $j, k \in \{1, \dots, m\}$. Положим $d_j = \varepsilon_1(b_j)$, $f_k = \varepsilon_2(b_k)$.

Рассмотрим

$$C = \Big\{ \bigvee_{j \in J} d_j \vee \bigvee_{k \in K} f_k \mid J \subseteq \{1, 2, \dots, m\},\ K \subseteq \{1, 2, \dots, m\} \Big\}.$$

Пусть $t \in \{1, 2\}$. Имеем $\varepsilon_t(b_j) \& \varepsilon_t(b_k) = \varepsilon_t(b_j \& b_k) = \varepsilon_t(0) = 0$ при $j \neq k$. Кроме того, выполняется $b_j \leq i_1(a_2)$, $b_j \leq i_2(a_1)$ и, значит,

$$\begin{aligned} d_j \& f_k = \varepsilon_1(b_j) \& \varepsilon_2(b_k) \leq \varepsilon_1 i_1(a_2) \& \varepsilon_2 i_2(a_1) \\ = \varepsilon_1 i_1(a_2) \& \varepsilon_1 i_1(a_1) = \varepsilon_1 i_1(a_1 \& a_2) = \varepsilon_1 i_1(0) = 0. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} d_1 \vee d_2 \vee \dots \vee d_m \vee f_1 \vee f_2 \vee \dots \vee f_m = \varepsilon_1(b_1 \vee b_2 \vee \dots \vee b_m) \vee \varepsilon_2(b_1 \vee b_2 \vee \dots \vee b_m) \\ = \varepsilon_1 i_1(a_2) \vee \varepsilon_2 i_2(a_1) = \varepsilon_1 i_1(a_1 \vee a_2) = \varepsilon_1 i_1(1) = 1 \end{aligned}$$

В итоге получается, что C замкнуто относительно булевых операций.

Наконец, $\lozenge d_j = \lozenge \varepsilon_1(b_j) = \varepsilon_1(\lozenge b_j) = \varepsilon_1(\neg b_j) = \neg \varepsilon_1(b_j) = \neg d_j \in C$ и $\lozenge f_j = \lozenge \varepsilon_1(b_j) = \varepsilon_1(\lozenge b_j) = \varepsilon_1(\neg b_j) = \neg \varepsilon_1(b_j) = \neg f_j \in C$. Получили замкнутость относительно операции $\lozenge$.

Значит, C образует подалгебру алгебры $\mathfrak{D}$ со шкалой $T_c = \{d_1, d_2, \dots, d_m, f_1, f_2, \dots, f_m\}$. В данной алгебре операция $\lozenge$ для атомов определена следующим образом: $\lozenge x = \neg x$, поэтому алгебра C изоморфна V_0^{2m}. Таким образом, $V_0^{2m} \in V(L)$. $\square$

Справедлива следующая

Лемма 9 (см. [5, лемма 8]). *Пусть класс конечно порожденных простых алгебр многообразия $\mathfrak{M}$ модальных алгебр амальгамируем и содержит алгебру V_n^0 для некоторых $n \geq 3$. Тогда $V_n^0 \in \mathfrak{M}$ для всех $n > 0$.*

Предложение 3. *Пусть многообразие $V(L)$ содержит алгебру V_0^j для некоторого $j \geq 5$. Тогда $V(L)$ не амальгамируемо.*

Доказательство. Допустим противное: пусть $V(L)$ амальгамируемо и содержит алгебру V_0^j для некоторого $j \geq 5$. Тогда $V(L)$ содержит V_2^1, которая изоморфно вложима в алгебру V_0^j. По лемме 7 многообразие $V(L)$ содержит все алгебры V_n^m для $n > 0$, $m \geq 0$. Рассмотрим пару алгебр V_0^j и V_1^{j-1}, в них вложима алгебра $V_1^{j-2} \in V(L)$, однако в многообразии $V(L)$ они не имеют общего расширения; противоречие. $\square$

Предложение 4. *Пусть многообразие $V(L)$ содержит алгебру V_2^1. Тогда $V(L)$ не амальгамируемо.*

Доказательство. Допустим, что $V(L)$ амальгамируемо и содержит V_2^1. По лемме 7 $V_n^m \in K(L)$ для $n > 0$, $m \geq 0$. В частности, $V_1^3 \in V(L)$, тогда по лемме 8 $V_0^6 \in V(L)$. Наконец, по предложению 3 многообразие $V(L)$ не амальгамируемо. $\square$

Говорим, что класс $\mathscr{K}$ *порождается алгебрами* $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_n \in \mathscr{K}(DL)$, если $\mathscr{K} = \{\mathfrak{B} \mid \mathfrak{B} \preccurlyeq \mathfrak{A}_i$ для некоторого $1 \leq i \leq k\}$.

Предложение 5. *Пусть класс $\mathscr{K}(L)$ порождается несравнимыми алгебрами и $V_0^1 \notin \mathscr{K}(L)$. Тогда $V(L)$ не амальгамируемо.*

Доказательство. Допустим, что класс $\mathscr{K}(L)$ порождается несравнимыми алгебрами V_i^j и V_k^l и $V_0^1 \notin \mathscr{K}(L)$. Заметим, что алгебра V_1^0 вложима в V_i^j и V_k^l. Однако в классе $\mathscr{K}(L)$ у них нет общего расширения. $\square$

§ 4. Амальгамируемые многообразия DL-алгебр

Итак, основная задача состоит в поиске всех подклассов класса $\mathscr{K}(DL)$, которые могут быть амальгамируемыми. Результаты предложений 3–5 позволяют отбросить существенную часть подклассов класса $\mathscr{K}(DL)$ и перебрать все остальные.

Заметим, что амальгамируемыми являются $\mathscr{K}(L) = \varnothing$ и $\mathscr{K}(L) = \{V_0^1\}$. Классы алгебр $\mathscr{K}(L) = \{V_n^0 \mid n > 0\}$ и $\mathscr{K}(L) = \{V_n^0 \mid n > 0\} \cup \{V_0^1\}$ также является амальгамируемым (см. [5]). Кроме того, наличие в классе алгебры V_0^1 не влияет на амальгамируемость, поэтому число возможных амальгамируемых подклассов класса $\mathscr{K}(DL)$ четно. Получаем, что остается рассмотреть только подклассы, порожденные следующими алгебрами.

(1) V_2^0. В [5] доказано, что он амальгамируем.

(2) V_1^0. Очевидно, что данный подкласс также амальгамируем.

(3) V_0^4. Данный подкласс требует более тщательного изучения, ход которого будет приведен ниже.

(4) V_0^3. Аналогично предыдущему рассмотрение данного подкласса будет представлено ниже.

(5) V_1^2. По лемме 8 при амальгамируемости данного подкласса алгебра V_0^4 должна ему принадлежать; противоречие. Значит, данный подкласс не может быть амальгамируемым.

(6) V_1^1. В [6] показано, что данный подкласс амальгамируем.

(7) V_0^2. Данный подкласс содержит только алгебры V_0^2 и V_1^0. Заметим что алгебра V_1^0 вкладывается в V_0^2 единственным образом, поэтому в качестве амальгамы в данном подклассе может быть выбрана сама алгебра V_0^2.

Таким образом, число амальгамируемых подклассов класса $\mathscr{K}(DL)$ равно 12, 14 или 16.

Разберем подробнее оставшиеся два варианта.

Предложение 6. *Подкласс класса $\mathscr{K}(DL)$, порожденный алгеброй V_0^3, амальгамируем.*

Доказательство. Данный подкласс содержит алгебры, изоморфные V_0^3, V_1^1 и V_1^0. Пусть $i_1 : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, $i_2 : \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$ — мономорфизмы. Рассмотрим всевозможные тройки и найдем амальгамы.

(1) Пусть алгебра $\mathfrak{A}$ изоморфна одной из алгебр $\mathfrak{B}$ или $\mathfrak{C}$. Для определенности пусть $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$. Тогда $\mathfrak{B}$ вложима в $\mathfrak{C}$ с помощью мономорфизма $i_2 i_1^{-1}$ и в качестве амальгамы выбираем саму алгебру $\mathfrak{C}$.

(2) Пусть $\mathfrak{A} \cong V_1^0$. В этом случае одна из алгебр $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ изоморфно вложима в другую. Для определенности пусть $\mathfrak{B}$ вложима в $\mathfrak{C}$, тогда в качестве амальгамы выбираем саму алгебру $\mathfrak{C}$.

(3) $\mathfrak{A} \cong V_1^1$, $\mathfrak{B} \cong V_0^3$, $\mathfrak{C} \cong V_0^3$. Можно считать, что $\mathfrak{A} = V_1^1$, $\mathfrak{B} = V_0^3$, $\mathfrak{C} = V_0^3$. По лемме 6

$$\begin{cases} i_1(a_1) = b_l \vee b_j, \\ i_1(b_1) = b_k, \end{cases} \quad \begin{cases} i_2(a_1) = b_r \vee b_s, \\ i_2(b_1) = b_t, \end{cases}$$

где $\{j,k,l\} = \{1,2,3\} = \{r,s,t\}$.

Пусть $\varepsilon_1 : \mathfrak{B} \to V_0^3$ и $\varepsilon_2 : \mathfrak{C} \to V_0^3$ — отображения, определенные следующим образом: $\varepsilon_1(b_k) = \varepsilon_2(b_t) = b_1$, $\varepsilon_1(b_l) = \varepsilon_2(b_r) = b_2$, $\varepsilon_1(b_j) = \varepsilon_2(b_s) = b_3$. По лемме 5 данные отображения продолжаются до мономорфизмов. Кроме того, выполнены равенства $\varepsilon_1(i_1(a_1)) = \varepsilon_2(i_2(a_1))$ и $\varepsilon_1(i_1(b_1)) = \varepsilon_2(i_2(b_1))$. Таким образом, тройка $\left(V_0^3, \varepsilon_1, \varepsilon_2\right)$ является общим расширением алгебр $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ над $\mathfrak{A}$.

Во всех рассмотренных случаях удалось найти амальгаму из нужного класса, поэтому подкласс класса $\mathscr{K}(DL)$, порожденный алгеброй V_0^3, амальгамируем. $\square$

Предложение 7. *Подкласс класса $\mathscr{K}(DL)$, порожденный алгеброй V_0^4, амальгамируем.*

Доказательство. Данный подкласс содержит алгебры, изоморфные V_0^4, V_1^2, V_1^1, V_2^0 и V_1^0. Пусть $i_1 : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, $i_2 : \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$ — мономорфизмы. Рассмотрим все возможные тройки и найдем амальгамы.

(1) Пусть алгебра $\mathfrak{A}$ изоморфна одной из алгебр $\mathfrak{B}$ или $\mathfrak{C}$. Для определенности пусть $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$. Тогда $\mathfrak{B}$ вложима в $\mathfrak{C}$ и в качестве амальгамы выбираем саму алгебру $\mathfrak{C}$.

(2) Если $\mathfrak{A} \cong V_1^0$, а алгебры $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ сравнимы по вложению, то в качестве амальгамы можно взять одну из них.

(3) $\mathfrak{A} \cong V_1^0$, $\mathfrak{B} \cong V_1^1$, $\mathfrak{C} \cong V_2^0$. В этом случае алгебры $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ вложимы в алгебру V_1^2, которая и будет амальгамой.

(4) $\mathfrak{A} \cong V_2^0$, $\mathfrak{B} \cong V_0^4$, $\mathfrak{C} \cong V_0^4$. Можно считать, что $\mathfrak{A} = V_2^0$, $\mathfrak{B} = V_0^4$ и $\mathfrak{C} = V_0^4$. По лемме 6

$$\begin{cases} i_1(a_1) = b_j \vee b_k, \\ i_1(a_2) = b_l \vee b_m, \end{cases} \quad \begin{cases} i_2(a_1) = b_p \vee b_r, \\ i_2(a_2) = b_s \vee b_t, \end{cases}$$

где $\{j,k,l,m\} = \{1,2,3,4\} = \{p,r,s,t\}$.

Пусть $\varepsilon_1 : \mathfrak{B} \to V_0^4$ и $\varepsilon_2 : \mathfrak{C} \to V_0^4$ — отображения, определенные следующим образом: $\varepsilon_1(b_j) = \varepsilon_2(b_p) = b_1$, $\varepsilon_1(b_k) = \varepsilon_2(b_r) = b_2$, $\varepsilon_1(b_l) = \varepsilon_2(b_s) = b_3$, $\varepsilon_1(b_m) = \varepsilon_2(b_t) = b_4$. По лемме 5 данные отображения продолжаются до мономорфизмов. Кроме того, выполнены равенства $\varepsilon_1(i_1(a_1)) = \varepsilon_2(i_2(a_1))$ и $\varepsilon_1(i_1(a_2)) = \varepsilon_2(i_2(a_2))$. Таким образом, тройка $\left(V_0^4, \varepsilon_1, \varepsilon_2\right)$ является общим расширением алгебр $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ над $\mathfrak{A}$.

(5) $\mathfrak{A} \cong V_2^0$, $\mathfrak{B} \cong V_1^2$, $\mathfrak{C} \cong V_1^2$. Можно считать, что $\mathfrak{A} = V_2^0$, $\mathfrak{B} = V_1^2$, $\mathfrak{C} = V_1^2$. По лемме 6 возможны два варианта.

(a) $\begin{cases} i_1(a_j) = b_1 \vee b_2, \\ i_1(a_k) = a_1, \end{cases} \begin{cases} i_2(a_j) = b_1 \vee b_2, \\ i_2(a_k) = a_1, \end{cases}$ где $\{j,k\} = \{1,2\}$.

Пусть $\varepsilon_1 : \mathfrak{B} \to V_1^2$ и $\varepsilon_2 : \mathfrak{C} \to V_1^2$ — отображения, определенные следующим образом: $\varepsilon_1(b_1) = \varepsilon_2(b_1) = b_1$, $\varepsilon_1(b_2) = \varepsilon_2(b_2) = b_2$, $\varepsilon_1(a_1) = \varepsilon_2(a_1) = a_1$. По лемме 5 данные отображения продолжаются до мономорфизмов. Кроме того, выполнены равенства $\varepsilon_1(i_1(a_j)) = \varepsilon_2(i_2(a_j))$ и $\varepsilon_1(i_1(a_k)) = \varepsilon_2(i_2(a_k))$. Таким образом, тройка $(V_1^2, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ является общим расширением алгебр $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ над $\mathfrak{A}$.

(б) $\begin{cases} i_1(a_j) = b_1 \vee b_2, \\ i_1(a_k) = a_1, \end{cases}$ $\begin{cases} i_2(a_k) = b_1 \vee b_2, \\ i_2(a_j) = a_1, \end{cases}$ где $\{j, k\} = \{1, 2\}$.

Пусть $\varepsilon_1 : \mathfrak{B} \to V_0^4$ и $\varepsilon_2 : \mathfrak{C} \to V_0^4$ — отображения, определенные следующим образом: $\varepsilon_1(b_1) = b_1$, $\varepsilon_1(b_2) = b_2$, $\varepsilon_2(b_1) = b_3$, $\varepsilon_2(b_2) = b_4$, $\varepsilon_1(a_1) = b_3 \vee b_4$, $\varepsilon_2(a_1) = b_1 \vee b_2$. По лемме 5 данные отображения продолжаются до мономорфизмов. Кроме того, выполнены равенства $\varepsilon_1(i_1(a_j)) = \varepsilon_2(i_2(a_j))$ и $\varepsilon_1(i_1(a_k)) = \varepsilon_2(i_2(a_k))$. Таким образом, тройка $\left(V_0^4, \varepsilon_1, \varepsilon_2\right)$ является общим расширением алгебр $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ над $\mathfrak{A}$.

(6) $\mathfrak{A} \cong V_2^0$, $\mathfrak{B} \cong V_1^2$, $\mathfrak{C} \cong V_0^4$. Можно считать, что $\mathfrak{A} = V_2^0$, $\mathfrak{B} = V_1^2$, $\mathfrak{C} = V_0^4$. По лемме 6

$$\begin{cases} i_1(a_j) = a_1 \\ i_1(a_k) = b_1 \vee b_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} i_2(a_j) = b_p \vee b_r, \\ i_2(a_k) = b_s \vee b_t, \end{cases}$$

где $\{j, k\} = \{1, 2\}$, $\{p, r, s, t\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

Пусть $\varepsilon_1 : \mathfrak{B} \to V_0^4$ и $\varepsilon_2 : \mathfrak{C} \to V_0^4$ — отображения, определенные следующим образом: $\varepsilon_1(b_1) = \varepsilon_2(b_s) = b_1$, $\varepsilon_1(b_2) = \varepsilon_2(b_t) = b_2$, $\varepsilon_2(b_p) = b_3$, $\varepsilon_2(b_r) = b_4$, $\varepsilon_1(a_1) = b_3 \vee b_4$. По лемме 5 данные отображения продолжаются до мономорфизмов. Кроме того, выполнены равенства $\varepsilon_1(i_1(a_j)) = \varepsilon_2(i_2(a_j))$ и $\varepsilon_1(i_1(a_k)) = \varepsilon_2(i_2(a_k))$. Таким образом, тройка $\left(V_0^4, \varepsilon_1, \varepsilon_2\right)$ является общим расширением алгебр $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ над $\mathfrak{A}$.

(7) $\mathfrak{A} \cong V_1^1$, $\mathfrak{B} \cong V_0^4$, $\mathfrak{C} \cong V_0^4$. Можно считать, что $\mathfrak{A} = V_1^1$, $\mathfrak{B} = V_0^4$, $\mathfrak{C} = V_0^4$. По лемме 6

$$\begin{cases} i_1(a_1) = b_j \vee b_k \vee b_l, \\ i_1(b_1) = b_m, \end{cases} \qquad \begin{cases} i_2(a_1) = b_p \vee b_r \vee b_s, \\ i_2(b_1) = b_t, \end{cases}$$

где $\{j, k, l, m\} = \{1, 2, 3, 4\} = \{p, r, s, t\}$.

Пусть $\varepsilon_1 : \mathfrak{B} \to V_0^4$ и $\varepsilon_2 : \mathfrak{C} \to V_0^4$ — отображения, определенные следующим образом: $\varepsilon_1(b_m) = \varepsilon_2(b_t) = b_1$, $\varepsilon_1(b_j) = \varepsilon_2(b_p) = b_2$, $\varepsilon_1(b_k) = \varepsilon_2(b_r) = b_3$, $\varepsilon_1(b_l) = \varepsilon_2(b_s) = b_4$. По лемме 5 данные отображения продолжаются до мономорфизмов. Кроме того, выполнены равенства $\varepsilon_1(i_1(a_1)) = \varepsilon_2(i_2(a_1))$ и $\varepsilon_1(i_1(b_1)) = \varepsilon_2(i_2(b_1))$. Таким образом, тройка $\left(V_0^4, \varepsilon_1, \varepsilon_2\right)$ является общим расширением алгебр $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ над $\mathfrak{A}$.

(8) $\mathfrak{A} \cong V_1^1$, $\mathfrak{B} \cong V_1^2$, $\mathfrak{C} \cong V_1^2$. Можно считать, что $\mathfrak{A} = V_1^1$, $\mathfrak{B} = V_1^2$, $\mathfrak{C} = V_1^2$. По лемме 6

$$\begin{cases} i_1(a_1) = a_1 \vee b_j, \\ i_1(b_1) = b_k, \end{cases} \qquad \begin{cases} i_2(a_1) = a_1 \vee b_r, \\ i_2(b_1) = b_s, \end{cases}$$

где $\{j, k\} = \{1, 2\} = \{r, s\}$.

Пусть $\varepsilon_1 : \mathfrak{B} \to V_1^2$ и $\varepsilon_2 : \mathfrak{C} \to V_1^2$ — отображения, определенные следующим образом: $\varepsilon_1(a_1) = \varepsilon_2(a_1) = a_1$, $\varepsilon_1(b_j) = \varepsilon_2(b_r) = b_1$, $\varepsilon_1(b_k) = \varepsilon_2(b_s) = b_2$. По лемме 5 данные отображения продолжаются до мономорфизмов. Кроме того, выполнены равенства $\varepsilon_1(i_1(a_1)) = \varepsilon_2(i_2(a_1))$ и $\varepsilon_1(i_1(b_1)) = \varepsilon_2(i_2(b_1))$. Таким образом, тройка $\left(V_1^2, \varepsilon_1, \varepsilon_2\right)$ является общим расширением алгебр $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ над $\mathfrak{A}$.

(9) $\mathfrak{A} \cong V_1^1$, $\mathfrak{B} \cong V_1^2$, $\mathfrak{C} \cong V_0^4$. Можно считать, что $\mathfrak{A} = V_1^1$, $\mathfrak{B} = V_1^2$, $\mathfrak{C} = V_0^4$. По лемме 6

$$\begin{cases} i_1(a_1) = a_1 \vee b_i, \\ i_1(b_1) = b_j, \end{cases} \qquad \begin{cases} i_2(a_1) = b_p \vee b_r \vee b_s, \\ i_2(b_1) = b_t, \end{cases}$$

где $\{i,j\}=\{1,2\}$, $\{p,r,s,t\}=\{1,2,3,4\}$.

Пусть $\varepsilon_1:\mathfrak{B}\to V_0^4$ и $\varepsilon_2:\mathfrak{C}\to V_0^4$ — отображения, определенные следующим образом: $\varepsilon_2(b_p)=b_1$, $\varepsilon_2(b_r)=b_2$, $\varepsilon_1(a_1)=b_1\vee b_2$, $\varepsilon_1(b_i)=\varepsilon_2(b_s)=b_3$, $\varepsilon_1(b_j)=\varepsilon_2(b_t)=b_4$. По лемме 5 данные отображения продолжаются до мономорфизмов. Кроме того, выполнены равенства $\varepsilon_1(i_1(a_1))=\varepsilon_2(i_2(a_1))$ и $\varepsilon_1(i_1(b_1))=\varepsilon_2(i_2(b_1))$. Таким образом, тройка $\left(V_0^4,\varepsilon_1,\varepsilon_2\right)$ является общим расширением алгебр $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ над $\mathfrak{A}$.

(10) $\mathfrak{A}\cong V_1^2$, $\mathfrak{B}\cong V_0^4$, $\mathfrak{C}\cong V_0^4$. Можно считать, что $\mathfrak{A}=V_1^2$, $\mathfrak{B}=V_0^4$, $\mathfrak{C}=V_0^4$. По лемме 6

$$\begin{cases} i_1(a_1)=b_j\vee b_k,\\ i_1(b_1)=b_l,\\ i_1(b_2)=b_m,\end{cases}\qquad \begin{cases} i_2(a_1)=b_p\vee b_r,\\ i_2(b_1)=b_s,\\ i_2(b_2)=b_t,\end{cases}$$

где $\{j,k,l,m\}=\{1,2,3,4\}=\{p,r,s,t\}$.

Пусть $\varepsilon_1:\mathfrak{B}\to V_0^4$ и $\varepsilon_2:\mathfrak{B}\to V_0^4$ — отображения, определенные следующим образом: $\varepsilon_1(b_j)=\varepsilon_2(b_p)=b_1$, $\varepsilon_1(b_k)=\varepsilon_2(b_r)=b_2$, $\varepsilon_1(b_l)=\varepsilon_2(b_s)=b_3$, $\varepsilon_1(b_m)=\varepsilon_2(b_t)=b_4$. По лемме 5 данные отображения продолжаются до мономорфизмов. Кроме того, выполнены равенства $\varepsilon_1(i_1(a_1))=\varepsilon_2(i_2(a_1))$, $\varepsilon_1(i_1(b_1))=\varepsilon_2(i_2(b_1))$ и $\varepsilon_1(i_1(b_2))=\varepsilon_2(i_2(b_2))$. Таким образом, тройка $\left(V_0^4,\varepsilon_1,\varepsilon_2\right)$ является общим расширением алгебр $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ над $\mathfrak{A}$.

Во всех рассмотренных случаях удалось найти амальгаму из нужного класса, поэтому подкласс класса $\mathscr{K}(DL)$, порожденный алгеброй V_0^4, амальгамируем. $\square$

Подводя итоги, получаем справедливость следующей теоремы.

Теорема 8. *Существует в точности* 16 *слабо амальгамируемых многообразий DL-алгебр, им соответствуют следующие подклассы класса $\mathscr{K}(DL)$:*

(1) *пустой; в этом случае многообразие содержит только одноэлементную алгебру и соответствует противоречивой логике* For*;*

(2) *порожденный алгеброй V_0^1;*

(3) *порожденный всеми алгебрами V_n^0 $(n>0)$; в этом случае многообразие $V(L)$ соответствует логике $S5$;*

(4) *порожденный алгебрами V_n^0 $(n>0)$ и V_0^1;*

(5) *порожденные алгеброй V_j^0 для $j=1,2$;*

(6) *порожденные парой алгебр V_j^0 и V_0^1 для $j=1,2$;*

(7) *порожденный алгеброй V_1^1;*

(8) *порожденный парой алгебр V_1^1 и V_0^1;*

(9) *порожденные алгеброй V_0^k для $k=2,3,4$;*

(10) *порожденные парой алгебр V_0^k и V_0^1 для $k=2,3,4$.*

В силу теорем 1 и 4 амальгамируемость многообразия DL-алгебр эквивалентна его слабой амальгамируемости. Стало быть, мы можем расширить результаты теоремы 8 следующим образом.

Теорема 9. *Все многообразия теоремы* 8 *и только они являются амальгамируемыми многообразиями DL-алгебр.*

Теорема 10. *Многообразие V слабо транзитивных модальных алгебр слабо амальгамируемо тогда и только тогда, когда $V\cap V(DL)$ слабо амальгамируемо.*

Доказательство. Пусть многообразие V слабо транзитивных модальных алгебр слабо амальгамируемо. По теоремам 4 и 5 класс простых конечно порожденных слабо транзитивных модальных алгебр совпадает с классом конечно порожденных простых DL-алгебр. Согласно теореме 3 получаем, что V имеет WAP тогда и только тогда, когда $V \cap V(DL)$ имеет WAP. $\square$

Таким образом, решена проблема амальгамируемости многообразий DL-алгебр. Кроме того, получен критерий слабой амальгамируемости многообразий слабо транзитивных модальных алгебр.

§ 5. Дедуктивное интерполяционное свойство в расширениях логики неравенства

Наконец, обобщим результаты предыдущих параграфов и получим ряд теорем касающихся интерполяции.

Теорема 11. *Логика L, расширяющая логику неравенства DL, обладает дедуктивным интерполяционным свойством тогда и только тогда, когда класс $K(L) = \{V_n^m \mid V_n^m \in V(L),\, n+m>0\}$ является одним из следующих:*

(1) *пустой, соответствующий противоречивой логике For;*
(2) *порожденный алгеброй V_0^1;*
(3) *порожденный всеми алгебрами V_n^0 $(n>0)$, соответствующий логике $S5$;*
(4) *порожденный алгебрами V_n^0 $(n>0)$ и V_0^1;*
(5) *порожденные алгеброй V_j^0 для $j=1,2$;*
(6) *порожденные парой алгебр V_j^0 и V_0^1 для $j=1,2$;*
(7) *порожденный алгеброй V_1^1;*
(8) *порожденный парой алгебр V_1^1 и V_0^1;*
(9) *порожденные алгеброй V_0^k для $k=2,3,4$;*
(10) *порожденные парой алгебр V_0^k и V_0^1 для $k=2,3,4$.*

Доказательство. Пусть логика L расширяет логику неравенства DL и обладает дедуктивным интерполяционным свойством. По теореме 1 многообразие $V(L)$ амальгамируемо. Применив теорему 9, получаем, что класс $\mathscr{K}(L) = \{V_n^m \mid V_n^m \in V(L),\, n+m>0\}$ является одним из классов теоремы. Обратно, пусть L не имеет IPD. В силу теоремы 1 многообразие $V(L)$ DL-алгебр не амальгамируемо. Таким образом, по теореме 1 класс $\mathscr{K}(L)$ не находится среди 16 требуемых классов. $\square$

Теорема 12. *Логика L, расширяющая логику неравенства $wK4$, обладает* WIP *тогда и только тогда, когда логика $L + (A \to \Box\Diamond A)$ обладает* IPD.

Доказательство. Пусть логика L расширяет логику $wK4$ и обладает WIP. Тогда по теоремам 2 и 3 многообразие $V(L)$ слабо амальгамируемо и мы попадаем в условие теоремы 10. Таким образом, многообразие $V(L) \cap V(DL)$ слабо амальгамируемо. Этому многообразию соответствует логика $L + (A \to \Box\Diamond A)$, расширяющая логику DL. По теореме 1 данная логика обладает дедуктивным интерполяционным свойством IPD.

Обратно, пусть $L + (A \to \Box\Diamond A)$ обладает IPD. Данной логике соответствует многообразие $V(L) \cap V(DL)$, в силу теоремы 1 оно является амальгамируемым и, в частности, слабо амальгамируемым. По теореме 10 многообразие $V(L)$ слабо амальгамируемо, а значит, L имеет WIP. $\square$

Таким образом, решена проблема дедуктивной интерполяции в расширениях логики неравенства DL. Кроме того, получен критерий слабой интерполяции для расширений логики $wK4$.

За помощь в постановке задачи и консультации автор статьи выражает благодарность своему научному руководителю д.ф.-м.н. профессору Ларисе Львовне Максимовой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Maksimova L.* Definability and interpolation in non-classical logics // Stud. Log. 2006. V. 82, N 2. P. 271–291.
2. *Максимова Л. Л.* Интерполяционные теоремы в модальных логиках и амальгамируемые многообразия топобулевых алгебр // Алгебра и логика. 1979. Т. 18, № 5. С. 556–586.
3. *Чагров А. В.* Неразрешимые свойства расширений логики доказуемости // Алгебра и логика. 1990. Т. 29, № 5. С. 350–367.
4. *Chagrov A., Zakharyaschev M.* Modal logic. Oxford: Oxford Univ. Press, 1997.
5. *Карпенко А. В.* Слабое интерполяционное свойство в расширениях логик $S4$ и $K4$ // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 6. С. 705–722.
6. *Gabbay D. M., Maksimova L.* Interpolation and definability: modal and intuitionistic logics. Oxford: Clarendon Press, 2005. (Oxford Logic Guides, 46; Oxford Sci. Publ.).
7. *Максимова Л. Л.* Модальные логики и многообразия модальных алгебр: свойство Бета, интерполяция и амальгамируемость // Алгебра и логика. 1992. Т. 31, № 2. С. 145–166.
8. *Карпенко А. В., Максимова Л. Л.* Простые слабо транзитивные модальные алгебры // Алгебра и логика. 2010. Т. 49, № 3.
9. *Segerberg K.* A note on the logic of elsewhere // Theoria. 1980. V. 46, N 2/3. P. 183–187.
10. *Rijke M. de* The Modal logic of inequality // J. Symb. Log. 1992. V. 57, N 2. P. 566–584.
11. *Эсакиа Л. Л.* Слабая транзитивность — реституция. М.: Наука, 2001. (Логические исследования; Т. 8).
12. *Maksimova L.* Restricted interpolation in modal logics // Advances in modal logics. London: Kings's College London Publ., 2003. V. 4. P. 297–312.
13. *Maksimova L.* On a form of interpolation in modal logic // Bull. Symb. Log. 2006. V. 12, N 2. P. 340. (Logic Colloq. 2005).
14. *Максимова Л. Л.* Слабая форма интерполяции в эквациональной логике // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 1. С. 94–107.
15. *Максимова Л. Л.* Разрешимость проблемы интерполяции и родственных свойств в табличных логиках // Алгебра и логика. 2009. Т. 48, № 6. С. 754–792.
16. *Rautenberg W.* Splitting lattice of logics // Arch. Math. Log. 1980. V. 20. P. 155–159.
17. *Rautenberg W.* Klassische und nicht-classische Aussagenlogik. Wiesbaden; Vieweg: Braunschweig, 1979.
18. *Янков В. А.* О связи между выводимостью в интуиционистском исчислении высказываний и конечными импликативными структурами // Докл. АН СССР. 1963. Т. 151, № 6. С. 1293–1294.
19. *Максимова Л. Л.* Об одной классификации модальных логик // Алгебра и логика. 1979. Т. 18, № 3. С. 328–340.

Статья поступила 1 февраля 2010 г.

Карпенко Анастасия Валерьевна
Новосибирский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
karpenko@post.nsu.ru