В. В. Белокуров, В. В. Камчатный, Операторный метод решения уравнений ренормгруппы, *Фундамент. и прикл. матем.*, 1995, том 1, выпуск 3, 613–621

Операторный метод решения уравнений ренормгруппы

В. В. БЕЛОКУРОВ
НИИ ядерной физики МГУ

В. В. КАМЧАТНЫЙ
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Аннотация

Предложен новый метод построения решений функциональных уравнений ренормгруппы. В его основе лежит представление соотношений, которые следуют из уравнений ренормгруппы для коэффициентов разложения инвариантного заряда и функций Грина по степеням константы связи и логарифма безразмерной динамической переменной, в виде операторных уравнений. Операторное представление уравнений ренормгруппы оказывается особенно удобным для нахождения приближенных решений, когда известны несколько первых членов ряда теории возмущений для искомых величин.

Abstract

V. V. Belokurov, V. V. Kamchatny, Operator method of solving renormalization group equations, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika **1**(1995), 613–621.

A new method of solving functional renormalization group equations is proposed. The method is based on representation of the relations for coefficients in perturbation theory series for invariant charge and Green functions as some operator equations. Operator representation of renormalization group equations appears to be particularly convenient for finding approximate solutions when some first terms in perturbation theory for quantities to be found are known.

1. В различных разделах математической физики встречаются задачи, в которых решения уравнений, описывающих ту или иную систему, обладают некоторой дополнительной симметрией — инвариантностью вида их функциональной зависимости относительно изменения способа задания начальных (или граничных) условий [1].

В квантовой теории поля функциональный вид определенных комбинаций функций Грина оказывается независящим от способа их нормировки. Соответствующий произвол задается однопараметрической группой преобразований конечной перенормировки, которая получила название ренормгруппы [2].

Простейший (и вместе с тем наиболее важный для физических приложений) пример величины, которая сохраняет функциональный вид при преобразованиях ренормгруппы, дает эффективная константа связи (инвариантный заряд) в безмассовой однозарядной квантовой теории поля : $\overline{g}(x,g)$. Здесь

Фундаментальная и прикладная математика 1995, **1**, № 3, 613–621.

$x = \dfrac{Q^2}{\mu^2}$ — отношение квадрата переданного импульса к квадрату точки нормировки. Для инвариантного заряда, удовлетворяющего начальному условию $\overline{g}(1, g) = g$, справедливо следующее функциональное уравнение:

$$\overline{g}(tx, g) = \overline{g}(x, \overline{g}(t, g)). \tag{1}$$

Исследование структуры функции $\overline{g}(x, g)$ в рамках теории возмущений позволяет представить ее в виде

$$\overline{g}(x, g) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{i-1} b_{ij} g^i (\ln x)^j. \tag{2}$$

(При этом $b_{10} = 1$.) Обычно для нахождения эффективной константы связи в конкретной квантовополевой модели вычисляют несколько первых коэффициентов b_{ij}, а затем решают получающееся из (1) дифференциальное уравнение

$$x \frac{\partial}{\partial x} \overline{g}(x, g) = \beta(\overline{g}(x, g)), \ \beta(g) = \left[x \frac{\partial}{\partial x} \overline{g}(x, g) \right]_{x=1}, \tag{3}$$

где, однако, для $\beta(g)$ вместо полного ряда

$$\beta(g) = \sum_{i=2}^{\infty} b_{i1} g^i \tag{4}$$

используют лишь конечные суммы с несколькими коэффициентами b_{i1}, вычисленными в рамках теории возмущений[1].

Такой подход позволяет получить выражение для $\overline{g}(x, g)$, совпадающее в соответствующих порядках с тем, которое вычислено в теории возмущений, а также суммирующее в формуле (2) бесконечное число членов, дающих в каждом порядке главный вклад (см. ниже).

Так, если известен только коэффициент b_{21} (в квантовой теории поля он определяется путем вычисления некоторых однопетлевых фейнмановских диаграмм) и для $\beta(g)$ подставлено выражение

$$\beta^{(1)}(g) = b_{21} g^2, \tag{5}$$

то уравнение (3) имеет решение

$$\overline{g}_1(x, g) = \frac{g}{1 - b_{21} g \ln x}. \tag{6}$$

[1]Насколько допустимо ограничиваться конечным числом членов ряда (4), представляет собой отдельную проблему, выходящую за рамки пертурбативной квантовой теории поля, поэтому мы не касаемся ее в настоящей статье.

Задаваемое формулой (6) $\overline{g}(x,g)$, будучи разложено в ряд по степеням g, представляет собой бесконечную сумму членов вида $g(g\ln x)^n$. В области больших x, таких, что $\ln x \gg 1$ (но $g\ln x < 1$), эти слагаемые задают старшую асимптотику эффективной константы связи (2) в каждом порядке. Учет следующих членов в (4) не меняет этих слагаемых, поэтому они правильно воспроизводят все члены $b_{i(i-1)}g^i(\ln x)^{i-1}$ в формуле (2).

Если взять в качестве функции $\beta(g)$ выражение

$$\beta^{(2)}(g) = b_{21}g^2 + b_{31}g^3, \tag{7}$$

полученное в результате вычисления однопетлевых и двухпетлевых фейнмановских диаграмм, то решение уравнения (3) правильно определит в формуле (2) слагаемые вида $g(g\ln x)^n$ и $g^2(g\ln x)^n$. Однако необходимо сделать следующее замечание. Решение уравнения (3) с $\beta(g) = \beta^{(2)}(g)$ задает эффективную константу связи $\overline{g}_2(x,g)$ лишь неявно. Для сравнения теоретических результатов с экспериментальными более удобно иметь явное выражение для $\overline{g}_2(x,g)$. Поэтому вместо решения уравнения (3) используют некоторое другое выражение, которое, не являясь решением уравнения (3), совпадает с ним в членах вида $g(g\ln x)^n$ и $g^2(g\ln x)^n$. В качестве такого выражения после некоторой модификации соотношения, задающего $\overline{g}_2(x,g)$, получается

$$\widetilde{g}_2(x,g) = \frac{g}{1 - b_{21}g\ln x - \dfrac{b_{31}}{b_{21}}g\ln(1 - b_{21}g\ln x)}, \tag{8}$$

которое обычно используется при сравнении предсказаний квантовой хромодинамики с экспериментальными данными.

Мы же предлагаем другой способ получения приближенных решений, который состоит в том, что при заданных $b_{21},\ldots,b_{k1}$ с помощью уравнения ренормгруппы находятся все коэффициенты вида $b_{n(n-1)},\ldots,b_{n(n-k+1)}$, а затем суммируются соответствующие члены в (2). Хотя по известным значениям $b_{21},\ldots,b_{k1}$ можно найти коэффициенты вида $b_{(i_2+2i_3+\ldots+(k-1)i_k+1)(i_2+\ldots+i_k)}$, но за исключением $b_{n(n-1)},\ldots,b_{n(n-k+1)}$, все остальные коэффициенты, вообще говоря, меняются при добавлении новой информации относительно $b_{(k+1)1},\ldots$. Для выполнения указанной программы удобно использовать сформулированное в следующем разделе операторное представление функциональных уравнений ренормгруппы.

2. Вместо того чтобы решать дифференциальное уравнение (3), обратимся непосредственно к функциональному уравнению (1). Подставляя в (1) выражение (2) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $g, \ln x$ и $\ln t$, получим уравнения для коэффициентов b_{ij} :

$$b_{ij}C_j^f = \sum_{n=1}^{i} b_{nf} \sum_{p:(\sum p = i)} \;\sum_{q:(\sum q = j-f)} b_{p_1q_1}\ldots b_{p_fq_f}. \tag{9}$$

Это уравнение выражает коэффициенты $b_{ij}(\forall i, j)$ через стоящие в правой части коэффициенты $b_{\alpha\beta}$ с $\alpha < i, \beta < j$. Очевидно, что для определения всех коэффициентов необходимо и достаточно задать все коэффициенты b_{n1}.

Пусть известны $b_{21}, \ldots, b_{k1}$ до некоторого k включительно. (Напомним, что $b_{10} = 1$.) Положим все остальные $b_{m1}(m > k)$ равными нулю. Из уравнения (9) в этом случае следует, что отличны от нуля только коэффициенты вида

$$b_{(i_2+2i_3+\ldots+(k-1)i_k+1)(i_2+i_3+\ldots+i_k)},$$

где $i_2, \ldots i_k = 0, 1, \ldots$. Положив в уравнении (9) $f = i_2 + i_3 + i_k - 1$, получим для них рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned} & b_{(i_2+2i_3+\ldots+(k-1)i_k+1)(i_2+i_3+\ldots+i_k)} C^{i_2+\ldots+i_k-1}_{i_2+\ldots+i_k} = \\ & \quad = b_{((i_2-1)+2i_3+\ldots+(k-1)i_k+1)(i_2-1+i_3+\ldots+i_k)} b_{21} C^1_{(i_2-1)+2i_3+\ldots+(k-1)i_k+1} + \ldots + \\ & \quad + b_{(i_2+2i_3+\ldots+(k-1)(i_k-1)+1)(i_2+i_3+\ldots+i_k-1)} b_{k1} C^1_{i_2+2i_3+\ldots+(k-1)(i_k-1)+1}. \end{aligned} \tag{10}$$

Обозначив

$$b_{(i_2+2i_3+\ldots+(k-1)i_k+1)(i_2+\ldots+i_k)} = a_{i_2,\ldots,i_k},$$

перепишем (10) как

$$\begin{aligned} a_{i_2,\ldots,i_k} C^1_{i_2+\ldots+i_k} &= a_{i_2-1,\ldots,i_k} b_{21} C^1_{(i_2-1)+2i_3+\ldots+(k-1)i_k+1} + \ldots + \\ & + a_{i_2,\ldots,i_k-1} b_{k1} C^1_{i_2+2i_3+\ldots+(k-1)(i_k-1)+1}. \end{aligned} \tag{11}$$

(Из $b_{10} = 1$ следует, что $a_{0,\ldots,0} = 1$.)

Пусть $L^{(\alpha)}$ $(\alpha = 2, \ldots k)$ — бесконечномерные линейные пространства, в которых заданы базисы $e_i^{(\alpha)}(i = 0, 1, \ldots)$ и определены скалярные произведения

$$\left(e_i^{(\alpha)}, e_j^{(\alpha)}\right) = \delta_{ij} \left(g^{\alpha-1} \ln x\right)^i, \tag{12}$$

Рассмотрим тензорное произведение этих пространств:

$$L = L^{(2)} \otimes \ldots \otimes L^{(k)}. \tag{13}$$

Базис в этом пространстве образуют векторы

$$w(i_2, \ldots i_k) = e_{i_2}^{(2)} \otimes \ldots \otimes e_{i_k}^{(k)}. \tag{14}$$

На L очевидным образом заданы скалярное произведение

$$(u, v) = (u^{(2)}, v^{(2)}) \ldots (u^{(k)}, v^{(k)}) \tag{15}$$

$$(u = u^{(2)} \otimes \ldots \otimes u^{(k)}; v = v^{(2)} \otimes \ldots \otimes v^{(k)}),$$

норма вектора $||u|| = (u, u)^{1/2}$ и метрика $\rho(u, v) = ||u - v||$.

В частности, $\|w(0,\ldots 0)\| = 1$.

Можно доказать полноту L. Таким образом, пространство L — гильбертово. По определению также все вектора из L имеют конечную норму.

Введем на L линейные операторы $\widetilde{A}_2, \ldots \widetilde{A}_k$:

$$\widetilde{A}_\alpha w(i_2,\ldots,i_k) = \\ = b_{\alpha 1}\frac{[i_2+2i_3+\ldots+(\alpha-1)i_\alpha+\ldots+(k-1)i_k+1]}{(i_2+\ldots+i_\alpha+\ldots+i_k+1)}w(i_2,\ldots i_\alpha+1,\ldots i_k). \tag{16}$$

Умножив уравнение (11) на базисный вектор w, перепишем его как

$$a_{i_2,\ldots,i_k}w(i_2,\ldots,i_k) = \\ = a_{i_2-1,\ldots,i_k}\widetilde{A}_2 w(i_2-1,\ldots,i_k)+\ldots+a_{i_2,\ldots,i_k-1}\widetilde{A}_k w(i_2,\ldots,i_k-1). \tag{17}$$

Обозначим
$$G = \sum_{\forall i_2,\ldots,i_k} a_{i_2,\ldots,i_k}w(i_2,\ldots,i_k). \tag{18}$$

Чтобы получить из (17) уравнение для G, заметим, что правая часть (17) определена только при $i_2+\ldots+i_k>0$. Суммируя по всем этим значениям (i) и добавляя в правую и левую части $w(0,\ldots,0)$, имеем

$$G = (\widetilde{A}_2+\ldots+\widetilde{A}_k)G + w(0,\ldots,0). \tag{19}$$

Поскольку в области малых $g\ln x$ операторы $\widetilde{A}_\alpha$ сжимающие, можно решать уравнение (19) методом последовательных приближений. В результате G имеет вид
$$G = \frac{1}{1-(\widetilde{A}_2+\ldots+\widetilde{A}_k)}\,w(0,\ldots,0). \tag{20}$$

Вместо выражения (20) удобнее, однако, записать G в виде

$$G = \exp(A_2+\ldots+A_k)w(0,\ldots,0), \tag{21}$$

где операторы A определены как

$$A_\alpha w(i_2,\ldots,i_k) = (i_2+\ldots+i_k+1)\widetilde{A}_\alpha w(i_2,\ldots,i_k). \tag{22}$$

Рассмотрим скалярные произведения вида

$$F^z(u) = (z,u)\,,\ z = \sum_{\forall(i_2,\ldots i_k)} w(i_2,\ldots i_k). \tag{23}$$

В частности,

$$F^z(w(i_2,\ldots,i_k)) = (g\ln x)^{i_2}\ldots(g^{k-1}\ln x)^{i_k}. \tag{24}$$

Нетрудно заметить, что решение функционального уравнения ренормгруппы

$$\overline{g}_k(x,g) = \\ = \sum_{\forall (i_2,\ldots i_k)} b_{(i_2+2i_3+\ldots(k-1)i_k+1)(i_2+\ldots+i_k)} g^{(i_2+2i_3+\ldots+(k-1)i_k+1)} (\ln x)^{(i_2+\ldots+i_k)} \tag{25}$$

записывается как

$$\overline{g}_k(x,g) = gF^z(G). \tag{26}$$

3. Применив теперь развитый в предыдущем разделе формализм, получим решения уравнений ренормгруппы в некоторых конкретных случаях.

Пусть $k=2$, т. е. известен только b_{21} (и $b_{10}=1$). Нетрудно заметить, что

$$A_2^n w(0) = b_{21}^n n! w(n). \tag{27}$$

Поэтому решение имеет вид

$$\overline{g}(x,g) = gF^z(e^{A_2} w(0)) = \frac{g}{1 - b_{21} g \ln x}. \tag{28}$$

Пусть теперь $k=3$, т. е. известны b_{21} и $b_{31}(b_{10}=1)$. Найдем приближенное решение, которое соответствует суммированию членов с коэффициентами $b_{(i_2+1)i_2}$ и $b_{(i_2+2+1)(i_2+1)}$. Очевидно, для этого необходимо в формуле (26) оставить лишь слагаемые, линейные по оператору A_3.

Воспользуемся формулой Бейкера-Хаусдорфа

$$e^{A+B} = e^B e^A e^{\frac{1}{2}[A,B]} e^{\frac{1}{3!}[[A,B],B]} \ldots \tag{29}$$

и разложим $\exp(A_2 + A_3)$ в ряд, сохраняя лишь члены, линейные по A_3 :

$$e^{A_2+A_3} \simeq e^{A_2} \left(1 + A_3 + \frac{1}{2}[A_3 A_2] + \frac{1}{3!}[[A_3 A_2] A_2] + \ldots\right). \tag{30}$$

По индукции можно доказать, что

$$[\ldots[[A \underbrace{B]B]\ldots B]}_{n} = (-)^n (B^n A - C_n^1 B^{n-1} AB + C_n^2 B^{n-2} AB^2 - \ldots (-)^n AB^n). \tag{31}$$

Действие операторов $[\ldots[A_3 \underbrace{A_2]A_2]\ldots A_2]}_{n}$ на $w(0,0)$ выглядит следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&[\ldots[A_3 \underbrace{A_2]\ldots A_2]}_{n} w(0,0) = \\
&\quad = (-)^n \left[\frac{(n+2)!}{2} - C_n^1 \frac{(n+2)!}{3} + C_n^2 \frac{(n+2)!}{4} - \ldots (-)^n \frac{(n+2)!}{n+1}\right] b_{31} b_{21}^n w(n,1) = \\
&\quad = (-)^n (n+2)! \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{(-)^k C_n^k}{k+2}\right] b_{31} b_{21}^n w(n,1) = \\
&\quad = (-)^n (n+2)! \sum_{k=0}^{n} (-)^k C_n^k \int_0^1 x^{k+1}\, dx\, b_{31} b_{21}^n w(n,1) = \\
&\quad = (-)^n (n+2)! \int_0^1 x(1-x)^n dx b_{31} b_{21}^n w(n,1) = \\
&\quad = (-)^n (n+2)! \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+3)} b_{31} b_{21}^n w(n,1) = (-)^n n! b_{31} b_{21}^n w(n,1).
\end{aligned}
\tag{32}
$$

Обозначив $v(n,1) \equiv b_{31} b_{21}^n w(n,1)$, имеем

$$
G \simeq e^{A_2}(w(0,0) + v(0,1) - \frac{1}{2} v(1,1) + \frac{1}{3} v(2,1) - \frac{1}{4} v(3,1) + \ldots). \tag{33}
$$

Прежде всего вычислим $gF^z(e^{A_2} v(i,1))$. Для этого разложим e^{A_2} в ряд, возьмем функционал F^z от каждого слагаемого и после суммирования получим

$$
gF^z(e^{A_2} v(i,1)) = g \frac{(b_{21} g \ln x)^i b_{31} g^2 \ln x}{(1 - b_{21} g \ln x)^{i+3}}. \tag{34}
$$

В итоге приближенное решение задается формулой

$$
\begin{aligned}
&\overline{g}_2(x,g) = gF^z(e^{A_2}(w(0,0) + v(0,1) - \frac{1}{2} v(1,1) + \frac{1}{3} v(2,1) \ldots) = \\
&\quad = \frac{g}{1 - b_{21} g \ln x} \left(1 + \frac{b_{31} g^2 \ln x}{(1 - b_{21} g \ln x)^2} - \frac{1}{2} \frac{b_{31} g^2 \ln x b_{21} g \ln x}{(1 - b_{21} g \ln x)^3} + \ldots\right) = \\
&\quad = \frac{g}{1 - b_{21} g \ln x} - \frac{b_{31}}{b_{21}} g^2 \frac{\ln(1 - b_{21} g \ln x)}{(1 - b_{21} g \ln x)^2}.
\end{aligned}
\tag{35}
$$

Аналогичным образом можно получить приближенное решение, если известны $b_{10}, b_{21}, b_{31}, b_{41}$. В этом случае $\exp(A_2 + A_3 + A_4)$ следует разложить до членов, содержащих первую степень оператора A_4, либо квадрат оператора A_3. Опуская очевидные, хотя и громоздкие выкладки, приведем ответ для этого случая:

$$
\begin{aligned}
\overline{g}_3(x,g) = \frac{g}{1-b_{21}g\ln x} - g^2\frac{b_{31}}{b_{21}}\frac{\ln(1-b_{21}g\ln x)}{(1-b_{21}g\ln x)^2} + \\
+ g^3\frac{b_{41}}{b_{21}}\frac{b_{21}g\ln x}{(1-b_{21}g\ln x)^3} - g^3\left(\frac{b_{31}}{b_{21}}\right)^2\frac{b_{21}g\ln x+\ln(1-b_{21}g\ln x)}{(1-b_{21}g\ln x)^3}.
\end{aligned}
\tag{36}
$$

4. Описанный операторный метод непосредственно обобщается для функциональных уравнений реномгруппы, которым удовлетворяют функции Грина. Пусть $\mathcal{F}(x,g)$ — некоторая симметричная функция Грина. Она удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{F}(tx,g) = \mathcal{F}(t,g)\mathcal{F}(x,\overline{g}(t,g)). \tag{37}$$

Подставляя для $\overline{g}(x,g)$ разложение (2), и для $\mathcal{F}$ сумму вида

$$\mathcal{F}(x,g) = \sum_{i,j} f_{ij}g^i(\ln x)^j, \tag{38}$$

получим уравнение для коэффициентов

$$f_{ij}C_j^l = \sum f_{sl}\sum_{p,m:(\sum p+m=i)}\ \sum_{q,n:(\sum q+n=j-k)} b_{p_1q_1}\dots b_{p_sq_s}f_{mn}. \tag{39}$$

При этом $f_{00}=1, b_{10}=1$. Если вычислены коэффициенты $b_{21},\dots,b_{m1}$ и $f_{11},\dots,f_{n1}$, то, считая остальные $b_{\overline{m}1}, f_{\overline{n}1}$ ($\overline{m}>m, \overline{n}>n$) равными нулю, получим, что ненулевыми окажутся коэффициенты

$$f_{(j_2+\dots+(m-1)j_m+i_1+2i_2+\dots ni_n)(j_2+\dots+j_m+i_1+\dots+i_n)} \equiv d_{j_2,\dots,j_m,i_1,\dots,i_n}. \tag{40}$$

Обобщим теперь введенные в разделе 2 конструкции.

Определим новое пространство $\widetilde{L}$ с базисными векторами

$$\widetilde{w}_{(j_2,\dots,j_m,i_1,\dots,i_n)},$$

скалярное произведение которых равно

$$(\widetilde{w},\widetilde{w}') = \delta_{ii'}\delta_{jj'}(g\ln x)^{j_2}\dots(g^{m-1}\ln x)^{j_m}(g\ln x)^{i_1}\dots(g^n\ln x)^{i_n}. \tag{41}$$

Зададим также операторы A_α и B_β соотношениями

$$
\begin{aligned}
&A_\alpha\widetilde{w}_{(j_2,\dots,j_m,i_1,\dots,i_n)} = \\
&\quad = b_{\alpha1}(j_2+\dots+(m-1)j_m+i_1+\dots+ni_n)\widetilde{w}(j_2,\dots,j_\alpha+1,\dots j_m,j_1,\dots i_n),
\end{aligned}
\tag{42}
$$

$$B_\beta\widetilde{w}(j_2,\dots,j_m,i_1,\dots i_n) = f_{\beta1}\widetilde{w}(j_2,\dots,j_m,i_1,\dots,i_\beta+1,\dots i_n). \tag{43}$$

Для вектора

$$\Phi = \sum_{\forall (i,j)} d_{j_2,\dots,j_m,i_1,\dots i_n} \widetilde{w}(j_2,\dots,j_m,i_1,\dots,i_n) \tag{44}$$

получим решение

$$\Phi = \exp \sum_{\alpha\beta} (A_\alpha + B_\beta) \widetilde{w}(0,\dots,0). \tag{45}$$

Взяв теперь скалярное произведение с вектором

$$\widetilde{z} = \sum_{\forall (i,j)} \widetilde{w}(j,i),$$

найдем решение уравнения ренормгруппы для функции Грина

$$\mathcal{F}(x,g) = F^{(\tilde{z})}(\Phi) \equiv (\widetilde{z},\Phi). \tag{46}$$

Итак, предлагаемый в статье операторный метод решения уравнений ренормгруппы оказывается универсальным. Его достоинством — возможность единым образом получать приближенные решения для инвариантного заряда и функций Грина, используя в качестве исходной информации разное число предварительно вычисляемых в конкретной квантовополевой модели коэффициентов.

Литература

[1] Shirkov D. V. — Int. J. Mod. Phys. — 1988. — V. A3. — P. 1321.

[2] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. 4 изд. — М.: Наука, 1984. — 600 с.

Статья поступила в редакцию в апреле 1995 г.