С.В.Кисляков

ЕЩЕ РАЗ О СВОБОДНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ФУНКЦИЯМИ, РЕГУЛЯРНЫМИ ВНЕ ПРЕДПИСАННОГО МНОЖЕСТВА

§ 0. Введение

Грубая формулировка задачи, которой посвящена эта статья, состоит в следующем. Пусть K – замкнутое подмножество окружности $\mathbb{T}$, $mK>0$ (m – нормированная мера Лебега на $\mathbb{T}$). Пусть $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ – банаховы пространства функций на $\mathbb{T}$, содержащиеся как множества в H^2 (операторы вложения предполагаются непрерывными). Положим $\mathcal{F}_-=\{\bar{z}g(\bar{z}):g\in\mathcal{F}\}$ $(\|\bar{z}g(\bar{z})\|_{\mathcal{F}_-}\overset{\text{def}}{=}\|g\|_{\mathcal{F}})$ и пусть

$$V=V(\mathcal{E},\mathcal{F},K)\overset{\text{def}}{=}\{f\in L^2(\mathbb{T}):f|(\mathbb{T}\setminus K)=0,\mathbb{P}_+f\in\mathcal{E},\mathbb{P}_-f\in\mathcal{F}_-\}$$

($\mathbb{P}_+$ и $\mathbb{P}_-$ – ортогональные проекторы, действующие из L^2, соответственно, на H^2 и H^2_-). Для каких пар $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ пространство V достаточно обширно?

При этом мы, конечно, будем стремиться выбрать $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ возможно более узкими. Критерием "обширности" пространства V будет разрешимость в нем некоторых классических задач о свободной интерполяции (как обычно, прилагательное "свободная" означает, что на интерполяционные данные накладываются лишь минимальные естественные ограничения, выраженные, к тому же, в более грубых терминах, чем ограничения на интерполирующие функции). Чтобы до конца объяснить название статьи, отметим еще, что если $f\in V$, то функции $\mathbb{P}_+f$ и $\mathbb{P}_-f$ являются граничными значениями двух функций, G и H, первая из которых аналитична в круге $\mathbb{D}$, вторая – в области $\hat{\mathbb{C}}\setminus\mathbb{D}$, и при этом функции G и $-H$ аналитически продолжимы одна в другую через каждую точку множества $\mathbb{T}\setminus K$ *).

Точное представление о том, какие именно интерполяционные задачи имеются в виду, можно получить из формулировки теоремы I в § 2. Здесь отметим лишь, что речь пойдет о следующем:

о случаях, когда совокупность последовательностей коэффициентов Фурье $\{\{\hat{f}(n)\}_{n\in\Gamma}:f\in V\}$ (здесь $\Gamma\subset\mathbb{Z}$) совпадает с (или "мало отличается" от) $\ell^2(\Gamma)$;

*) Во всем, что последует, мы могли бы не требовать замкнутости множества K – она нужна лишь для того, чтобы обеспечить "настоящую" аналитическую продолжимость G в $-H$.

об интерполяционных задачах типа Рудина – Карлесона – т.е. о том, верно ли (при условии $\mathcal{E} \subset C_A$, где C_A — как обычно, диск-алгебра) равенство

$$C(E)=\{(\mathbb{P}_+ f)|E : f\in V\},$$

где $E = \operatorname{clos} E \subset K$, $mE = 0$;

о совмещении граничной интерполяции и интерполяции коэффициентами Фурье.

Будет доказана, кроме того, "теорема об исправлении" (см. § 2, теорема 2), которая также демонстрирует, что в пространстве $V(\mathcal{E},\mathcal{F},K)$ при соответствующих предположениях содержится "много" функций.

Пространства $V(\mathcal{E},\mathcal{F},K)$ уже изучались с интерполяционной точки зрения. Самые сильные из полученных до сих пор результатов содержатся в статьях [I], § 4 и [2], § 4 и, грубо говоря, сводятся к следующему.

(а). Наиболее просто дело обстоит, если множество K имеет непустую внутренность относительно $\mathbb{T}$. Тогда в качестве $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ можно взять любые пространства, удовлетворяющие введенным в [2] (и воспроизводимым в следующем параграфе) аксиомам – теоремы о свободной интерполяции будут верны в достаточно сильной форме. Среди пространств, удовлетворяющих этим аксиомам, находятся, например, диск-алгебра C_A и пространство U_A,

$$U_A \stackrel{def}{=} \{f\in C_A : \text{ряд} \sum_{n\geq 0} \hat{f}(n) z^n \text{ сходится равномерно в } \overline{\mathbb{D}}\},$$

$$\|f\|_{U_A} \stackrel{def}{=} \sup\{|\sum_{j=0}^{k} \hat{f}(j)\zeta^j| : k\geq 0,\ |\zeta|\leq 1\}$$

(б). Если $\operatorname{int} K=\emptyset$, то неочевидным (даже в "простых" случаях) становится уже соотношение $V(\mathcal{E},\mathcal{F},K)\neq\{\mathbb{O}\}$. Более того, оно неверно, если $\mathcal{E}\subset C_A$ и $\mathcal{F}\subset C_A$ (поскольку тогда все функции из $V(\mathcal{E},\mathcal{F},K)$ непрерывны и обращаются в нуль на плотном множестве $\mathbb{T}\setminus K$). Можно, тем не менее, достаточно простыми средствами доказать многие интерполяционные теоремы, например, в случае

$$\mathcal{E}=\mathcal{F}=U_A^\infty \stackrel{def}{=} \{f\in H^\infty : \sup_{k,\zeta} |\sum_{j=0}^{k} \hat{f}(j)\zeta^j| < \infty\}$$

(см. [I], теорема 4.I2). При этом, однако, сама постановка задачи о граничной интерполяции на множествах меры нуль теряет смысл.

(в) Пусть по-прежнему $\operatorname{int} K=\emptyset$, но мы непременно хотим соблюсти условие $\mathcal{E}\subset C_A$. Этот случай наиболее труден, а относящаяся к нему информация наименее полна. В [2] показано (теорема 4.I), что пространство $V(\mathcal{E},\mathcal{F},K)$ все же достаточно обширно, если $\mathcal{E}$ удовлетворяет упомянутым выше аксиомам, а $\mathcal{F}=H^2$. Без всяких изменений метод из [2] годится и для $\mathcal{F}=H^p, 2\le p<\infty$, однако этим практически исчерпывается все, что здесь известно.

В настоящей статье приводятся новые продвижения в случае (в). Два формально довольно частных, но, видимо, все же основных следствия полученных здесь результатов таковы.

(I). Теорема 4.I из [2] (упомянутая выше) сохраняется для $\mathcal{F}=\mathbb{P}_+C(\mathbb{T})$.

(2). Можно еще сильнее сузить пространство $\mathcal{F}$, оставив в нем лишь функции, которым хоть и позволено расти, но не быстрее, чем это предписано наперед.

Однако естественный вопрос о том, что произойдет в случае, если $\mathcal{F}=(\mathbb{P}_+C(\mathbb{T}))\cap H^\infty$ (или даже просто $\mathcal{F}=H^\infty$) остается по-прежнему открытым.

БЛАГОДАРНОСТЬ. Автор признателен С.В.Хрущеву за замечания, способствовавшие улучшению изложения.

§ I. Основной технический результат

В этом параграфе мы докажем техническое утверждение (лемма 2), из которого выводятся теоремы об интерполяции и исправлении (они обсуждаются в § 2). Схема доказательства этого утверждения взята в главных чертах из [2] (с.203), однако здесь доказательству будет придан "аксиоматический" характер – именно, будут выделены простые условия на пространства $\mathcal{E}$ и (или) $\mathcal{F}$ ("аксиомы"), при выполнении которых оно проходит. Первые три аксиомы – AI, A2 и A3$_p$ – рассматривались в [2].

Пусть $\mathfrak{X}$ – банахово пространство аналитических функций в круге (для определенности будем предполагать, что $\mathfrak{X}\subset H^2$ и вложение непрерывно). Через $\mathcal{P}_A$ обозначается множество всех аналитических полиномов.

AI. $\mathfrak{X}\text{-}\operatorname{clos}\mathcal{P}_A=\mathfrak{X}$ и $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\|z^n\|_{\mathfrak{X}}^{1/n}\le 1$.

Легко видеть (см.[2], с.I77-I78), что если выполнена аксиома AI (а это обычно будет предполагаться), то для всякого функционала Φ, $\Phi\in\mathfrak{X}^*$, формула

$$\mathcal{K}\Phi(\zeta)\overset{\text{def}}{=}<(1-\bar\zeta z)^{-1},\Phi>=\sum_{n=0}^{\infty}\bar\zeta^n<z^n,\Phi>,|\zeta|<1,$$

определяет антианалитическую функцию в круге (преобразование Коши функционала Φ). Как обычно, если $|\zeta|=1$, мы понимаем под $\mathcal{K}\Phi(\zeta)$ соответствующий радиальный предел (если он существует).

А2. Существует число $\varkappa$, $\varkappa>0$, такое, что

$$\sup_{0\leqslant r<1} m\{t\in\mathbb{T}:|\mathcal{K}\Phi(rt)|>y\}\leqslant\frac{\varkappa}{y}\|\Phi\|_{\mathfrak{X}^*},$$

если $\Phi\in\mathfrak{X}^*$, $y>0$.

Пусть $0<p<1$. Легко видеть (см.[2], лемма I.I), что следующая аксиома слабее, чем А2.

А3$_p$. Если $\Phi\in\mathfrak{X}^*$, то $\mathcal{K}\Phi\in\overline{H^p}$ и $\|\mathcal{K}\Phi\|_p\leqslant c\|\Phi\|_{\mathfrak{X}^*}$

(c не зависит от Φ).

Пространство U_A (определение см. в § 0) удовлетворяет аксиомам АI и А2 (см.[I], §§ I-2), и о нем нужно думать, как о главном примере. Тем же аксиомам удовлетворяет, конечно, и диск-алгебра C_A - формально аксиома А2 для C_A следует из сказанного и того, что $U_A\subset C_A$, но проще получить ее непосредственно из теоремы Колмогорова - Смирнова.

Для дальнейшего удобно дать одно определение. Пусть (S,μ) - пространство с мерой. Абсолютно выпуклое множество M измеримых функций на S называется слабо предкомпактным по мере (или слабо μ-предкомпактным), если для любой последовательности $\{g_i\}_{i\geqslant 0}$ функций из M найдутся сходящаяся по мере последовательность функций $\{h_i\}_{i\geqslant 0}$ и последовательность индексов $\{n_i\}$, $n_0<n_1<n_2<\ldots$, такие, что $h_i\in\operatorname{conv}\{g_j:j\geqslant n_i\}$. Если множество M еще и замкнуто по мере, то оно называется слабо компактным по мере (слабо μ-компактным).

Введение такой терминологии оправдывается тем, что в любом банаховом пространстве сильное и слабое замыкание любого выпуклого множества совпадают, и поэтому всякое слабо предкомпактное подмножество банахова пространства, конечно, обладает свойством, аналогичным описанному (с заменой сходимости по мере на сходимость по норме). Ясно также, что если T - линейный непрерывный оператор, действующий из некоторого банахова пространства X в пространство измеримых функций с топологией сходимости по мере, то множество $T(R)$ слабо (пред)компактно по мере для любого слабо (пред)компактного в X множества R.

Теперь введем аксиому, которая не рассматривалась в [2]. Она относится к паре $(\mathfrak{X}, K)$, где $\mathfrak{X}$ – то же, что и выше, а $K = \operatorname{clos} K \subset \mathbb{T}$, $mK > 0$. Пусть $0 < p < 1$.

B_p. $\mathfrak{X}$ удовлетворяет аксиоме $A3_p$ и множество $\{(\mathcal{K}\Phi)\mathbb{1}_K : \|\Phi\|_{\mathfrak{X}^*} \leqslant 1\}$ слабо m-предкомпактно.

Примеры выполнения аксиомы B_p будут подробно разбираться в § 3. Сейчас мы приведем только один из них. Множество $\mathbb{P}_+ C$, $\mathbb{P}_+ C \overset{\mathrm{def}}{=} \{\mathbb{P}_+ f : f \in C = C(\mathbb{T})\}$ мы будем считать наделенным нормой факторпространства $C_A / \bar{z}\, \overline{C_A}$, с которым это множество естественно отождествляется.

ЛЕММА I. Для любого p, $0 < p < 1$, пара $(\mathbb{P}_+ C, \mathbb{T})$ удовлетворяет аксиоме B_p.

Доказательство будем дано в § 3. Заметим, что $(\mathbb{P}_+ C)^* = \overline{H^1}$, и поэтому пространство $\mathbb{P}_+ C$ удовлетворяет также аксиоме A2.

Теперь мы непосредственно приступаем к изучению пространства $V(\mathcal{E}, \mathcal{F}, K)$. В случае, когда $K = \mathbb{T}$, оно будет обозначаться просто через $V(\mathcal{E}, \mathcal{F})$. Последнее пространство можно отождествить с прямой суммой $\mathcal{E} \oplus \mathcal{F}_-$. Мы всегда будем предполагать, что $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ удовлетворяют аксиоме AI, так что на пространствах $\mathcal{E}^*$ и $\mathcal{F}^*$ определено преобразование Коши $\mathcal{K}$. Пусть $\mathcal{K}_-$ – результат естественной "пересадки" оператора $\mathcal{K}$ с $\mathcal{F}^*$ на $\mathcal{F}_-^*$ (формально, $\mathcal{K}_- \Psi(\zeta) = \bar{\zeta}\, \mathcal{K}(T^*\Psi)(\bar{\zeta})$, $\Psi \in \mathcal{F}_-^*$, где T – естественная изометрия между $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}_-$: $Tf = \bar{z} f(\bar{z})$, $f \in \mathcal{F}$). Заметим, что множество $\mathcal{K}_-(\mathcal{F}_-^*)$ состоит из функций, аналитических в круге. В случае, когда пространства $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ удовлетворяют аксиоме $A3_p$, положим для каждого функционала F, $F = (\Phi, \Psi) \in \mathcal{E}^* \oplus \mathcal{F}_-^* = V(\mathcal{E}, \mathcal{F})^*$,

$$\mathcal{W} F(\zeta) = \mathcal{K}\Phi(\zeta) + \mathcal{K}_-\Psi(\zeta), \quad |\zeta| = 1.$$

Если $K \subset \mathbb{T}$, $0 < mK < 1$, то пусть

$$\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F}, K) = \{F \in V(\mathcal{E}, \mathcal{F})^* : \mathcal{W} F(\zeta) = 0 \text{ п.в.на } K\}.$$

Следующая лемма – тот самый технический результат, о котором говорится в заглавии параграфа.

ЛЕММА 2. Пусть $\mathcal{E}, \mathcal{F} \subset H^2$ (вложения непрерывны), $K = \operatorname{clos} K \subset \mathbb{T}$, $0 < mK < 1$, $0 < p < 1$. Предположим, что пространство $\mathcal{E}$ удовлетворяет аксиоме $A3_p$, а пара $(\mathcal{F}, K)$ – аксиоме B_p. Тогда:

(I) множество $\mathcal{L}(\mathcal{E},\mathcal{F},K)$ $(*)$-слабо замкнуто в пространстве $V(\mathcal{E},\mathcal{F})^*$;

(2) если $F\in V(\mathcal{E},\mathcal{F})^*$ и $F|V(\mathcal{E},\mathcal{F},K)=0$, то $F\in \mathcal{L}(\mathcal{E},\mathcal{F},K)$.

СЛЕДСТВИЕ. В условиях леммы 2 $V(\mathcal{E},\mathcal{F},K)\neq\{0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следствия. $V(\mathcal{E},\mathcal{F},K)$ – (замкнутое) подпространство пространства $V(\mathcal{E},\mathcal{F})$. Достаточно проверить, что его аннулятор X в $V(\mathcal{E},\mathcal{F})^*$ не совпадает с $V(\mathcal{E},\mathcal{F})^*$. Но утверждение (2) леммы 2 говорит о том, что $X\subset\mathcal{L}(\mathcal{E},\mathcal{F},K)$, а $\mathcal{L}(\mathcal{E},\mathcal{F},K)\neq V(\mathcal{E},\mathcal{F})^*$, так как, например, функционал F, $F(g)=\int_{\mathbb{T}} g\,dm$, не лежит в $\mathcal{L}(\mathcal{E},\mathcal{F},K)$. ●

Лемма 2 будет выведена (как и соответствующее утверждение в [2] – лемма 4.2) из теоремы Хинчина-Островского, которая формулируется ниже. Читатель, знакомый с [2], заметит, что главное отличие в рассуждениях состоит в том, что здесь эта теорема применяется дважды (как к $\mathcal{E}^*$, так и к $\mathcal{F}^*$).

ТЕОРЕМА ХИНЧИНА-ОСТРОВСКОГО. (См. [4], с.118). Пусть $\{f_n\}$ – последовательность функций из класса Неванлинна N, $K\subset\mathbb{T}$, $mK>0$. Предположим, что $f_n\,|\,K\to g$ по мере и что

$$\sup_{n,\,0\le r<1}\int_{\mathbb{T}}\log^+|f_n(r\zeta)|\,dm(\zeta)<\infty.$$

Тогда последовательность $\{f_n\}$ сходится равномерно на компактах, лежащих в круге $\mathbb{D}$, к некоторой функции f, $f\in N$, причем граничные значения этой функции п.в. на K совпадают с g.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.

(I). Достаточно проверить, что пересечение пространства $\mathcal{L}(\mathcal{E},\mathcal{F},K)$ с единичным шаром пространства $V(\mathcal{E},\mathcal{F})^*$ $(*)$-слабо замкнуто, что эквивалентно (поскольку $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ сепарабельны) секвенциальной $(*)$-слабой замкнутости этого пересечения.

Итак, пусть $F_n\in\mathcal{L}(\mathcal{E},\mathcal{F},K)$, $\|F_n\|\le1$, $F_n=(\Phi_n,\Psi_n)$ (где $\Phi_n\in\mathcal{E}^*$, $\Psi_n\in\mathcal{F}_-^*$), причем $\Phi_n\to\Phi\in\mathcal{E}^*$, $\Psi_n\to\Psi\in\mathcal{F}_-^*$ (сходимости, соответственно, в топологиях $\sigma(\mathcal{E}^*,\mathcal{E})$ и $\sigma(\mathcal{F}_-^*,\mathcal{F}_-)$). Мы должны показать, что $(\Phi,\Psi)\in\mathcal{L}(\mathcal{E},\mathcal{F},K)$.

Можно без потери общности считать, что, вдобавок ко всем свойствам, перечисленным в предыдущем абзаце, мы имеем еще и такое: функции $(\mathcal{K}-\Psi_n)\mathbb{1}_K$ сходятся по мере к некоторой функции g. (Этого можно добиться, используя аксиому B_p для пары $(\mathcal{F},K)$ – нужно перейти от функционалов F_n к подходящим их выпуклым комбинациям). Так как $F_n \in \mathcal{L}(\mathcal{E},\mathcal{F},K)$, то $(\mathcal{K}\Phi_n)\mathbb{1}_K \to -g$ по мере. Из определения преобразования Коши и из $(*)$-слабой сходимости последовательностей $\{\Phi_n\}$ и $\{\Psi_n\}$ вытекает, что $\mathcal{K}\Phi_n(z) \to \mathcal{K}\Phi(z)$, $\mathcal{K}_-\Psi_n(z) \to \mathcal{K}_-\Psi(z)$, $|z|<1$. Из теоремы Хинчина-Островского теперь следует, что $(\mathcal{K}\Phi)\mathbb{1}_K = -g$ и $(\mathcal{K}_-\Psi)\mathbb{1}_K = g$, т.е. $(\Phi,\Psi)\in\mathcal{L}(\mathcal{E},\mathcal{F},K)$.

(2). Каждой функции h, $h\in L^2(\mathbb{T})$, соответствует функционал F_h на пространстве $V(\mathcal{E},\mathcal{F})$,

$$F_h(g) = \int_{\mathbb{T}} g h\, dm$$

Ясно, что $g\in V(\mathcal{E},\mathcal{F},K)$ тогда и только тогда, когда $F_h(g)=0$ для всех h, равных нулю п.в. на K, поэтому

$$\{F\in V(\mathcal{E},\mathcal{F})^*:\ F|V(\mathcal{E},\mathcal{F},K)=\mathbb{0}\}=$$

$$=(*)\text{-}\operatorname{clos}\{F_h: h\in L^2,\ h=0 \text{ п.в. на } K\}$$

Но если $h=0$ п.в. на K, то, очевидно, $F_h\in\mathcal{L}(\mathcal{E},\mathcal{F},K)$, и осталось сослаться на уже доказанную часть леммы. ●

Стоит, пожалуй, отметить, что если для пары $(\mathcal{F},K)$ выполнена аксиома B_p, то множество $\{(\mathcal{K}\Phi)\mathbb{1}_K : \|\Phi\|_{\mathfrak{X}^*}\le 1\}$ автоматически является слабо компактным (а не только слабо предкомпактным) по мере. Это немедленно следует из теоремы Хинчина - Островского.

§ 2. Интерполяция и исправление

Переходя к обещанным результатам о свободной интерполяции, следует сразу сказать, что здесь не будет приведено полных доказательств. Все (или почти все) необходимые рассуждения содержатся в опубликованных ранее статьях - см. например, [I], [2]. К сожалению, они содержатся там все же не в такой форме, чтобы доказательство приводимой ниже теоремы I свелось к их механическому повторению. Автор, однако, надеется, что возникающие препятствия вполне преодолимы для читателя. К тому же, все детали будут приведены в обзоре, который С.А.Виноградов, С.В.Хрущев и автор собираются опубликовать в будущем.

ТЕОРЕМА I. Пусть $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ и K удовлетворяют условиям леммы 2.

(а). Пусть Γ, $\Gamma \subset \mathbb{Z}$ – множество типа $\Lambda(s)$ для некоторого s, $s>2$ [ж]. Тогда для любой последовательности a, $a=\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, существует такая функция f, $f \in V(\mathcal{E}, \mathcal{F}, K)$, что $\|f\|_V \leqslant c\|a\|_2$ (постоянная c определяется множествами Λ и K и константами из аксиомы A3$_p$ для пространств $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$) и выполняются соотношения

$$\|a\|_{\ell^2} \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n||\hat{f}(n)| \tag{I}$$

$$a_n = \hat{f}(n), \quad n \in \Gamma \tag{2}$$

(б). Предположим дополнительно, что $\mathcal{E} \subset C_A$ и для пространств $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ выполнена аксиома A2. Пусть $E = \operatorname{clos} E \subset K$, $mE = 0$ и всякая точка множества E является точкой плотности для K. Пусть, как и раньше, $a \in \ell^2(\mathbb{Z})$ и, кроме того, задана функция x, $x \in C(E)$. Тогда найдется функция $f, f \in V(\mathcal{E}, \mathcal{F}, K)$ удовлетворяющая соотношениям (I), (2), равенству

$$(P_+ f)|E = x \tag{3}$$

и такая, что $\|f\|_V \leqslant c(\|a\|_2 + \|x\|_{C(K)})$, где c снова определяется множествами Λ и K и постоянными из аксиомы A2 для пространств $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$.

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Основная идея – перейти к двойственной задаче. Эта последняя будет состоять в оценке снизу норм подходящих функционалов на пространстве $V(\mathcal{E}, \mathcal{F}, K)$. Оценивать такие нормы позволяет следующее соображение (именно в нем используется лемма 2 из предыдущего параграфа).

Всякий функционал F, $F \in V(\mathcal{E}, \mathcal{F}, K)^*$, можно продолжить (многими способами, вообще говоря), до некоторого функционала $\tilde{F}$, $\tilde{F} = (\Phi, \Psi) \in V(\mathcal{E}, \mathcal{F})^* = (\mathcal{E} \oplus \mathcal{F}_-)^*$. Но из второй части леммы 2 следует, что ф у н к ц и я $(\mathcal{K}\Phi + \mathcal{K}_-\Psi)\mathbb{1}_K$ н е з а в и с и т о т к о н к р е т н о г о в ы б о р а п р о д о л ж е н и я $\tilde{F}$. Обозначив эту функцию через τF,

---

[ж] Это означает, что на множестве тригонометрических полиномов со спектром не шире, чем Γ, нормы всех пространств L^r, $0 < r \leqslant s$, эквивалентны.

мы получим тем самым линейный оператор $\mathcal{T}$, непрерывно действующий из $V(\mathcal{E},\mathcal{F},K)^*$ в $L^p(K,m)$ (если пространства $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ удовлетворяют аксиоме А3_p) или в пространство Лоренца $L^{1,\infty}(K,m)$ (если для $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ выполнена аксиома А2). Норма этого оператора зависит лишь от констант из неравенств в этих аксиомах.

Теперь в качестве иллюстрации мы продемонстрируем, как получить функцию, удовлетворяющую (только) неравенству (I) (и, конечно, неравенству $\|f\|_V \leqslant C\|a\|_2$). По поводу остального заметим лишь, что для того, чтобы удовлетворить всем условиям, кроме (I), достаточно почти дословно повторить доказательство теоремы 4.I в [2]. Совмещение же всех вообще свойств, о которых говорится в теореме, в одной функции, требует некоторой дополнительной работы – на ней мы по указанным выше причинам не останавливаемся.

То, что мы собираемся доказать, означает, что если обозначить через T_a оператор из $V(\mathcal{E},\mathcal{F},K)$ в ℓ^1, задаваемый формулой

$$T_a f = \{a_n \hat{f}(n)\}_{n\in\mathbb{Z}},$$

то $\|T_a\| \geqslant \mathrm{const}\,\|a\|_{\ell^2}$ $(\mathrm{const} = c^{-1})$. Рассмотрим сопряженный оператор $T_a^*: \ell^\infty \longrightarrow V(\mathcal{E},\mathcal{F},K)^*$; он действует по формуле

$$\langle f, T_a^*\xi\rangle = \int f\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \xi_n \bar{z}^n\Big)dm,\ \xi\in\ell^\infty.$$

Легко понять, что $\mathcal{T}\,T_a^*\xi = \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\xi_n\bar{z}^n\Big)\mathbb{1}_K$, откуда, обозначив через $\{r_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ последовательность функций Радемахера, получим:

$$\|T_a\| = \|T_a^*\| \geqslant \|T_a^*\{r_n(t)\}_{n\in\mathbb{Z}}\| \geqslant$$

$$\geqslant \|\mathcal{T}\|^{-1}\Big\|\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n r_n(t) z^n\Big)\mathbb{1}_K\Big\|_{L^p(m)},\ t\in[0,1].$$

Осталось возвести это неравенство в степень p, проинтегрировать "по t" по отрезку $[0,I]$ и воспользоваться неравенством Хинчина. ●

Теперь сформулируем и докажем обещанную во введении теорему об исправлении (мы не будем здесь стремиться к максимальной общности).

ТЕОРЕМА 2. Пусть по-прежнему тройка $(\mathcal{E},\mathcal{F},K)$ удовлетворяет условиям леммы 2 и, кроме того, для $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ выполнена аксиома А2. Тогда найдется такая постоянная c, что для всякой функции f, $f\in L^\infty(K)$ и всякого числа ε, $0<\varepsilon<1$, существует функция g из $V(\mathcal{E},\mathcal{F},K)$ со следующими свойствами: $m\{f\neq g\}\leqslant c\varepsilon$; $\|g\|_{V(\mathcal{E},\mathcal{F},K)}\leqslant c(\log\varepsilon^{-1})\|f\|_\infty$.

Эту теорему можно назвать "теоремой об исправлении" лишь с некоторой натяжкой. В примерах – как в том единственном, который нам доступен сейчас (именно, $\mathcal{E}=U_A$, $\mathcal{F}=P_+C$), так и в разобранных в следующем параграфе, – функция g действительно во многих отношениях "гораздо лучше", чем f; однако она, в отличие от f, может не быть ограниченной.

Для доказательства теоремы достаточно применить общую схему, изложенную в [3], §§ 2–3. В [3], правда, речь шла об исправлении функций из пространства $L^\infty(\mu)$ до функций из некоторого класса X, содержащегося в $L^\infty(\mu)$. Однако последнее предположение было сделано лишь по психологическим причинам и не играло никакой роли в доказательствах. Таким образом, все, что нужно проверить, чтобы указанная схема заработала, состоит вот в чем (см. [3], с.188, лемма 3; с.183, теорема 3 и следующее за ней доказательство утверждения (а) теоремы I).

ЛЕММА 3. Пусть выполнены условия теоремы 2. Пусть $i: V(\mathcal{E},\mathcal{F},K)\to L^2(K)$ – оператор тождественного вложения. Тогда для всякой функции F из $L^2(K)$ выполнено неравенство

$$m\{s\in K:|F(s)|>t\}\leqslant\frac{c\|i^*F\|_{V(\mathcal{E},\mathcal{F},K)^*}}{t},\quad t>0$$

(здесь, конечно, $L^2(K)$ отождествляется с $L^2(K)^*$ с помощью двойственности $\langle f,g\rangle=\int fg\,dm$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть τ – отображение из доказательства теоремы I. Тогда, очевидно, $\tau i^*F=F$, и осталось вспомнить, что при сделанных предположениях оператор τ действует непрерывно из $V(\mathcal{E},\mathcal{F},K)^*$ в $L^{1,\infty}(K,m)$. ●

§ 3. Примеры

Мы не будем описывать здесь примеры пространств, более узких, чем U_A, и удовлетворяющих аксиомам АI и А2 (или АI и А3$_p$), ограничившись упоминанием о том, что среди них есть достаточно интересные (в том числе, кстати, и такие, для которых выполнена аксиома А3$_p$, но не А2). Подробно эти пространства будут рассматриваться в обзоре, упомянутом в начале § 2. Идеи их построения принадлежат в основном С.А.Виноградову.

Мы сосредоточимся на конструировании примеров, в которых выполнена аксиома B_p. Главную роль будет играть следующая лемма (она фактически была установлена при доказательстве теоремы 5 в [5]; мы докажем ее здесь ради полноты).

ЛЕММА 4. Пусть (S,μ) – пространство с конечной мерой. Тогда единичный шар пространства $L^1(\mu)$ слабо μ -компактен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f_n \in L^1(\mu)$, $\|f_n\| \leqslant 1$ $(n \geqslant 0)$. Положим для всякого δ, $\delta > 0$,

$$\sigma(\delta) = \sup\Big\{ \int_e |f_n| : \mu e \leqslant \delta,\ n \geqslant 0 \Big\},$$

и пусть $\eta = \lim\limits_{\delta \to 0} \sigma(\delta)$ (заметим, что σ – монотонная функция). Если $\eta = 0$, то последовательность $\{f_n\}$ слабо относительно компактна в $L^1(\mu)$, и доказывать нечего. Пусть $\eta > 0$. Выберем множества e_k и номера n_k, $k \geqslant 0$, так, чтобы выполнялись соотношения

$$n_k \nearrow \infty,\ m e_k \leqslant 2^{-k},\ \int_{e_k} |f_{n_k}|\,d\mu \geqslant \sigma(2^{-k}) - k^{-1}.$$

Пусть $g_k = f_{n_k} \mathbb{1}_{S \setminus e_k}$. Если $e \subset S$, то

$$\int_e |g_k|\,d\mu = \int_{e \setminus e_k} |g_k|\,d\mu = \int_{e \cup e_k} |f_{n_k}|\,d\mu - \int_{e_k} |f_{n_k}|\,d\mu \leqslant$$

$$\leqslant \sigma(2^{-k} + \mu(e)) - \sigma(2^{-k}) + k^{-1} \xrightarrow[k\to\infty,\ \mu e \to 0]{} 0.$$

Отсюда вытекает, что последовательность $\{g_k\}$ слабо относительно компактна в $L^1(\mu)$. Следовательно, найдутся функции h_j и индексы k_j, $k_0 < k_1 < \ldots$, такие, что $h_j \in \operatorname{conv}\{g_{k_i} : i \geqslant j\}$ и последовательность $\{h_j\}$ сходится в $L^1(\mu)$. Пусть $h_j = \sum_{i:i\geqslant j} \alpha_i^{(j)} g_{k_i}$, где $\alpha_i^{(j)} \geqslant 0$, $\sum_{i:i\geqslant j} \alpha_i^{(j)} = 1$ (и для каждого j соотношение $\alpha_i^{(j)} \neq 0$ справедливо лишь для конеч-

6 1559

ного множества индексов i). Тогда функция u_j , $u_j=\sum_{i\geq j} \alpha_i^{(j)} f_{n_{k_i}}$, отличается от h_j разве лишь на множестве $\bigcup_{i:i\geq j} e_{k_i} \overset{\mathrm{def}}{=} E_j$. Поскольку $\mu E_j \leq 2^{-k_j+1} \to 0$, последовательность $\{u_j\}$ сходится по мере. ●

Из леммы 4 сразу вытекает лемма I из § I, поскольку множество $\{\mathcal{K}\Phi : \Phi\in(\mathbb{P}_+ C)^*,\ \|\Phi\|\leq 1\}$ совпадает с единичным шаром пространства $\overline{H^1}$. ●

Приведем теперь более тонкие примеры, основанные на лемме 4. Для этого сделаем небольшое отступление. Пусть B - компактное абсолютно выпуклое подмножество локально выпуклого пространства Z , Y - линейная оболочка множества B . Превратим Y в банахово пространство, объявив B его единичным шаром (полнота Y легко следует из компактности множества B в Z).

ЛЕММА 5. Пусть при сделанных предположениях $X=\{F\in Y^*$: сужение $F\,|\,B$ непрерывно в топологии, индуцированной из $Z\}$; наделим X нормой из пространства Y^* . Тогда $Y=X^*$ и на B топология пространства Z совпадает с $\sigma(Y,X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО приводится лишь ради полноты, поскольку лемма хорошо известна. Ясно, что для всякого непрерывного функционала f на пространстве Z сужение $f\,|\,Y$ лежит в X . Пусть X_0 - замыкание множества всех таких сужений по норме пространства X . Теорема о биполяре, примененная к пространству Z , показывает, что всякий функционал g на X_0 , такой, что $\|g\|_{X_0^*}\leq 1$, порождается элементом множества B , поэтому $Y=X_0^*$. По определению пространства X топология пространства Z на B не слабее, чем $\sigma(Y,X)$ и тем более не слабее, чем $\sigma(Y,X_0)$. Поскольку последняя топология хаусдорфова, а множество B компактно в Z , все три топологии совпадают на B . Наконец, отсюда следует, что $X=X_0$, так как по теореме Банаха всякий функционал x , $x\in X$, будучи $\sigma(X_0^*,X_0)$ непрерывным на шаре B пространства $X_0^*\,(=Y)$, должен лежать в X_0. ●

Пусть теперь $\mathfrak{X}$ - пространство аналитических функций в круге, непрерывно вложенное в H^2 и удовлетворяющее аксиомам AI и $A3_p$, $K=\operatorname{clos} K\subset\mathbb{T}$, $0<mK<1$. Пара $(\mathfrak{X},K)$ может не удовлетворять аксиоме B_p (более того, во введении отмечалось, что в интересующем нас случае $\mathcal{E}\subset C_A$ может встретиться равенство $V(\mathcal{E},\mathfrak{X},K)=\{\mathbb{O}\}$). План дальнейшего состоит в том, чтобы расширить $\mathfrak{X}$ - по возможности, не очень сильно, - обеспечив при этом выполнение аксиомы B_p .

Зафиксируем число α , $\alpha>0$, и положим

$$B_d=\{\Phi:\Phi\in\mathfrak{X}^*,\ \|\Phi\|_{\mathfrak{X}^*}\leqslant 1,\ \int\limits_K|\mathcal{K}\Phi|dm\leqslant d\}.$$

ЛЕММА 6. Множество B_d $\sigma(\mathfrak{X}^*,\mathfrak{X})$ – компактно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить, что это множество секвенциально (*) –слабо замкнуто. Пусть $\Phi_n\in B_d$, $\Phi_n\longrightarrow\Phi$ в топологии $\sigma(\mathfrak{X}^*,\mathfrak{X})$. Лемма 4 позволяет считать, что функции $(\mathcal{K}\Phi_n)\mathbb{1}_K$ сходятся по мере к функции g, $g\in L^1(K,m)$, $\int\limits_K|g|dm\leqslant d$. По теореме Хинчина–Островского, $g=(\mathcal{K}\Phi)\mathbb{1}_K$. ●

Теперь применим описанную выше общую конструкцию к пространству $(\mathfrak{X}^*,\sigma(\mathfrak{X}^*,\mathfrak{X}))$ в качестве „Z" и множеству B_d в качестве „B" (лемма 6 позволяет это сделать). Тогда B_d окажется шаром некоторого банахова пространства Y, причем $Y=X^*$, где X – пространство из леммы 5 *). Очевидно, что $\mathcal{P}_A\subset\mathfrak{X}\subset X$. Так как множество $\mathcal{P}_A$ тотально на Y (оно тотально даже на $\mathfrak{X}^*$), то оно плотно по норме в X.

Поскольку пространство $\mathfrak{X}$ непрерывно вложено в H^2, некоторый шар (с центром в нуле) пространства $(H^2)^*$ (т.е. H^2_-) содержится в B_d. Это означает, что на множестве $\mathcal{P}_A$ норма пространства X сильнее H^2–нормы, и, следовательно, возникает непрерывный оператор $\mathcal{T}$ из X в H^2, тождественный на полиномах.

В принципе вполне мыслима ситуация, в которой $\mathrm{Ker}\,\mathcal{T}\neq\{\mathbb{0}\}$ (если это так, то в пространстве X имеются "сингулярные" элементы, не отвечающие аналитическим функциям в круге). Мы уйдем, однако, от изучения возникающих в связи с этим задач (которые, видимо, трудны и интересны – но их решение вряд ли даст такую информацию, которая может показаться важной в контексте теорем из § 2), рассмотрев факторпространство $X/\mathrm{Ker}\,\mathcal{T}\overset{def}{=\!=}X_0$.

Пространство X_0 можно считать (и мы будем это делать) состоящим из аналитических функций в круге. Оно непрерывно вложено в H^2, множество $\mathcal{P}_A$ плотно в нем и $\overline{\lim}\|z^n\|_{X_0}^{1/n}\leqslant\overline{\lim}\|z^n\|_{\mathfrak{X}}^{1/n}\leqslant 1$, так что X_0 удовлетворяет аксиоме AI.

Ясно, что $X_0^*=(\mathrm{Ker}\,\mathcal{T})^{\perp}$, а единичный шар пространства X_0^* совпадает с множеством $B_d\cap(\mathrm{Ker}\,\mathcal{T})^{\perp}$. Теперь из леммы 4 и того, что для пространства $\mathfrak{X}$ выполнена аксиома $A3_p$, следует, что пара (X_0,K) удовлетворяет

---

*) Отметим, что чем больше d, тем "меньше отличается" множество B_d от шара $\{\Phi\in\mathfrak{X}^*:\|\Phi\|\leqslant 1\}$ – и, следовательно, пространство X от пространства $\mathfrak{X}$.

аксиоме B_p. Отметим еще, что если в $\mathfrak{X}$ выполнена аксиома А2, то то же верно и для X_0.

Таким образом, пространство X_0 может играть роль пространства „$\mathcal{F}$" в теоремах из § 2. Константы в оценках из этих теорем не будут зависеть от d (поскольку от d не зависят константы, с которыми выполняются аксиомы А2 или А3$_p$ для X_0). Понятно, что d выгодно брать большим.

Построенное пространство обладает одним недостатком – именно, не очень ясно, из каких же функций оно состоит. Мы сейчас избавимся от этого недостатка, слегка расширив X_0 (заключения теорем I и 2, конечно, не разрушаются при замене пространств $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ более широкими). Мы не будем выяснять (как и в случае с ядром отображения $\mathcal{T}$), является ли это расширение строгим.

Пусть $Q = H^2\text{-}clos\{g \in \mathfrak{X} : \|g\| \leq 1\}$, $R = \{\mathbb{P}_+(h \mathbb{1}_K) : h \in L^\infty, \|h\|_\infty \leq d^{-1}\}$. Обозначим через $|\cdot|$ функционал Минковского множества $conv(Q \cup R)$. Поскольку это множество слабо компактно в H^2, его линейная оболочка – банахово пространство с нормой $|\cdot|$. Пусть $\mathcal{F}(\mathfrak{X}, K, d)$ – замыкание множества $\mathcal{P}_A$ в этом пространстве.

ЛЕММА 7. Если $f \in \mathcal{P}_A$, то $|f| \leq \|f\|_{X_0}$. Следовательно, $X_0 \subset \mathcal{F}(\mathfrak{X}, K, d)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сохраним обозначения, введенные при построении пространства X_0. Мы видели, что X_0^* – подпространство пространства Y; в свою очередь, отображение $\Phi \mapsto (\Phi, (\mathcal{K}\Phi)\mathbb{1}_K)$ изометрически вкладывает Y в прямую сумму $\mathfrak{X}^* \oplus L^2(K)$, нормированную следующим образом: $\|(a,b)\| = max\{\|a\|_{\mathfrak{X}^*}, d^{-1}\|b\|_{L^1(K)}\}$. По теореме Хана-Банаха, для каждой функции f, $f \in X_0$, мы можем найти функционал F, $F \in \mathfrak{X}^{**}$, и функцию h, $h \in L^\infty(K)$, такие, что $\|F\|_{\mathfrak{X}^{**}} + d\|h\|_\infty = \|f\|_{X_0}$ и

$$<f, \Phi> = <\Phi, F> + \int_K (\mathcal{K}\Phi) h \, dm, \quad \Phi \in Y.$$

Подставляя сюда $\Phi = \bar{z}^n$, получим, считая, что $h = 0$ на $\mathbb{T} \setminus K$:

$$\hat{f}(n) = \langle z^n, F \rangle + (\mathbb{P}_+ h)^\wedge(n), \; n \geq 0 \qquad (4)$$

Функционал F является $\sigma(\mathfrak{X}^{**}, \mathfrak{X}^*)$-пределом некоторой обобщенной последовательности $\{F_\alpha\}$, где $F_\alpha \in \mathfrak{X}$, $\|F_\alpha\|_{\mathfrak{X}} \leq \|F\|_{\mathfrak{X}^{**}}$.

Пусть g – слабая предельная точка этой обобщенной последовательности в H^2. Тогда $g \in \|F\|_{\mathfrak{X}^{**}} Q$ и $\hat{g}(n) = \langle z^n, F \rangle$, $n \geq 0$. Из формулы (4) теперь следует, что $f = g + \mathbb{P}_+ h$. ●

Итак, заключения теорем I и 2 справедливы и при $\mathcal{F}=\mathcal{F}(\mathfrak{X},K,d)$ причем, как и в случае $\mathcal{F}=X_0$, константы в оценках не зависят от d (d, конечно, как и раньше, выгодно брать большим).

Сделаем несколько замечаний о пространстве $\mathcal{F}(\mathfrak{X},K,d)$. Прежде всего, если $\mathfrak{X}\subset H^\infty$, то $\mathcal{F}(\mathfrak{X},K,d)\subset \mathbb{P}_+C$, ибо $\mathbb{P}_+C=\operatorname{clos}_{\mathbb{P}_+L^\infty}(\mathcal{P}_A)$, а непрерывность тождественного вложения пространства $\mathcal{F}(\mathfrak{X},K,d)$ в $\mathbb{P}_+L^\infty$ очевидна. Можно показать, что $\mathcal{F}(\mathfrak{X},K,d)\neq \mathbb{P}_+C$ уже в случае $\mathfrak{X}=C_A$. Наконец, если $\mathfrak{X}=U_A$, то множество $H^2\text{-}\operatorname{clos}\{g\in\mathfrak{X}:\|g\|_{\mathfrak{X}}\leqslant 1\}$ совпадает с единичным шаром пространства U_A^∞ — так что в этом случае состав пространства $\mathcal{F}(\mathfrak{X},K,d)$ достаточно ясен.

Теперь мы укажем способ дальнейшего сужения пространства с сохранением аксиомы B_p (тем самым будет выполнено обещание, данное в конце введения). Пусть $\mathfrak{X}_1,\dots,\mathfrak{X}_n$ — пространства, удовлетворяющие аксиоме AI. Рассмотрим на их пересечении норму $\|\cdot\|$,

$$\|x\|\overset{\mathrm{def}}{=}\max\{\|x\|_{\mathfrak{X}_1},\dots,\|x\|_{\mathfrak{X}_n}\}$$

и пусть $\Lambda\{\mathfrak{X}_1,\dots,\mathfrak{X}_n\}$ — замыкание множества $\mathcal{P}_A$ в этой норме.

ЛЕММА 8. Если для каждого i, $1\leqslant i\leqslant n$, пара $(\mathfrak{X}_i,K)$ удовлетворяет аксиоме B_p, то то же верно и для пары $(\Lambda\{\mathfrak{X}_1,\dots,\mathfrak{X}_n\},K)$. Аксиомы $A3_p$ и A2 тоже переносятся с пространств $\mathfrak{X}_1,\dots,\mathfrak{X}_n$ на $\Lambda\{\mathfrak{X}_1,\dots,\mathfrak{X}_n\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть случай $n=2$. Пусть $\Lambda\{\mathfrak{X}_1,\mathfrak{X}_2\}=\mathcal{Y}$. Отображение $f\longmapsto(f,f)$ изометрически вкладывает $\mathcal{Y}$ в прямую сумму $\mathfrak{X}_1\oplus\mathfrak{X}_2$, нормированную по типу ℓ^∞, так что для каждого функционала F, $F\in\mathcal{Y}^*$, найдутся такие функционалы Φ из $\mathfrak{X}_1^*$ и Ψ из $\mathfrak{X}_2^*$, что $\|F\|=\|\Phi\|+\|\Psi\|$ и $F(f)=\Phi(f)+\Psi(f)$, $f\in\mathcal{Y}$. Отсюда следует, что $\mathcal{K}F=\mathcal{K}\Phi+\mathcal{K}\Psi$, поэтому, во-первых, аксиомы A2 и $A3_p$ переносятся с $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_2$ на $\mathcal{Y}$, а во-вторых,

$$\mathcal{K}\{F:\|F\|_{\mathcal{Y}^*}\leqslant 1\}=\operatorname{conv}\bigl[\mathcal{K}\{\Phi:\|\Phi\|_{\mathfrak{X}_1^*}\leqslant 1\}\cup\mathcal{K}\{\Psi:\|\Psi\|_{\mathfrak{X}_2^*}\leqslant 1\}\bigr].$$

Поэтому осталось проверить, что выпуклая оболочка двух (абсолютно выпуклых) слабо предкомпактных по мере множеств (скажем, A и B) сама слабо предкомпактна по мере. Так как A и B абсолютно выпуклы, достаточно проверить, что если $x_n=a_n+b_n$, $a_n\in A$, $b_n\in B$, то существует сходящаяся по мере последователь-

ность $\{y_k\}$, такая, что $y_k \in \operatorname{conv}\{x_j : j \geq n_k\}$ и $n_k \nearrow \infty$.
Это легко сделать, последовательно пользуясь тем, что A и B слабо предкомпактны по мере, и таким соображением: если последовательность $\{d_k\}$ сходится по мере к функции d, то, проредив эту последовательность, мы сможем считать, что $\mu\{|d-d_k|>2^{-k}\} \leq 2^{-k}$; а тогда для любой последовательности индексов $k_1<k_2<\ldots$ и любых функций $d'_j, d'_j \in \operatorname{conv}\{d_i : i \geq k_j\}$, последовательность $\{d'_j\}$ сходится по мере. ●

ЛЕММА 9. Пусть $\mathfrak{X}$ – пространство аналитических функций в круге, удовлетворяющее аксиоме AI, и такое, что $C_A \subset \mathfrak{X}$, причем оператор вложения слабо компактен. Тогда для любого множества K, $K = \operatorname{clos} K \subset \mathbb{T}$, $mK>0$, пара $(\mathfrak{X}, K)$ удовлетворяет аксиоме B_p. В $\mathfrak{X}$, кроме того, выполнена аксиома A2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аксиома A2 для $\mathfrak{X}$ вытекает из таковой для C_A. Остальное следует из слабой компактности множества $i^*(\{\Phi \in \mathfrak{X}^* : \|\Phi\| \leq 1\})$, где i – оператор тождественного вложения пространства C_A в $\mathfrak{X}$, и снова из аксиомы A2 для C_A. ●

Лемма 8 показывает, в частности, что заключения теорем из § 2 справедливы для случая, когда „$\mathcal{F}$" в них равно $\mathcal{F}(\mathfrak{X},K,d) \cap \cap \mathfrak{X}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{X}_n$, где $\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_n$ – пространства, удовлетворяющие условиям леммы 9 (на всякий случай отметим еще раз, что применять эти теоремы нужно к пространству $\mathcal{F} = \Lambda\{X_0, \mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_n\}$, а затем использовать то соображение, что при расширении исходных пространств заключения теорем сохраняют силу). Остановимся на двух конкретных примерах применения леммы 9.

I. Пространство L^Φ_A – это замыкание множества $\mathcal{P}_A$ в пространстве Орлича L^Φ. Для него условия леммы 9, очевидно, выполнены, поскольку $(L^\Phi - \operatorname{clos}(L^\infty))^* = L^{(\Phi^*)}$, где Φ^* и Φ сопряжены по Юнгу, а шар пространства $L^{(\Phi^*)}$ слабо компактен в L^1. Если Φ растет, например, быстрее, чем все функции $t \to e^{at}$, $a>0$, то пространство L^Φ_A не содержится в $\mathcal{F}(\mathfrak{X},K,d)$.

2. Пусть ν – непрерывная функция на промежутке $[0,I]$, положительная на $[0,I)$, $\nu(1)=0$. Обозначим $C_{A,\nu}$ пространство таких аналитических в круге $\mathbb{D}$ функций, что $\lim_{\tau\to 1-0} \max\{\nu(\tau)|f(\tau\zeta)| : \zeta \in \mathbb{T}\} = 0$ (норма задается равенством $\|f\| = \sup\{|f(z)|\nu(|z|) : z \in \mathbb{D}\}$). Ясно, что оператор вложения $id : C_A \to C_{A,\nu}$ компактен. В приложениях нужно считать, что ν "очень медленно" стремиться к нулю в точке I.

Теперь настало время собрать вместе хотя бы часть сказанного.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть Φ и ν – из двух последних примеров, d – (большое) положительное число. Пусть $0<mK<1\,(K=\operatorname{clos}K)$, а Λ и E – такие, как в теореме I. Тогда найдется постоянная c (зависящая от Φ, ν, Λ и K, н о не о т d) со следующими свойствами. Для любых a, $a\in\ell^2(\mathbb{Z}),\|a\|_{\ell^2}=1$, и x, $x\in C(E),\|x\|_{C(E)}=1$, найдется такая функция f, что выполнены соотношения (I), (2) и (3) теоремы I и что

$$(i)\ \mathbb{P}_+f\in U_A,\quad \|\mathbb{P}_+f\|_{U_A}\leqslant c$$

$$(ii)\ \mathbb{P}_-f=g+\mathbb{P}_-(h\mathbb{1}_K),\ \text{где}\ g\in(U_A^\infty)_-,$$

$$\|g\|_{(U_A^\infty)_-}\leqslant c,\ h\in L^\infty,\ \|h\|_\infty\leqslant d^{-1}$$

$$(iii)\ \max\{\|\mathbb{P}_-f\|_{\mathbb{P}_-C},\|\mathbb{P}_-f\|_{(L_A^\Phi)_-},\|\mathbb{P}_-f\|_{(C_{A,\nu})_-}\}\leqslant c.\ \bullet$$

В заключенье заметим еще, что слабо предкомпактное по мере множество, очевидно, остается таковым, после умножения его на любую измеримую функцию. Это позволяет еще в одном направлении сужать пространство $\mathfrak{F}$ – именно, оставлять в нем лишь те функции, которые не выводятся из $\mathfrak{F}$ действием фиксированного оператора Тёплица с антианалитическим символом.

Литература

I. В и н о г р а д о в С.А. Усиление теоремы Колмогорова о сопряженной функции и интерполяционные свойства равномерно сходящихся степенных рядов. – Труды матем.ин-та АН СССР,I98I, I55, 7–40.

2. H r u š č e v S.V., V i n o g r a d o v S.A. Free interpolation in the space of uniformly convergent Taylor series. – Lecture Notes in Math., 1981, 864 (Complex analysis and spcetral theory. Seminar, Leningrad 1979/80); 171–213.

3. К и с л я к о в С.В. Количественный аспект теорем об исправлении. – Зап.научн.семин.ЛОМИ, I979, 92, I82–I9I.

4. П р и в а л о в И.И. Граничные свойства аналитических функций. М.–Л., ГИТТЛ, I950.

5. K a d e c M.I., P e ł c z y ń s k i A. Bases, lacunary sequences and complemented subspaces in the spaces L^p. – Studia Math., 1961/62, 21, 161–176.

S.V.Kisliakov. Once more about free interpolation by functions analytic outside of a preseribed set.

Summary

Let $\mathbb{T}=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$, $E=\operatorname{clos}E\subset\mathbb{T}$, $mE>0$. It is shown that (even if E is nowhere dense in $\mathbb{T}$) there exist functions f analytic in $\hat{\mathbb{C}}\setminus E$ and satisfying some strong supplementary conditions (e.g. the uniform convergence of Maclaourin series in $\overline{\mathbb{D}}$, $\overline{\mathbb{D}}=\{z:|z|\leqslant 1\}$ and with boundary values of $f|(\hat{\mathbb{C}}\setminus\mathbb{D})$ of the form $\mathbb{P}_- g$ with $g\in C(\mathbb{T})$, where $\mathbb{P}_-$ is the orthogonal projection from L^2 onto H^2_-). Moreover, some theorems about free interpolation by such functions are established.