В. А. Койбаев, Нормализатор группы автоморфизмов модуля, возникающего при расширении основного кольца, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 1994, том 211, 133–135

В. А. Койбаев

НОРМАЛИЗАТОР ГРУППЫ АВТОМОРФИЗМОВ МОДУЛЯ, ВОЗНИКАЮЩЕГО ПРИ РАСШИРЕНИИ ОСНОВНОГО КОЛЬЦА

Пусть Λ – произвольное ассоциативное кольцо с единицей 1 и R его унитальное подкольцо, содержащееся в центре кольца Λ. Пусть, далее, M – левый свободный Λ-модуль конечного ранга с базисом $e_1, \ldots, e_n$, так что $M = \Lambda e_1 \oplus \ldots \oplus \Lambda e_n$. Ясно, что M является также и левым R-модулем, следовательно, кольцо эндоморфизмов $\mathrm{End}({}_\Lambda M)$ левого Λ-модуля M является подкольцом кольца эндоморфизмов $\mathrm{End}({}_R M)$ левого R-модуля M. Группы обратимых элементов в этих кольцах эндоморфизмов обозначим соответственно через $\mathrm{Aut}({}_\Lambda M)$ и $\mathrm{Aut}({}_R M)$. Ясно, что $\mathrm{Aut}({}_\Lambda M) \leqslant \mathrm{Aut}({}_R M)$. Нашей целью является доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Пусть Λ – ассоциативное кольцо с единицей 1 и R его унитальное подкольцо, содержащееся в центре кольца Λ. Предположим, что Λ аддитивно порождается своими обратимыми элементами. Пусть, далее, M – левый свободный Λ-модуль конечного ранга. Тогда нормализатор подгруппы $\mathrm{Aut}({}_\Lambda M)$ в группе $\mathrm{Aut}({}_R M)$ совпадает с полупрямым произведением нормального делителя $\mathrm{Aut}({}_\Lambda M)$ и подгруппы G^0 изоморфной группе $\mathrm{Aut}(\Lambda/R)$ всех кольцевых автоморфизмов кольца Λ, тождественных на R:*

$$\mathcal{N}_{\mathrm{Aut}({}_R M)}(\mathrm{Aut}({}_\Lambda M)) = G^0 \leftthreetimes \mathrm{Aut}({}_\Lambda M).$$

Сформулированная теорема является обобщением результата работы [1], в которой рассмотрен случай $M = \Lambda$. В дальнейшем мы считаем, что выполнены условия теоремы.

Для всякого элемента $\lambda \in \Lambda$ рассмотрим отображение гомотетии $\tilde{\lambda} : M \to M$, $\tilde{\lambda}(x) = \lambda x$, $x \in M$. Ясно, что $\tilde{\lambda}$ является гомоморфизмом аддитивной группы M, однако $\tilde{\lambda}$, вообще говоря, не является Λ-линейным. Но так как подкольцо R содержится в центре кольца Λ, то $\tilde{\lambda} \in \mathrm{End}({}_R M)$. Очевидно, что отображение

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \longrightarrow & \mathrm{End}({}_R M) \\ \lambda & \dashrightarrow & \tilde{\lambda} \end{array}$$

является гомоморфизмом колец; образ этого отображения мы обозначаем через $\widetilde{\Lambda}$: $\widetilde{\Lambda} = \{\tilde{\lambda} : \lambda \in \Lambda\}$. Всякий эндоморфизм $f \in$

$\mathrm{End}({}_RM)$ является Λ-линейным, то есть принадлежит $\mathrm{End}({}_\Lambda M)$, если $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ для любых $\lambda \in \Lambda$, $x \in M$, последнее эквивалентно тому, что $f \cdot \tilde{\lambda} = \tilde{\lambda} \cdot f$ для всякого $\tilde{\lambda} \in \tilde{\Lambda}$, другими словами f принадлежит централизатору $C(\tilde{\Lambda})$ подкольца $\tilde{\Lambda}$ в кольце $\mathrm{End}({}_RM)$, более того $C(\tilde{\Lambda}) = \mathrm{End}({}_\Lambda M)$.

Лемма 1. *Аддитивная группа* $\langle \mathrm{Aut}({}_\Lambda M)\rangle_{ad}$ *порожденная группой* $\mathrm{Aut}({}_\Lambda M)$ *совпадает с* $\mathrm{End}({}_\Lambda M)$.

Для $n \geqslant 2$ сформулированная лемма является хорошо известным фактом, если же $n = 1$, то она вытекает непосредственно из условий теоремы.

Лемма 2. *Централизатор* $C(\mathrm{End}({}_\Lambda M))$ *подкольца* $\mathrm{End}({}_\Lambda M)$ *в кольце* $\mathrm{End}({}_RM)$ *совпадает с подкольцом* $\tilde{\Lambda}$. *Другими словами, эндоморфизм* $\psi \in \mathrm{End}({}_RM)$ *коммутирует со всеми элементами подкольца* $\mathrm{End}({}_\Lambda M)$ *тогда и только тогда, когда* $\psi \in \tilde{\Lambda}$.

Доказательство леммы 2 проводится естественными рассуждениями, и мы его опускаем.

Предложение. *Нормализатор подгруппы* $\mathrm{Aut}({}_\Lambda M)$ *в группе* $\mathrm{Aut}({}_RM)$ *совпадает с множеством* $\{\psi \in \mathrm{Aut}({}_RM) : \psi\tilde{\Lambda} = \tilde{\Lambda}\psi\}$.

Доказательство. Пусть $\psi \in \mathrm{Aut}({}_RM)$, причем $\psi\tilde{\Lambda} = \tilde{\Lambda}\psi$. Покажем, что ψ из нормализатора. Для $h \in \mathrm{Aut}({}_\Lambda M)$ покажем, что $\psi^{-1}h\psi \in \mathrm{Aut}({}_\Lambda M)$. Пусть $\lambda \in \Lambda$ – произвольный элемент, тогда $\psi\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_1\psi$ для $\lambda_1 \in \Lambda$. Имеем $(\psi^{-1}h\psi)\tilde{\lambda} = \psi^{-1}h\tilde{\lambda}_1\psi = \psi^{-1}\tilde{\lambda}_1 h\psi = \tilde{\lambda}(\psi^{-1}h\psi)$. Следовательно, $\psi^{-1}h\psi \in \mathrm{Aut}({}_\Lambda M)$. Обратно, пусть $\psi \in \mathcal{N}_{\mathrm{Aut}({}_RM)}(\mathrm{Aut}({}_\Lambda M))$. Покажем, что $\psi\tilde{\Lambda} = \tilde{\Lambda}\psi$. Имеем $\psi\mathrm{Aut}({}_\Lambda M)\psi^{-1} \subseteq \mathrm{Aut}({}_\Lambda M)$. Тогда в силу леммы 1 $\psi\mathrm{End}({}_\Lambda M)\psi^{-1} \subseteq \mathrm{End}({}_\Lambda M)$. Пусть φ – произвольный элемент из $\mathrm{End}({}_\Lambda M)$, тогда $\psi\varphi\psi^{-1} \in \mathrm{End}({}_\Lambda M)$, откуда $(\psi\varphi\psi^{-1})\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(\psi\varphi\psi^{-1})$ для любого $\lambda \in \Lambda$. Поэтому $\varphi(\psi^{-1}\tilde{\lambda}\psi) = (\psi^{-1}\tilde{\lambda}\psi)\varphi$ для любого $\varphi \in \mathrm{End}({}_\Lambda M)$. По лемме 2 тогда $\psi^{-1}\tilde{\lambda}\psi \in \tilde{\Lambda}$ для всякого $\lambda \in \Lambda$, откуда $\tilde{\Lambda}\psi \subseteq \psi\tilde{\Lambda}$, аналогично $\tilde{\Lambda}\psi^{-1} \subseteq \psi^{-1}\tilde{\Lambda}$, следовательно, $\tilde{\Lambda}\psi = \psi\tilde{\Lambda}$. Предложение доказано.

Через $\mathrm{Aut}(\Lambda/R)$ обозначим группу всех кольцевых автоморфизмов кольца Λ, тождественных на R. Для всякого автоморфизма $\sigma \in \mathrm{Aut}(\Lambda/R)$ определим отображение σ^0 модуля M положив для $x \in M$, $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$, $x_i \in \Lambda$, $\sigma^0(x) = \sum\limits_1^n \sigma(x_i)e_i$. Так как $\sigma|_R = 1$, то $\sigma^0 \in \mathrm{Aut}({}_RM)$. Далее, $\sigma^0(\lambda x) = \sigma(\lambda)\sigma^0(x)$, $\lambda \in \Lambda$. Положим $G^0 = \{\sigma^0 : \sigma \in \mathrm{Aut}(\Lambda/R)\}$. Так как $(\sigma_1\sigma_2)^0 = \sigma_1^0\sigma_2^0$, $(\sigma^0)^{-1} = (\sigma^{-1})^0$, то G^0 – подгруппа группы $\mathrm{Aut}({}_RM)$, изоморфная группе $\mathrm{Aut}(\Lambda/R)$. В силу равенства $\sigma^0(\lambda x) = \sigma(\lambda)\sigma^0(x)$, $x \in M$, мы имеем $\sigma^0\tilde{\lambda} = \widetilde{\sigma(\lambda)}\sigma^0$, следовательно, согласно предложению $G^0 \leqslant \mathcal{N}_{\mathrm{Aut}(_RM)}(\mathrm{Aut}(_\Lambda M))$. Далее, $G^0 \cap \mathrm{Aut}(_\Lambda M) = 1$.

Доказательство теоремы. В силу сказанного выше мы имеем $G^0 \leftthreetimes \mathrm{Aut}(_\Lambda M) \subseteq \mathcal{N}_{\mathrm{Aut}(_RM)}(\mathrm{Aut}(_\Lambda M))$. Покажем обратное включение. Пусть $\psi \in \mathcal{N}_{\mathrm{Aut}(_RM)}(\mathrm{Aut}(_\Lambda M))$. Согласно предложению мы имеем $\psi\tilde{\Lambda}\psi^{-1} = \tilde{\Lambda}$. Определим отображение $\sigma : \Lambda \to \Lambda$ положив $\widetilde{\sigma(\lambda)} = \psi\tilde{\lambda}\psi^{-1}$. Тогда $\sigma \in \mathrm{Aut}(\Lambda/R)$. Итак, $\psi\tilde{\lambda}\psi^{-1} = \widetilde{\sigma(\lambda)}$, откуда так как $\sigma^0\tilde{\lambda} = \widetilde{\sigma(\lambda)}\sigma^0$, то мы имеем $\psi\tilde{\lambda}\psi^{-1} = \sigma^0\tilde{\lambda}(\sigma^0)^{-1}$, а потому $(\sigma^0)^{-1}\psi\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(\sigma^0)^{-1}\psi$, следовательно, $(\sigma^0)^{-1}\psi \in \mathrm{Aut}(_\Lambda M)$ и $\psi \in G^0 \cdot \mathrm{Aut}(_\Lambda M)$.

Литература

1. А. Х. Аль Хамад, А. А. Бондаренко, З. И. Боревич, *Нормализатор группы "диагональных" автоморфизмов в алгебрах над коммутативным кольцом.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **191** (1991), 5–8.

Северо-Осетинский государственный университет
С.-Петербургский государственный университет

Поступило 14 февраля 1994 г.