K. A. Mirzoev, T. A. Safonova, Integral Representation of Sums of Series Associated with Special Functions, *Mat. Zametki*, 2020, Volume 108, Issue 4, 632–637

DOI: 10.4213/mzm12752

Интегральное представление сумм некоторых рядов, связанных со специальными функциями

К. А. Мирзоев, Т. А. Сафонова

Ключевые слова: функция Грина обыкновенных дифференциальных операторов, интегральное представление сумм рядов, дзета-функция Римана, бета-функция Дирихле, постоянные Каталана и Апери.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm12752

1. Следуя [1; гл. 23], символами $\beta(n)$ и $\eta(n)$ обозначим суммы

$$\beta(n)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^n}\,,\quad \eta(n)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^n}\,,\qquad n=1,2,\dots .$$

Функцию $\beta(n)$ называют *бета-функцией Дирихле* (см., например, [2; гл. 1, п. 1.7]), и хорошо известно, что

$$\beta(2n+1)=\frac{(-1)^n(\pi/2)^{2n+1}}{2(2n)!}\,E_{2n},\qquad n=0,1,\dots .$$

Кроме того, $\eta(1)=\ln 2$, $\eta(n)=(1-2^{1-n})\zeta(n)$, $n=2,3,\dots$, где $\zeta(n)$ – дзета-функция Римана, и

$$\eta(2n)=\frac{(-1)^{n-1}(1-2^{1-2n})(2\pi)^{2n}}{2(2n)!}\,B_{2n},\qquad n=1,2,\dots .$$

Здесь через E_n и B_n, как обычно, обозначены числа Эйлера и Бернулли (см. [1; гл. 23, формулы 23.2.22, 23.2.16], а также [2]–[5]). Напомним также, что числа $\beta(2)(=G)$ и $\zeta(3)$ принято называть *постоянными Каталана* и *Апери* соответственно (см., например, [2; гл. 1, п.п. 1.7 и 1.6]).

В п. 2 настоящей работы, используя методы, предложенные ранее авторами в работах [6] и [7], получены интегральные представления сумм рядов

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2\pm a^2}\,,\qquad \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k(k^2\pm a^2)}\,,$$

где $-1<a<1$ (см. теоремы 1 и 2), первые две из которых, очевидно, является производящими функциями для чисел $\beta(2n)$, а следующие две – для $\eta(2n-1)$, и, следовательно, для чисел $\zeta(2n+1)$, $n=1,2,\dots$. Пункт 3 посвящен явному вычислению интегралов, полученных в теореме 1 п. 2, в случае, когда параметр a является рациональным числом (см. лемму 1 и теорему 3), а в п. 4 эти же интегралы вычисляются в терминах гипергеометрических рядов при любом “допустимом” $a\in\mathbb{C}$.

В работе особое внимание уделяется вопросам применения полученных результатов к различным представлениям постоянных Каталана, Апери и $\ln 2$.

Результаты, представленные в пп. 1 и 4, а также теорема 1 и следствие 1 п. 2 получены при поддержке РНФ (грант № 20-11-20261), а результаты, представленные в теореме 2 и следствие 2 п. 2 и в п. 3, получены при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 18-01-00250).

Тематика настоящей работы давно находится в центре внимания многих математиков и литература, посвященная ей, весьма обширна. В частности, в работах [8] и [9] приведены формулы преобразования для сумм вида

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2-a^2}, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k^2-a^2)}, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{k^4-a^4},$$

и на их основе получены представления чисел $\zeta(4n+3)$ и $\zeta(2n+2)$ в виде довольно быстро сходящихся рядов. Представлению чисел $\zeta(2n+1)$ в виде рядов

$$\zeta(2n+1) = \pi^{2n} \sum_{k=0}^{+\infty} R_{n,k}\zeta(2k),$$

где коэффициенты $R_{n,k}$ – рациональные функции от k и n, посвящена работа [10] и существенная часть недавней превосходной работы [11].

2. Пусть $-1 < a < 1$ и S – самосопряженный оператор, порожденный в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}^2[0,\pi]$ – пространстве всех классов попарно п.в. равных между собой комплекснозначных измеримых функций y таких, что $|y|^2$ интегрируема по Лебегу на $[0,\pi]$, – выражением

$$l_2[y] = -y'' - a^2 y$$

и граничными условиями Дирихле $y(0) = y(\pi) = 0$. Хорошо известно, что числа $k^2 - a^2$ являются собственными значениями, а функции $\sqrt{2/\pi}\,\sin kx$, $k = 1, 2, \dots$, – соответствующими им ортонормированными собственными функциями оператора S.

Пусть далее $G_a(x,t)$ – функция Грина задачи

$$\begin{cases} l_2[y] = f, \\ y(0) = y(\pi) = 0. \end{cases}$$

Хорошо известно (см., например, [12; гл. 3, таблица 3.3.1]) и легко устанавливается, что для функции $G_a(x,t)$ справедлива формула

$$G_a(x,t) = \begin{cases} \dfrac{\sin(at)\sin a(\pi - x)}{a\sin(a\pi)}, & t < x, \\[2ex] \dfrac{\sin(ax)\sin a(\pi - t)}{a\sin(a\pi)}, & t \geqslant x. \end{cases}$$

При этом здесь и всюду в дальнейшем, как обычно, значение $G_0(x,t)$ трактуется как $\lim_{a\to 0} G_a(x,t)$ при фиксированных x и t.

С другой стороны, точка $\lambda = 0$ является регулярной точкой оператора S, а функция $G_a(x,t)$ – ядром резольвенты этого оператора. Таким образом, применяя спектральную теорему, получаем, что для нее справедливо тождество

$$G_a(x,t) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin kx \sin kt}{k^2 - a^2}.$$

В частности, при $t = x$ имеем

$$\frac{\sin(ax)\sin a(\pi - x)}{a\sin(a\pi)} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1 - \cos 2kx}{k^2 - a^2}, \tag{1}$$

а при $t = \pi/2$ –

$$\frac{\sin(ax)}{2a\cos(a\pi/2)} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}\sin(2k-1)x}{(2k-1)^2 - a^2}. \tag{2}$$

Используя далее равенства (1) и (2), элементарное тождество

$$\frac{\sin(2k-1)x}{\sin x} = 1 + 2\sum_{j=1}^{k-1} \cos(2jx)$$

и разложение в ряд Фурье функции

$$\ln 2\cos x = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos 2nx}{n}, \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

(см., например, [4; п. 5.4.2, формула 10]), можно доказать, что справедливо следующее утверждение и следствие из него.

Теорема 1. *При* $-1 < a < 1$ *справедливы равенства*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2 - a^2} = \frac{1}{2a\cos(a\pi/2)} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(ax)}{\sin x}\, dx, \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(k^2 - a^2)} = -\frac{\ln 2}{a^2} + \frac{1}{a^3 \sin(a\pi)} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin(ax)}{\sin x}\right)^2 dx. \tag{4}$$

Следствие 1. *При* $-1 < a < 1$ *справедливо равенство*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} k}{k^2 - a^2} = \frac{1}{a\sin(a\pi)} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin(ax)}{\sin x}\right)^2 dx. \tag{5}$$

Отметим, что формулы (3), (4) и (5) при $a = 0$ совпадают с известными классическими формулами для значений постоянных Каталана, Апери и $\ln 2$, а именно

$$G = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\sin x}\, dx, \qquad \zeta(3) = \frac{2}{9\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{x^2(\pi^2 - 2x^2)}{\sin^2 x}\, dx, \qquad \ln 2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{x^2}{\sin^2 x}\, dx$$

(для G и $\ln 2$ см., например, [4; п. 2.5.4, формулы 5 и 7], а для $\zeta(3)$ – формулу 23.2.17 при $n = 1$ из [1; гл. 23] можно преобразовать к указанному выше виду).

Левые части равенств (3), (4) и (5), как мы уже отмечали выше, представляют собой производящие функции для чисел $\beta(2n)$, $\eta(2n+1)$ и $\eta(2n-1)$ при $n = 1, 2, \dots$, так как, например,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2 - a^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta(2n) a^{2(n-1)},$$

а, следовательно, таковыми являются и их правые части. Не вдаваясь в дальнейшие подробности, отметим, что формулы (3), (4) и (5), очевидно, справедливы и при любом комплексном a таком, что $|a| < 1$. Заменив вещественное число a на чисто мнимое ia с учетом этого замечания в теореме 1 и следствии 1, приходим к справедливости следующей теоремы и следствия из нее.

Теорема 2. *При* $-1 < a < 1$ *справедливы равенства*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2 + a^2} = \frac{1}{2a\,\mathrm{ch}(a\pi/2)} \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{sh}(ax)}{\sin x}\, dx, \tag{6}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(k^2 + a^2)} = \frac{\ln 2}{a^2} - \frac{1}{a^3\,\mathrm{sh}(a\pi)} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\mathrm{sh}(ax)}{\sin x}\right)^2 dx.$$

Следствие 2. *При* $-1 < a < 1$ *справедливо равенство*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}k}{k^2+a^2} = \frac{1}{a\,\mathrm{sh}(a\pi)} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\mathrm{sh}(ax)}{\sin x}\right)^2 dx. \tag{7}$$

Отметим также, что справедливость теоремы 2 и следствия 2 можно установить и способом, предложенным в § 5 работы [7].

Заметим, что из формул (3) и (6) можно получить производящие функции отдельно для чисел $\beta(4n+2)$ и отдельно для чисел $\beta(4n+4)$ при $n = 0, 1, \dots$, а именно, таковыми являются функции

$$\frac{1}{4a} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin(ax)}{\cos(a\pi/2)} + \frac{\mathrm{sh}(ax)}{\mathrm{ch}(a\pi/2)}\right) \frac{dx}{\sin x}, \qquad \frac{1}{4a^3} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin(ax)}{\cos(a\pi/2)} - \frac{\mathrm{sh}(ax)}{\mathrm{ch}(a\pi/2)}\right) \frac{dx}{\sin x}$$

соответственно. Действительно, складывая их и разделив на 2, получим первую из них, а вычитая из формулы (3) формулу (6) и разделив на $2a^2$, – вторую.

Поступив аналогичным образом с формулами (5) и (7), можно построить производящие функции для чисел $\eta(4n+1)$ и $\eta(4n+3)$, а, следовательно, и для чисел $\zeta(4n+3)$ и $\zeta(4n+5)$ при $n = 0, 1, \dots$.

3. Пусть теперь a является правильной положительной рациональной дробью, т.е. $a = p/q$, где $p, q \in \mathbb{N}$ и $0 < p < q$. В этом случае интегралы, стоящие в правых частях равенств (3), (4) и (5), являются интегралами вида

$$\int_0^{\pi/(2q)} R(\sin x, \cos x)\, dx,$$

где $R(x, y)$ – дробно-рациональная функция, и явно вычисляются. А именно, можно доказать, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть* $a = p/q$, *где* $p, q \in \mathbb{N}$ *и* $0 < p < q$. *Тогда справедливы равенства*

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(ax)}{\sin x}\, dx = 2\cos\frac{p\pi}{2q} \sum_{k=1}^{q} (-1)^k \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{p\pi}{q} \ln\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2q},$$

$$\int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin(ax)}{\sin x}\right)^2 dx = \sin\frac{p\pi}{q} \left(\frac{1}{2} + \frac{2p}{q} \sum_{k=1}^{q} \cos(2k-1)\frac{p\pi}{q} \ln\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2q}\right). \tag{8}$$

Подставляя далее эти равенства в тождества из теоремы 1, приходим к справедливости следующей теоремы.

Теорема 3. *Пусть* $a = p/q$, *где* $p, q \in \mathbb{N}$ *и* $0 < p < q$. *Тогда справедливы равенства*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2-a^2} = \frac{q}{p} \sum_{k=1}^{[q/2]} (-1)^k \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{p\pi}{q} \ln\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{q},$$

если p *и* q *– нечетные числа,*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2-a^2} = \frac{q}{p} \sum_{k=1}^{[q/2]} (-1)^k \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{p\pi}{q} \ln\mathrm{tg}\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2q},$$

если p, q *числа разной четности, и*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k^2-a^2)} = \left(\frac{q}{p}\right)^2 \left(\ln 2 - \frac{q}{2p} - 2\sum_{k=1}^{[q/2]} \cos(2k-1)\frac{p\pi}{q} \ln\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{q}\right),$$

где $[x]$ *означает целую часть числа* x.

Учтя формулу (8) в утверждении следствия 1, заключаем, что справедливо также следующее равенство:

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}k}{k^2-(p/q)^2}=\frac{q}{2p}+2\sum_{k=1}^{[q/2]}\cos(2k-1)\frac{p\pi}{q}\ln\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{q}\,.$$

В частности, если в этих формулах положить $a=a_n=1/(2n)$ и перейти к пределу при $n\to+\infty$, то для значений постоянных Каталана, Апери и $\ln 2$ получим справедливость следующих предельных соотношений соответственно:

$$G=2\lim_{n\to+\infty}n\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\ln\operatorname{tg}\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{4n}\,,$$

$$\zeta(3)=-\frac{16}{3}\lim_{n\to+\infty}n^2\left(\ln 2-n-2\sum_{k=1}^{n}\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}\ln\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right),$$

$$\ln 2=\lim_{n\to+\infty}\left(n+2\sum_{k=1}^{n}\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}\ln\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right).$$

4. Известны следующие разложения из теории гипергеометрических рядов:

$$\frac{\sin(ax)}{a\sin x}={}_2F_1\left(\frac{1+a}{2}\,,\frac{1-a}{2}\,;\frac{3}{2}\,;\sin^2 x\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{C_{2k}^k}{2^{2k}(2k+1)}\prod_{j=1}^{k}\left(1-\left(\frac{a}{2j-1}\right)^2\right)\sin^{2k}x,$$

$$\left(\frac{\sin(ax)}{a\sin x}\right)^2={}_3F_2\left(1+a,1-a,1;\frac{3}{2}\,,2;\sin^2 x\right)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2}{k^2C_{2k}^k}\prod_{j=1}^{k-1}\left(1-\left(\frac{a}{j}\right)^2\right)(2\sin x)^{2k-2}$$

(см., например, [5; гл. 2, упражнение 12 и 13]), где a – произвольное комплексное число, $x\in[0,\pi/2]$, а произведение по пустому множеству считается равным 1. Используя эти разложения и известную формулу

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2k}x\,dx=\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{\pi}{2}$$

(см., например, [4; п. 2.5.3, формула 1]), интегралы, участвующие в формулировках теорем 1 и 2, можно вычислить в терминах гипергеометрических рядов. При этом, например, из равенства (3) заключаем, что

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2-a^2}=\frac{\pi}{4\cos(a\pi/2)}\left(1+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\right)^2\frac{1}{2k+1}\prod_{j=1}^{k}\left(1-\left(\frac{a}{2j-1}\right)^2\right)\right).$$

Полагая здесь $a=0$, получим следующее представление для постоянной Каталана:

$$G=\frac{\pi}{4}\left(1+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\right)^2\frac{1}{2k+1}\right).$$

Такими же рассуждениями из формулы (4) заключаем, что

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k(k^2-a^2)}=\frac{1}{a^2}\left(\ln 2-\frac{a\pi}{\sin(a\pi)}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k+2)(2k+1)}\prod_{j=1}^{k}\left(1-\left(\frac{a}{j}\right)^2\right)\right)\right)$$

и далее, переходя к пределу при $a\to 0$ в этом равенстве и учтя, что $\eta(3)=(3/4)\zeta(3)$, получим известную формулу (см., например, [3; гл. 25, формула 25.16.15])

$$\zeta(3)=\frac{4}{3}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{k+m}\,.$$

Используя теоремы 1 и 2, можно установить справедливость аналогичных формул и для сумм

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}k}{k^2\pm a^2}, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2+a^2}, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k(k^2+a^2)},$$

и для производящих функций для чисел $\beta(4n+2)$, $\beta(4n+4)$, $\zeta(4n+3)$ и $\zeta(4n+5)$ (см. конец п. 2 настоящей работы).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover Publ., New York, 1992. **[2]** S. R. Finch, *Mathematical Constants*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003. **[3]** *NIST Handbook of Mathematcal Functuios*, eds. W. J. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert, Ch. W. Clark, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010. **[4]** А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды*. В 3 т. Т. 1. *Элементарные функции*, Физматлит, М., 2003. **[5]** Р. Аски, Р. Рой, Дж. Эндрюс, *Специальные функции*, МЦНМО, М., 2013. **[6]** К. А. Мирзоев, Т. А. Сафонова, *Матем. заметки*, **106**:3 (2019), 470–475. **[7]** К. А. Мирзоев, Т. А. Сафонова, Тр. ММО, **80**, № 2, МЦНМО, М., 2019, 157–177. **[8]** G. Almkvist, A. Granville, *Experiment. Math.*, **8**:2 (1999), 197–203. **[9]** D. H. Bailey, J. M. Borwein, D. M. Bradley, *Experiment. Math.*, **15**:3 (2006), 281–289. **[10]** D. Cvijovic, J. Klinowski, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **125**:5 (1997), 1263–1271. **[11]** H. M. Srivastava, *J. Adv. Engrg. Comput.*, **3**:1 (2019), 329–354. **[12]** D. G. Duffy, *Green's Functions with Applications*, CRC Press, Boca Raton, FL, 2001.

К. А. Мирзоев
Московский государственный
университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: mirzoev.karahan@mail.ru

Поступило
12.04.2020
Принято к публикации
14.05.2020

Т. А. Сафонова
Северный (Арктический) федеральный университет
имени М. В. Ломоносова, г. Архангельск
E-mail: t.safonova@narfu.ru