Л. А. Люстерник, Формула Стирлинга,
Матем. просв., 1935, выпуск 3, 48–51

Полагаем теперь $v = \sin x$, тогда $dv = \cos x\, dx$, следовательно, $u = x \cos x$ и $du = \cos x - x \sin x$.

$$\int x \operatorname{ctg}^2 x\, dx = -\frac{x \cos x}{\sin x} + \int \frac{\cos x - x \sin x}{\sin x} dx = -\frac{x \cos x}{\sin x} + \ln \sin x - \frac{x^2}{2} + C.$$

Пример 5.

$$\int \frac{x^7\, dx}{(1 + x^4)^2}.$$

Полагаем $v = 1 + x^4$, тогда $du = 4x^3\, dx$, следовательно, $x^7 = u \cdot 4x^3$, откуда $u = \frac{x^4}{4}$ и $du = x^3\, dx$.

$$\int \frac{x^7\, dx}{(1 + x^4)^2} = -\frac{x^4}{4(1 + x^4)^8} + \int \frac{x^2\, dx}{1 + x^4} = -\frac{x^4}{4(1 + x^4)} +$$

$$+ \frac{1}{4} \ln (1 + x^4) + C.$$

Многие другие интегралы аналогичного типа могут быть взяты указанным приемом.

ФОРМУЛА СТИРЛИНГА

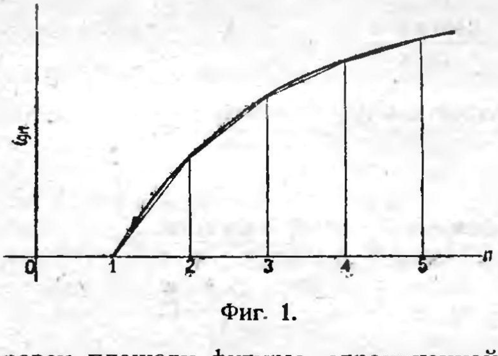
Л. А. Люстерник (Москва)

Требуется вывести асимптотическую формулу:

$$n! \approx \sqrt{2\pi}\, n^{n + \frac{1}{2}} e^{-n},$$

или

$$\lim \frac{n!}{\sqrt{2\pi}\, n^{n + \frac{1}{2}} e^{-n}} = 1.$$



Фиг. 1.

Заметим, что

$$\ln n! = \sum_{1}^{n} \ln n. \qquad (1)$$

Рассмотрим кривую (фиг. 1)

$$y = \ln x \qquad (2)$$

Интеграл

$$I = \int_1^n \ln x\, dx$$

равен площади фигуры, ограниченной осью OX, кривой (2) и ординатой $x = n$. Заменив кривую вписанным многоугольником, вершины которого имеют целочисленные абсциссы, $i = 1, 2, \ldots, n$, мы уменьшим рассматриваемую площадь; после этой замены площадь фигуры может быть определена как сумма площадей трапеции и будет равна

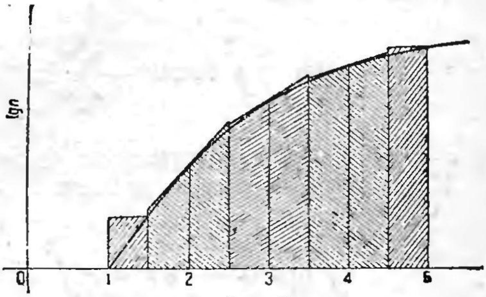
$$I_1 = \sum_{2}^{n} \ln n - \frac{1}{2} \ln n.$$

Следовательно,

$$\int_{1}^{n} \ln x\, dx > \sum_{2}^{n} \ln n - \frac{1}{2} \ln n,$$

или

$$I = \sum_{2}^{n} \ln n - \frac{1}{2} \ln n + \varepsilon_n, \quad (3)$$



Фиг. 2.

где ε_n есть сумма узких сегментов, лежащих между звеньями многоугольника и кривой.

Рассмотрим теперь систему трапеций, каждая из которых образована осью OX, двумя ординатами $i - \frac{1}{2}$, $i + \frac{1}{2}$ и касательной, проведенной в точке с абсциссой i (здесь $i = 2, 3, \ldots, n - 1$) (фиг. 2). Площадь такой трапеции равна $\ln i$. Сумма площадей этих трапеций равна

$$\sum_{2}^{n-1} \ln i.$$

Добавим к этим трапециям прямоугольник A с основанием $^1/_2$ (лежащим на оси OX между точками с абсциссами 1 и $1^1/_2$) и высотой $\ln {}^3/_2$ и прямоугольник B с основанием $^1/_2$ (лежащим на оси OX между точками с абсциссами $n - \frac{1}{2}$ и n) и высотой $\ln n$. Сумма площаей рассматриваемых трапеций и прямоугольников будет равна

$$I_2 = \sum_{2}^{n-1} \ln i + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \ln n =$$

$$= \sum_{2}^{n} \ln i - \frac{1}{2} \ln n + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}. \quad (4)$$

Теперь имеем:

$$I_2 > I > I_1.$$

Сравнивая (3) и (4), получаем:

$$\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2} > \varepsilon_n.$$

Если n неограниченно возрастают, числа ε_n образуют возрастающую последовательность, ограниченную сверху; следовательно, числа ε_n стремятся к некоторому пределу ε:

$$\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n = \varepsilon < \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

Таким образом

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\int_1^n \ln x\,dx - \sum_2^n \ln n + \frac{1}{2}\ln n\right\} = \varepsilon, \qquad (5)$$

где ε — некоторое положительное число, меньшее единицы.

Интегрируя по частям, найдем:

$$\int^n \ln x\,dx = \Big|^n x\ln x - \int^n dx = n\ln x - n + 1,$$

или в силу (5):

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\left(n\ln n + \frac{1}{2}\ln n - n\right) - \sum_2^n \ln n\right\} = \varepsilon - 1.$$

Потенцируя, получим:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}{n!}\right) = e^{\varepsilon-1} = C.$$

Остается найти постоянную C.

При весьма большом n левую часть предыдущего равенства можно считать приблизительно равной C:

$$\frac{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}{n!} \approx C. \qquad (6)$$

Точно так же

$$\frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n}}{(2n)!} \approx C. \qquad (7)$$

Формула Валлиса дает нам [1]):

$$\sqrt{\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}}.$$

Отсюда

$$(2n)!\approx\frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{\pi n}}.$$

Внеся это в (7), получаем:

$$\frac{n^{2n+1}e^{-2n}\sqrt{2\pi}}{(n!)^2}\approx C. \tag{8}$$

Далее, из (6) имеем:

$$n!\approx\frac{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}{C}.$$

Внося это выражение в (8), имеем:

$$C^2\sqrt{2\pi}\approx C,$$

или

$$\frac{1}{C}\approx\sqrt{2\pi}.$$

Подставив это значение в (6), получаем:

$$n!\approx\sqrt{2\pi}\,n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}.$$

---

[1]) Формула Валлиса

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}$$

можно преобразовать так: умножая числитель и знаменатель дроби, стоящей под знаком предела, на $(2\cdot4\cdot6\ldots2n)^2$, получим:

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2\cdot4\cdot6\cdots2n)^4}{(1\cdot2\cdot3\cdots2n)^2\cdot(n2+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{4n}\cdot(n!)^4}{[(2n)!]^2\cdot(2n+1)},$$

или

$$\pi=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{4n}(n!)^4}{[(2n)!]^2}\cdot\frac{2}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{4n}(n!)^4}{[(2n)!]^2}\cdot\frac{1}{n};$$

отсюда

$$\sqrt{\pi}=\lim\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}}.$$

(*Прим. ред.*)