Доклады Академии наук СССР
1963. Том 150, № 5

МАТЕМАТИКА

В. Н. МАСЛЕННИКОВА

ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФУЗИИ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 12 I 1963)

В предыдущей работе автора [1] был рассмотрен класс систем уравнений математической теории диффузии с линейной главной частью в параболическом операторе. Результаты этой работы можно распространить на более общие квазилинейные параболические операторы с нелинейной главной частью.

Рассмотрим систему вида

$$\Lambda u = h(x, t, u, w), \qquad \frac{\partial w}{\partial t} = g(x, t, u, w), \tag{1}$$

где

$$\Lambda u \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x_k}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + f\left(x, t, u\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) - \frac{\partial u}{\partial t} \tag{2}$$

квазилинейный параболический оператор.

Система (1) содержит две неизвестные функции $u(x, t)$, $w(x, t)$ и задана в цилиндрической области $\bar{D}_T$ с границей ∂D_T, которая состоит из боковой поверхности S цилиндра и его основания B при $t = 0$; здесь B — ограниченная n-мерная область в пространстве переменных $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Ищется решение системы (1) при граничных условиях:

$$u(x, t) = u_0(x, t) \quad \text{на } \partial D_T; \tag{3}$$

$$w(x, t) = w_0(x) \quad \text{на } \bar{B} \text{ при } t = 0. \tag{4}$$

Задачи такого типа встречаются в теории ядерных реакторов, при изучении тепловых процессов в затвердевающих растворах и в других вопросах математической физики.

Задача (1), (3), (4) в случае линейного оператора Λ изучалась в работе [2]; в случае одного пространственного переменного для квазилинейного по u оператора Λ изучалась методом конечных разностей в работе [3] и в работе K. Rektorys *.

Будем предполагать выполненными следующие условия:

A. $h(x, t, u, w)$ — невозрастающая функция w, а $g(x, t, u, w)$ — неубывающая функция u; функции h, g по u и w, функции a_{ij} и f по u удовлетворяют равномерному условию Липшица

$$|h(x, t, u_1, w_1) - h(x, t, u_2, w_2)| \leqslant M(|u_1 - u_2| + |w_1 - w_2|) \tag{5}$$

для $(x, t) \in \bar{D}_T$ и для всех значений u, w из некоторой ограниченной области.

По существу точно так же, как в работе [4], доказываются теоремы сравнения, основная из которых следующая:

Теорема 1. *Пусть $\{u_1, w_1\}$, $\{u_2, w_2\}$ — две пары непрерывных функций, определенных в $\bar{D}_T$. Пусть их вторые производные по x_i и первые по t существуют, равномерно ограничены в $\bar{D}_T$ и удовлетворяют в $\bar{D}_T$ дифференциальным неравенствам*

$$\Lambda u_1 - h(x, t, u_1, w_1) \geqslant \Lambda u_2 - h(x, t, u_2, w_2), \qquad \frac{\partial w_1}{\partial t} - g(x, t, u_1, w_1) \leqslant \frac{\partial w_2}{\partial t} - g(x, t, u_2, w_2). \tag{6}$$

* Доложена на конференции по дифференциальным уравнениям и их приложениям в Праге в сентябре 1962 г.

Кроме того, пусть

$$u_1 \leqslant u_2 \quad \text{на } \partial D_T, \qquad w_1 \leqslant w_2 \quad \text{на } \overline{B} \text{ при } t = 0.$$

Тогда

$$u_1 \leqslant u_2, \qquad w_1 \leqslant w_2 \quad \text{в } \overline{D}_T.$$

Из теоремы 1 следует единственность решения задачи (1), (3), (4), имеющего непрерывные в замкнутой области производные, входящие в систему (1).

При доказательстве теоремы существования рассматриваемой задачи будет использоваться теорема существования классического решения для квазилинейного параболического уравнения вида

$$\sum a_{ij}\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x_k}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + A\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x_k}\right) - \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \tag{7}$$

Например, для определенности можно рассмотреть оператор Λ в виде

$$\Lambda_1 u \equiv \frac{da_i(x, t, u, \partial u / \partial x_k)}{dx_i} + a\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x_k}\right) - \frac{\partial u}{\partial t} \tag{8}$$

и воспользоваться результатами О. А. Ладыженской и Н. Н. Уральцевой ([5]) по первой краевой задаче для квазилинейных параболических уравнений.

Пусть будут выполнены следующие условия:

B. Пусть $\Psi(x, t)$ есть продолжение внутрь области граничной функции $u_0(x, t)$ и пусть $\Psi(x, t)$ имеет вторые производные по x_i и первые по t, удовлетворяющие условию Гёльдера с показателем β $(0 < \beta < 1)$ по x и условию Липшица по t. В этом случае при тех условиях на коэффициенты, которые будут сформулированы ниже, краевое условие $u_0(x, t)$, не ограничивая общности, можно свести к нулевому. Пусть выполнены также условия согласования нулевого и первого порядков граничной функции $u_0(x, t)$ для $x \in S$ при $t = 0$.

C. Пусть боковая граница $S \in C_2^{\beta}$, т. е. имеет вторые производные по x_i, удовлетворяющие условию Гёльдера с показателем β.

D. Пусть коэффициенты оператора Λ_1 в (8) удовлетворяют следующим условиям (ср. ([5б])):

1) При $(x, t) \in \overline{D}_T$ и произвольных $u(x, t)$ выполнены неравенства

$$u\left[\frac{\partial a_i(x, t, u, 0)}{\partial x_i} + a(x, t, u, 0)\right] \geqslant -b_1 u^2 - b_2, \qquad b_i \geqslant 0; \tag{9}$$

$$\frac{\partial a_i(x, t, u, p_k)}{\partial p_j}\, \xi_i \xi_j \Big|_{p=0} \geqslant 0, \tag{10}$$

где

$$p_k = \partial u / \partial x_k, \qquad p = \left(\sum_{k=1}^{n} p_k^2\right)^{1/2}.$$

2) В каждой конечной части области $\{(x, t) \in \overline{D}_T, \ |u| < \infty\}$ и при произвольных p_k функции $a_i(x, t, u, p_k)$ и $a(x, t, u, p_k)$ непрерывны, a_i дифференцируемы по x_k, u, p_k и подчиняются неравенствам

$$\frac{\partial a_i(x, t, u, p_k)}{\partial p_j}\, \xi_i \xi_j \geqslant \nu(|u|) \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2;$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(|a_i| + \left|\frac{\partial a_i}{\partial u}\right| + \sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial a_i}{\partial x_j}\right|\right)(p+1) +$$

$$+ \sum_{i,\, j=1}^{n}\left|\frac{\partial a_i}{\partial p_j}\right|(p+1)^2 + |a| \leqslant \mu(|u|)(p+1)^2. \tag{11}$$

3) В каждой конечной части области $\{(x, t) \in \bar{D}_T, |u| < \infty, |p| < \infty\}$ функции a_i, a, $\partial a_i/\partial p_j$, $\partial a_i/\partial u$, $\partial a_i/\partial x_j$ непрерывны, удовлетворяют по x_k, t, u, p_k условию Гёльдера с показателями β, $\beta/2$, β, β соответственно; кроме того, a_i, a, h по t, a, $\partial a_i/\partial p_j$, $\partial a_i/\partial u$, $\partial a_i/\partial x_j$ по u удовлетворяют условию Липшица, функция $a(x, t, u, p_k)$ дифференцируема по u, p_k, причем константы в условиях Липшица и величины $|\partial a/\partial u|$, $|\partial a/\partial p_k|$ ограничены какой-нибудь постоянной M.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* A, B, C, D; *функция* $w_0(x)$ *удовлетворяет условию Гёльдера с показателем* $\beta > 0$; *функции* $h(x, t, u, w)$, $g(x, t, u, w)$ *удовлетворяют условию Гёльдера с показателем* β *по* x_i; *функция* g *удовлетворяет условию Гёльдера с показателем* $\beta/2$ *по* t *для* $(x, t) \in \bar{D}_T$ *и любых ограниченных значений* u, w.

Пусть, кроме того, существуют две пары функций $\{u', w'\}$, $\{u'', w''\}$, *непрерывных по* (x, t) *и удовлетворяющих условию Гёльдера с показателями* β, $\beta/2$ *соответственно и обладающих непрерывными и ограниченными вторыми производными по* x_i *и первыми по* t, *которые удовлетворяют системе неравенств*:

$$
\begin{gathered}
\Lambda_1(u') - h(x, t, u', w') \geqslant 0 \geqslant \Lambda_1(u'') - h(x, t, u'', w''),\\
\frac{\partial w'}{\partial t} - g(x, t, u', w') \leqslant 0 \leqslant \frac{\partial w''}{\partial t} - g(x, t, u'', w''),\\
u'(x, t) \leqslant u_0(x, t) \leqslant u''(x, t) \quad \text{на } \partial D_T,\\
w'(x, 0) \leqslant w_0(x) \leqslant w''(x, 0) \quad \text{при } t = 0.
\end{gathered} \tag{12}
$$

Тогда существует решение системы (1), (3), (4) *с оператором* Λ_1, *принадлежащее классам*: $u \in C_{2,1}^{\gamma, \gamma/2}(\bar{D}_T)$; w, $\partial w/\partial t \in C^{\gamma, \gamma/2}(\bar{D}_T)$ *с некоторым* γ $(0 < \gamma \leqslant \beta)$.

Эта теорема доказывается методом последовательных приближений. За нулевое приближение берутся функции u'', w'', а последовательные приближения находятся из системы

$$\Lambda_1 u_n - M u_n = h(x, t, u_{n-1}, w_{n-1}) - M u_{n-1}; \tag{13}$$

$$\frac{\partial w_n}{\partial t} + M w_n = g(x, t, u_{n-1}, w_{n-1}) + M w_{n-1}; \tag{14}$$

$$u_n(x, t) = u_0(x, t) \qquad \text{на } \partial D_T; \tag{15}$$

$$w_n(x, t) = w_0(x, 0) \qquad \text{при } t = 0, \tag{16}$$

где M — постоянная, взятая из условия A.

Каждое уравнение (13), (14) при соответствующих краевых условиях (15) и (16) однозначно разрешимо; (13), (15) —на основании теоремы 2 работы ([5б]).

Далее доказывается сходимость в каждой точке области $\bar{D}_T$ последовательностей $\{u_n\}$, $\{w_n\}$, при этом имеют место неравенства:

$$
\begin{gathered}
u' \leqslant u_n \leqslant u_{n-1} \leqslant u'',\\
w' \leqslant w_n \leqslant w_{n-1} \leqslant w''.
\end{gathered} \tag{17}
$$

Таким образом, предел последовательностей $\{u_n\}$, $\{w_n\}$ существует и определяет функции $u(x, t)$, $w(x, t)$ в $\bar{D}_T$. На основании (17) и теоремы 1 работы ([5б]) имеет место оценка в метрике $C^{1+\alpha}$:

$$|u_n|_\alpha + \left|\frac{\partial u_n}{\partial x_k}\right|_\alpha < c \tag{18}$$

при некотором $\alpha > 0$, где постоянная c не зависит от n. Поэтому из последовательности $\{u_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{u_{n_k}\}$, сходящуюся в метрике $C^{1+\alpha_1}$, где $0 < \alpha_1 < \alpha < 1$. Переходя к пределу по этой подпоследовательности, мы получаем, что $u_{n_k} \to u(x, t)$, $\partial u_{n_k}/\partial x_i \to \partial u/\partial x_i$ равномерно и имеем непрерывность по Гёльдеру функций $u(x, t)$, $\partial u/\partial x_i$ с показателем α_1, где $0 < \alpha_1 < \alpha < 1$.

Так же как в работе ([4]) доказывается, что w, $\partial w/\partial t$ удовлетворяют условию Гёльдера с показателем β в $\bar{D}_T$.

Затем доказывается, что $\{u, w\}$ есть решение поставленной задачи и

$$u \in C_{2,1}^{\gamma,\gamma/2}(\bar{D}_T); \quad w, \ \frac{\partial w}{\partial t} \in C^{\gamma,\gamma/2}(\bar{D}_T)$$

для некоторого γ $(0 < \gamma \leqslant \beta)$.

Операторы Λ можно брать и в недивергентном виде, а также с произвольным ростом по p, но удовлетворяющим таким условиям, чтобы для него решалась соответствующая краевая задача в классическом смысле и имели место априорные оценки типа (18). В частности, можно взять оператор Λ, удовлетворяющий условиям теоремы 5 работы ([5б]) или условиям теоремы 10 работы ([5в]).

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
9 I 1963

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Н. Масленникова, ДАН, **146**, № 2 (1962). [2] A. McNabb, J. Math. Analysis and Applications, **3**, № 1 (1961). [3] J. Kautsky, Aplikce Matematiky, s. 2. № 5, Praha (1957). [4] В. Н. Масленникова, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., **3**, № 3 (1963). [5] О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, Изв. АН СССР, сер. матем., а) **26**, № 1 (1962); б) **26**, № 5 (1962); в) **27**, № 1 (1963).