Г. Н. Багаев, В. А. Воблый, Метод сжатия–разжатия для перечисления графов, *Дискрет. матем.*, 1998, том 10, выпуск 4, 82–87

DOI: 10.4213/dm441

Дискретная математика

том 10 выпуск 4 * 1998

УДК 519.1

Метод сжатия–разжатия для перечисления графов

© 1998 г. $\boxed{\text{Г. Н. Багаев}}$, В. А. Воблый

В статье рассматривается несколько задач перечисления помеченных графов, которые могут быть решены с помощью единого подхода, предложенного первым из авторов. Для перечисления графов заданного вида в каждом графе выделяется порожденный подграф с определенными структурными свойствами, который сжимается в особую вершину. Образовавшиеся графы, содержащие фиксированную (особую) вершину с заданной степенью, а также сжатые подграфы независимо перечисляются известными методами перечисления. Перечисление исходных графов завершается суммированием по всем возможным степеням особой вершины произведений числа сжатых подграфов, числа графов, образовавшихся после сжатия, и числа способов восстановления (разжатия) исходного графа.

1. В статье рассматривается несколько задач перечисления помеченных графов, которые могут быть решены с помощью единого подхода, предложенного первым из авторов в ряде статей [1–4]. Идея метода проста и неявно встречается уже у Муна [5, 6]. Его суть состоит в следующем.

Для перечисления помеченных графов заданного вида в каждом графе выделяется порожденный подграф с определенными структурными свойствами, который сжимается в особую вершину. Образовавшиеся графы, содержащие фиксированную (особую) вершину с заданной степенью, а также сжатые подграфы независимо перечисляются известными методами перечисления. Перечисление исходных графов завершается суммированием по всем возможным степеням особой вершины произведений числа сжатых подграфов, числа графов, образовавшихся после сжатия, и числа способов восстановления (разжатия) исходного графа.

Рассмотрим на примерах перечисление графов методом сжатия–разжатия.

2. Напомним, что гладкий граф — это связный граф без висячих вершин. Назовем вершину графа внутренней, если она принадлежит гладкому графу, который получается из связного графа после многократного последовательного удаления висячих вершин вместе с инцидентными им ребрами до тех пор, пока такие вершины существуют. Очевидно, что любой связный граф, не являющийся деревом, состоит из гладкого графа и деревьев, корни которых являются вершинами гладкого графа. Пусть V_p — число помеченных гладких графов с p вершинами, а $C_p(n)$ — число помеченных связных графов с n вершинами, из которых p внутренние.

Тогда верна формула

$$C_p(n) = \binom{n}{p} V_p n^{n-p-1}. \tag{1}$$

Для доказательства этой формулы методом сжатия-разжатия сожмем в одну особую вершину максимальный гладкий подграф произвольного связного графа с n вершинами. Если этот гладкий подграф содержит p вершин, то мы получим дерево с $n-p$ помеченными вершинами и одной особой вершиной некоторой степени i. Используя формулу Кларка для числа $T_i(n)$ деревьев с n помеченными вершинами с заданной степенью i фиксированной вершины

$$T_i(n) = \binom{n-2}{i-1}(n-1)^{n-i-1},$$

найдем, что число деревьев, образовавшихся после сжатия гладкого подграфа, равно $T_i(n-p-1)$.

Восстанавливая исходный граф, заметим, что p вершин, порождающих гладкий граф, можно выбрать $\binom{n}{p}$ способами, и учтем, что существует V_p гладких графов с p вершинами. Разожмем особую вершину степени i. При этом каждую вершину дерева, ранее смежную с особой вершиной, нужно соединить с некоторой вершиной гладкого подграфа с p помеченными вершинами. Эта процедура равносильна размещению i различных номеров вершин дерева, смежных с особой вершиной, по p различным ячейкам, соответствующим вершинам сжатого подграфа. Так как это можно сделать p^i способами, суммируя по i от 1 до $n-p$, с помощью формулы Ньютона окончательно получаем, что

$$\begin{aligned} C_p(n) &= \sum_{i=1}^{n-p} V_p \binom{n-p-1}{i-1}(n-p)^{n-p-1}\binom{n}{p}p^i \\ &= \binom{n}{p} V_p p \sum_{j=0}^{n-p-1} p^j (n-p)^{n-p-j-1} \\ &= \binom{n}{p} V_p p n^{n-p-1}. \end{aligned}$$

Формула (1) доказана в [7] другим способом, методом сжатия–разжатия она получена в [8].

3. Пусть $C_p(n,k)$ — число помеченных связных графов с n вершинами, из которых k висячих, а p внутренних. В [9] для $0 < k \leqslant n-p$, $p \geqslant 3$, показано, что

$$C_p(n,k) = \frac{n!\,V_p}{k!\,(p-1)!} S_p(n-p-1, n-p-k), \tag{2}$$

где $S_p(n,k)$ — нецентральные числа Стирлинга второго рода [13].

Докажем эту формулу методом сжатия–разжатия. Для этого получим сначала аналог формулы Кларка для числа $T_i(n,k)$ помеченных деревьев с n вершинами, у которых k висячих вершин, а фиксированная вершина имеет степень i. Покажем, что

$$T_i(n,k) = \binom{n-2}{i-1}\binom{n-1}{k}(n-k-1)!\,S(n-i-1), n-k-1), \tag{3}$$

где $S(n,k)$ — числа Стирлинга второго рода.

Известно, что с помощью алгоритма Прюфера каждое помеченное дерево с n вершинами взаимно однозначно кодируется набором из $n-2$ чисел, отвечающим размещению номеров мест кода по ячейкам, соответствующим номерам вершин. При этом номер вершины со степенью i встречается в коде Прюфера $i-1$ раз (см. [11], стр. 163).

Выберем сначала места в коде для номера фиксированной вершины, это можно сделать $\binom{n-2}{i-1}$ способами. Затем выберем номера висячих вершин, это можно сделать $\binom{n-1}{k}$ способами. Так как номера висячих вершин отсутствуют в коде, необходимо разместить $n-2-(i-1)$ различных номеров мест кода по $n-k-1$ различным ячейкам так, чтобы не было пустых ячеек. Это размещение можно осуществить $(n-k-1)!\,S(n-i-1,n-k-1)$ способами. Перемножая все числа способов выбора, получаем формулу (3).

Для доказательства методом сжатия-разжатия формулы (2) сожмем в одну особую вершину максимальный гладкий подграф произвольного связного графа с n вершинами. Если этот подграф состоит из p вершин, то мы получим дерево с $n-p+1$ помеченными вершинами, специальная фиксированная вершина которого имеет некоторую степень i. Применим аналог формулы Кларка (3) и учтем, что существует V_p гладких графов с p помеченными вершинами. Восстанавливая исходный граф, заметим, что p вершин, порождающих гладкий граф, можно выбрать $\binom{n}{p}$ способами, а вершины, ранее смежные с особой вершиной, можно соединить с вершинами гладкого графа p^i способами. Наконец, суммируя произведения чисел сжатых подграфов, графов, образовавшихся после сжатия, а также числа способов разжатия до исходного графа по i от 1 до $n-p$, с помощью следующего тождества для нецентральных чисел Стирлинга второго рода (см. [13]) :

$$S_p(n,k)=\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}p^{n-l}S(l,k),$$

получаем, что

$$\begin{aligned}
C_p(n,k)&=\sum_{i=1}^{n-p}\binom{n}{p}T_i(n-p+1,k)V_p p^i\\
&=\frac{n!}{p!}V_p\binom{n-p}{k}(n-p-k)!\sum_{i=1}^{n-p}\binom{n-p-1}{i-1}S(n-p-i,n-p-k)\\
&=\frac{n!\,V_p}{p!\,k!}p\sum_{l=0}^{n-p-1}\binom{n-p-1}{l}p^{n-p-l-1}S(l,n-p-k)\\
&=\frac{n!\,V_p}{(p-1)!\,k!}S_p(n-p-1,n-p-k).
\end{aligned}$$

4. Обозначим $HU_p(n)$ число связных унициклических гомеоморфно несводимых графов с n помеченными вершинами, из которых ровно p внутренних, а через $HW_p(z)$ обозначим соответствующую производящую функцию, а именно,

$$HW_p(z)=\sum_{n=2p}^{\infty}HU_p(n)\frac{z^n}{n!}.$$

Пусть $G(w)$ — производящая функция чисел помеченных корневых деревьев:

$$G(w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1} w^n}{n!}.$$

Как известно, она удовлетворяет уравнению

$$G(w)e^{G(w)} = w. \tag{4}$$

Докажем с помощью метода сжатия–расжатия, что

$$HW_p(z) = \frac{1}{2p}((1+z)G(z/(1+z)) - z)^p. \tag{5}$$

Рассмотрим произвольный связный гомеоморфно несводимый граф с n помеченными вершинами, из которых ровно p внутренних. После сжатия подграфа, порожденного внутренними вершинами, в одну особую вершину получим гомеоморфно несводимое дерево с $n-p+1$ помеченной вершиной со степенью i фиксированной (особой) вершины. В [10] получен аналог формулы Кларка для числа $HT_i(n)$ таких деревьев, а также доказано, что

$$\sum_{n=i}^{\infty} HT_i(n+1)\frac{z^n}{n!} = \frac{1}{i!}G^i(z/(1+z)). \tag{6}$$

Восстанавливая из дерева исходный граф, прежде всего выберем номера для внутренних вершин $\binom{n}{p}$ способами. Очевидно, что простой цикл из p помеченных вершин можно образовать $(p-1)!/2$ способами. После разжатия особой вершины каждую вершину дерева, ранее смежную с особой вершиной, нужно соединить с некоторой вершиной простого цикла. Такая процедура эквивалентна размещению i различных номеров вершин дерева, смежных с ососбой вершиной, по p различным ячейкам, соответствующим вершинам простого цикла, причем ни одна из этих ячеек не должна быть пустой. Это можно сделать $p!\,S(i,p)$ способами. Поэтому перемножая числа способов выбора и суммируя по всем возможным значениям i, находим, что

$$HU_p(n) = \frac{1}{2}\sum_{i=p}^{n-p} \binom{n}{p} (p-1)!\,p!\,S(i,p)\,HT_i(n-p+1).$$

Подставляя это выражение в производящую функцию, меняя порядок суммирования и используя формулу (6), а также производящую функцию чисел Стирлинга второго рода и уравнение (5), получим, что

$$\begin{aligned} HW_p(z) &= \frac{1}{2}\sum_{n=2p}^{\infty}\sum_{i=p}^{n-p}\frac{z^n}{(n-p)!}(p-1)!\,S(i,p)\,HT_i(n-p+1) \\ &= \frac{1}{2}z^p(p-1)!\sum_{m=p}^{\infty}\sum_{i=p}^{m}\frac{z^m}{m!}S(i,p)\,HT_i(m+1) \\ &= \frac{1}{2}z^p(p-1)!\sum_{i=p}^{\infty}S(i,p)\sum_{m=i}^{\infty}\frac{z^m}{m!}\,HT_i(m+1) \\ &= \frac{1}{2}z^p(p-1)!\sum_{i=p}^{\infty}\frac{1}{i!}S(i,p)G^i(z/(1+z)) \\ &= \frac{1}{2p}z^p(p-1)!\,(e^{G(z/(1+z))}-1)^p = \frac{1}{2p}((1+z)G(z/(1+z))-z)^p. \end{aligned}$$

Равенство (5) является следствием общего результата о перечислении помеченных связных гомеоморфно несводимых графов, полученного в [10] также методом сжатия-разжатия.

В заключение покажем, что означает метод сжатия–разжатия на языке производящих функций. Введем производящие функции

$$V(z) = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}V_p z^p, \qquad C(u,v) = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=p}^{\infty}\frac{1}{n!}C_p(n)u^p z^n.$$

С учетом известного тождества (см. [9], стр. 110–111)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+p)^{n-1}}{n!}v^n = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{v}G(v)\right)^p$$

из равенства (1) получаем, что

$$\begin{aligned} C(u,v) &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=p}^{\infty}\frac{V_p n^{n-p-1}}{(n-p)!\,(p-1)!}u^p v^n = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{V_p u^p v^p}{(p-1)!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(m+p)^{m-1}}{m!}v^m \\ &= \sum_{p=0}^{\infty}\frac{V_p u^p v^p}{(p-1)!}\frac{1}{p}\left(\frac{1}{v}G(v)\right)^p = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{V_p}{p!}u^p G^p(v) = V(uG(v)). \end{aligned}$$

Таким образом, суть метода сжатия–разжатия состоит в том, что при определенных условиях производящая функция перечисляемых графов является композицией производящей функции сжимаемых подграфов и производящей функции графов, получающихся после сжатия. Поэтому для обоснования этого метода может быть использована лемма о $*$-композиции помеченных конфигураций [12]. Следует также отметить, что в книге [11] при построении производящих функций для графов преобразований с ограничениями на контуры и деревья использовался подход, сходный с методом сжатия–разжатия.

Можно надеяться, что будущее покажет плодотворность метода сжатия–разжатия при перечислении не только древовидных графов. Разработка этого метода была прервана трагической гибелью в 1997 году его основного создателя Г. Н. Багаева. Светлая память о Геннадии Николаевиче Багаеве навсегда останется в сердцах его коллег и товарищей.

Список литературы

1. Багаев Г. Н. Случайные графы со степенью связности 2. *Дискретный анализ* (1973) **22**, 3–14.
2. Багаев Г. Н. Предельные распределения метрических характеристик случайного неразложимого отображения. *Комбинаторный и асимптотический анализ.* КГУ, Красноярск, 1977, 55–61.
3. Багаев Г. Н., Дмитриев Е. Ф. Перечисление связных двуцветных графов. *Комбинаторный анализ* (1983) **6**, 58–64.
4. Багаев Г. Н. Распределение числа вершин в слоях случайного многоцветного дерева. *Вероятностные процессы и их приложения.* МИЭМ, Москва, 1984, 12–16.
5. Moon J. W. Counting labeled trees. In: *Graph Theory and Theoretical Physics.* Academic Press, New York, 1967.
6. Moon J. W. A problem on random trees. *J. Comb. Theory* (1971) **10**, №3, 201–205.
7. Дмитриев Е. Ф. Перечисление отмеченных связных и гладких гомеоморфных графов. Деп. ВИНИТИ 8.07.85 4957-85, 10 стр.
8. Воблый В. А. Асимптотическое перечисление графов некоторых типов. Автореферат канд. диссерт. ВЦ АН СССР, Москва, 1985.
9. Воблый В. А. Асимптотическое перечисление помеченных связных разреженных графов с заданным числов висячих вершин. *Дискретный анализ* (1985) **42**, 3–14.
10. Воблый В. А. О перечислении помеченных связных гомеоморфно несводимых графов. *Матем. заметки* (1991) **49**, №3, 12–22.
11. Сачков В. Н. *Введение в комбинаторные методы дискретной математики.* Наука, Москва, 1982.
12. Гульден Я., Джексон Д. *Перечислительная комбинаторика.* Наука, Москва, 1990.
13. Koutras M. Non-central Stirling numbers and some applications. *Discrete Math.* (1982) **42**, 73–89.

Статья поступила 20.06.1998.