П. А. Бирюков, О пространствах с базами и $\pi$-базами конечного ранга,
*Матем. заметки*, 1985, том 38, выпуск 5, 709–712

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ**

т. 38, № 5 (1985)

# О ПРОСТРАНСТВАХ С БАЗАМИ И $\pi$-БАЗАМИ КОНЕЧНОГО РАНГА

П. А. Бирюков

Через $w(X)$, $\pi w(X)$, $c(X)$, $d(X)$ обозначаются соответственно вес, $\pi$-вес, число Суслина и плотность пространства $X$ [1].

Семейство множеств называется антицепью, если любые два его элемента несравнимы, т. е. ни один из них не содержится в другом. Семейство $\mathcal{F}$ *имеет конечный ранг* [2], если существует такое натуральное число $n$, что для любой антицепи $\{A_1, \ldots, A_{n+1}\} \subset \mathcal{F}$ выполняется условие $A_1 \cap \ldots \cap A_{n+1} = \varnothing$. Наименьшее из таких $n$ называется *рангом* $\mathcal{F}$. Если $\mathcal{F}$ — семейство подмножеств $X$ и $U \subset X$, положим $\mathcal{F}_U = \{A \in \mathcal{F} : A \subset U\}$ и $\mathcal{F}(U) = \{A \in \mathcal{F} : A \supset U\}$.

Семейство $\mathcal{P}$ непустых открытых множеств пространства $X$ называется *$\pi$-базой*, если для каждого непустого открытого множества $U \subset X$ существует такое $V \in \mathcal{P}$, что $V \subset U$.

ЛЕММА. *Пусть $\mathcal{P} = \mathcal{P}' \cup \mathcal{P}''$ — $\pi$-база пространства $X$. Тогда существуют такие дизъюнктные открытые множества $U$ и $V$, что семейство $\mathcal{P}'_U \cup \mathcal{P}''_V$ является $\pi$-базой для $X$.*

Доказательство. Обозначим через $U$ объединение всех открытых множеств $W \subset X$, для которых $\mathcal{P}'$ является $\pi$-базой. Тогда для $U$ и $V = X \setminus [U]$ выполняется утверждение леммы.

ТЕОРЕМА 1. *Если пространство имеет $\pi$-базу конечного ранга, то оно имеет и $\pi$-базу ранга* 1.

Доказательство. Пусть $\mathscr{P}$ — $\pi$-база ранга $n$. Проведем индукцию по $n$. Если $n > 1$, выберем максимальное подсемейство $\mathscr{P}' \subset \mathscr{P}$ ранга $n-1$ и положим

$$\mathscr{P}'' = \mathscr{P} \setminus \bigcup \{\mathscr{P}(U):\ U \in \mathscr{P}'\}.$$

Тогда семейство $\mathscr{P}' \bigcup \mathscr{P}''$ является $\pi$-базой. Покажем, что ранг $\mathscr{P}''$ равен 1 (после чего для завершения доказательства остается применить лемму и индуктивное предположение). Допустим противное. Тогда найдется пара несравнимых множеств $G, H \in \mathscr{P}''$, для которых $G \bigcap H \neq \varnothing$. Возьмем такое $P \in \mathscr{P}$, что $P \subset G \bigcap H$. По построению $P \notin \mathscr{P}'$, следовательно, ранг семейства $\mathscr{P}' \bigcup \{P\}$ равен $n$. Это означает, что существуют $P_1, \ldots, P_{n-1} \in \mathscr{P}'$, для которых $\{P_1, \ldots, P_{n-1}, P\}$ — антицепь и $P_1 \bigcap \ldots \bigcap P_{n-1} \bigcap P \neq \varnothing$. Тем более $P_1 \bigcap \ldots \bigcap P_{n-1} \bigcap G \bigcap H \neq \varnothing$. Так как ранг $\mathscr{P}$ равен $n$, то одно из множеств $P_1, \ldots, P_{n-1}$ сравнимо либо с $G$, либо с $H$. Пусть, например, $P_i$ сравнимо с $G$. Поскольку $P_i \in \mathscr{P}'$ и $G \in \mathscr{P}''$, возможно лишь включение $G \subset P_i$, но тогда $P \subset P_i$, что противоречит выбору $P_i$.

Частично упорядоченное множество $(T, \leqslant)$ называется *деревом*, если для любого $x \in T$ множество $\{y \in T:\ y < x\}$ вполне упорядочено отношением $\leqslant$. Подмножество $A \subset T$ называется *цепью* (*антицепью*), если его элементы попарно сравнимы (несравнимы). Несчетное дерево, в котором все цепи и антицепи счетны, называется *деревом Суслина*. Гипотеза Суслина ($SH$) эквивалентна утверждению о том, что деревьев Суслина не существует [3, с. 180. Эта гипотеза неразрешима в теории множеств $ZFC$.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $X$ — хаусдорфово пространство с $\pi$-базой ранга 1 и $c(X) = \tau$. Тогда $X$ имеет $\pi$-базу кратности $\tau$ и $\pi w(X) \leqslant \tau^+$. Если $c(X) = \omega$, то в предположении $SH$ пространство $X$ имеет счетный $\pi$-вес.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{P}$ — $\pi$-база ранга 1 в пространстве $X$ и $V_0$ — произвольный элемент из $\mathscr{P}$. Предположим, что уже определены множества $V_\alpha \in \mathscr{P}$ для всех $\alpha < \beta$, где $\beta$ — некоторый ординал. Если семейство $\{V_\alpha:\ \alpha < \beta\}$ не является $\pi$-базой, выберем произвольное множество $U \in \mathscr{P} \setminus \bigcup \{\mathscr{P}(V_\alpha):\ \alpha < \beta\}$. Рассмотрим два случая:

1) $|U| > 1$. Поскольку $X$ — хаусдорфово пространство, найдется такое $V \in \mathscr{P}$, что $V \subset U$ и $U \setminus [V] \neq \varnothing$. Положим $V_\beta = V$.

2) $|U| = 1$. В этом случае полагаем $V_\beta = V$.

Пусть $\gamma$ — наименьший ординал, для которого семейство $\mathscr{P}_0 = \{V_\alpha\colon \alpha < \gamma\}$ является $\pi$-базой. По построению из соотношения $V_\alpha \supset V_\beta$ вытекает, что $\alpha < \beta$ и $V_\alpha \setminus [V_\beta] \neq \varnothing$. Следовательно, любая цепь $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}_0$ вполне упорядочена по убыванию и $|\mathscr{C}| \leqslant c(X) = \tau$. Так как ранг $\mathscr{P}_0$ равен 1, то для любой точки $x \in X$ семейство $\mathscr{P}_0(x) = \{V \in \mathscr{P}_0\colon x \in V\}$ представляет собой цепь, поэтому $|\mathscr{P}_0(x)| \leqslant \tau$, т. е. кратность $\mathscr{P}_0$ не превосходит $\tau$. Проведенное рассуждение также показывает, что частично упорядоченное множество $(\mathscr{P}_0, \supset)$ является деревом. Любая антицепь $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}_0$ дизъюнктна, поэтому $|\mathscr{A}| \leqslant \tau$. Таким образом, мощности всех цепей и антицепей дерева $\mathscr{P}_0$ не превосходят $\tau$, следовательно, $|\mathscr{P}_0| \leqslant \tau^+$. Наконец, если $c(X) = \omega$, то все цепи и антицепи в $\mathscr{P}_0$ счетны и тогда в предположении $SH$ семейство $\mathscr{P}_0$ счетно, поскольку в противном случае оно было бы деревом Суслина. Теорема доказана.

Если $X$ — $T_1$-пространство с базой конечного ранга, то $w(X) = d(X)$ [4]. В сочетании с теоремами 1 и 2 это дает следующий результат.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $X$ — хаусдорфово пространство с базой конечного ранга. Тогда $w(X) \leqslant c(X)^+$. Если $c(X) = \omega$, то в предположении $SH$ пространство $X$ имеет счетную базу.*

З а м е ч а н и е. Из отрицания гипотезы Суслина следует существование регулярного несепарабельного пространства $X$ с базой ранга 1, для которого $c(X) = \omega$ [5]. Поэтому второе утверждение теоремы 3 в действительности эквивалентно $SH$.

Теорема 3 отвечает на один из вопросов, поставленных А. В. Архангельским [5]. Из нее вытекает также анонсированный в [6] результат О. Ферстера: $SH$ влечет метризуемость всех регулярных пространств с базами конечного ранга, удовлетворяющих условию Суслина.

Кемеровский государственный университет

Поступило 17.07.84

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] А р х а н г е л ь с к и й А. В. Строение и классификация топологических пространств и кардинальные инварианты.— Успехи мат. наук, 1978, т. 33, вып. 16, с. 29—84.

[2] N a g a t a J. On dimension and metrization.— In: Proc. of the Symp. on Gen. Teopology. Prague, 1962, p. 282—285.
[3] Справочная книга по математической логике. Ч. II. Теория множеств.— М.: Наука, 1982.
[4] G r u e n h a g e G., N y i k o s P. Spaces with bases of countable rank.— Gen. Topology Appl., 1978, v. 8, № 3, p. 233—257.
[5] А р х а н г е л ь с к и й А. В. О пространствах с базой, большой ранг которой конечен.— Вестн. МГУ, Сер. 1, Математика, механика, 1977, № 2, с. 3—8.
[6] I s m a i l M., N y i k o s P. Countable small rank and cardinal invariants. II.— Topology Appl., 1982, v. 14, № 3, p. 283—304.