

О СПЕЦИАЛЬНЫХ ε -СЕТЯХ

М. С. Бродский

При рассмотрении вопросов, связанных с отображением компакта на себя, часто оказывается полезным использование специальных ε -сетей, т. е. ε -сетей, обладающих некоторыми дополнительными свойствами. В настоящей заметке мы приведём несколько примеров, иллюстрирующих этот приём.

1. Отображение s компакта Q на себя назовём Δ -нерасширяющим, если из $x, y \in Q$, $\rho(x, y) < \Delta$ следует

$$\rho(sx, sy) \leq \rho(x, y),$$

и Δ -изометрическим, если из $x, y \in Q$, $\rho(x, y) < \Delta$ следует

$$\rho(sx, sy) = \rho(x, y).$$

Теорема. Всякое Δ -нерасширяющее отображение s компакта Q на себя является Δ -изометрическим, причём из $x, y \in Q$, $\rho(x, y) \geq \Delta$ следует

$$\rho(sx, sy) \geq \Delta.$$

Доказательство. Пусть задано положительное число ε . В отличие от обычно принятого определения, назовём упорядоченную совокупность (x_1, x_2, \dots, x_p) точек компакта Q ε -сетью, если замкнутые сферические окрестности этих точек радиуса ε покрывают Q . Очевидно, можно указать такое натуральное число n , что существует ε -сеть, состоящая из n точек, но не существует ε -сети, состоящей из $n-1$ точки. Каждую ε -сеть, состоящую из n точек, будем называть минимальной. Совокупность M всех минимальных ε -сетей становится метрическим пространством, если расстояние $\sigma(\alpha, \beta)$ между двумя сетями

$$\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{и} \quad \beta = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

положить равным

$$\max_{i=1, 2, \dots, n} \rho(x_i, y_i).$$

Легко проверить, что M есть компакт.

Пусть Δ_1 —некоторое положительное число, удовлетворяющее условию $\Delta_1 < \Delta$. Будем считать в дальнейшем, что выбранное нами ε меньше Δ_1 . Выделим из пространства M подпространство M_1 следующим образом. Рассмотрим некоторую сеть $\alpha \in M$ и назовём пару (x_i, x_j) точек этой сети отмеченной, если $\rho(x_i, x_j) \leq \Delta_1$. В M_1 мы включаем те минимальные

сети, у которых число отмеченных пар достигает наибольшего значения. Как и M , пространство M_1 есть компакт.

Отнесём каждой сети $\alpha \in M_1$ число $f(\alpha) = \sum \rho(x_i, x_j)$, где суммирование производится по всем отмеченным парам сети α . Так как функция $f(\alpha)$ непрерывна на компакте M_1 , то на некоторых сетях из M_1 она принимает наименьшее значение. Совокупность таких сетей обозначим через M_2 . Сети, принадлежащие множеству M_2 , условимся называть *специальными*.

Нетрудно убедиться в том, что если точки (x_1, x_2, \dots, x_n) образуют специальную ε -сеть ($\varepsilon < \Delta_1$), то точки $(sx_1, sx_2, \dots, sx_n)$ также образуют специальную ε -сеть, и что если одна из пар (x_i, x_j) , (sx_i, sx_j) является отмеченной, то отмеченной является и вторая. Так как s есть отображение Δ -нерасширяющее, следовательно, и Δ_1 -нерасширяющее, то из предыдущего следует, что каждая специальная ε -сеть (x_1, x_2, \dots, x_n) ($\varepsilon < \Delta_1$) обладает следующими свойствами: если точки x_i, x_j сети таковы, что

$$\rho(x_i, x_j) \leq \Delta_1, \text{ то } \rho(x_i, x_j) = \rho(sx_i, sx_j),$$

если же $\rho(x_i, x_j) > \Delta_1$, то и $\rho(sx_i, sx_j) > \Delta_1$. Используя непрерывность отображения s и произвольность ε , получим: если

$$x, y \in Q, \rho(x, y) < \Delta_1, \text{ то } \rho(sx, sy) = \rho(x, y),$$

если же

$$x, y \in Q, \rho(x, y) > \Delta_1, \text{ то } \rho(sx, sy) \geq \Delta_1.$$

Так как последнее верно при всяком $\Delta_1 < \Delta$, то мы приходим к утверждению теоремы.

Замечание. Простой пример показывает, что Δ -изометрические отображения не всегда являются изометрическими. Рассмотрим в евклидовой плоскости фигуру, имеющую форму буквы Н (вертикальные отрезки параллельны, горизонтальный им перпендикулярен и делит их пополам). Отображение s указанной фигуры на себя, оставляющее горизонтальный и один из вертикальных отрезков точно неподвижными и поворачивающее второй из вертикальных отрезков на 180° вокруг его середины, является, очевидно, Δ -изометрическим, где Δ — длина горизонтального отрезка, не будучи, однако, изометрическим.

Следствие I. Всякое Δ -нерасширяющее отображение компакта на себя взаимно однозначно.

Следствие II. Пусть Q — компакт, s — произвольное отображение компакта Q на себя, $\Delta > 0$ — некоторое число. Если существуют такие точки $x, y \in Q$, что

$$\rho(x, y) < \Delta \text{ и } \rho(sx, sy) < \rho(x, y),$$

то существуют в Q и такие точки x_1, y_1 , что $\rho(x_1, y_1) < \Delta$, но

$$\rho(sx_1, sy_1) > \rho(x_1, y_1).$$

III. Пусть снова Q — компакт, H — совокупность непрерывных функций, заданных на Q , H^* — совокупность линейных функционалов, заданных на H . Каждое непрерывное отображение s компакта Q на себя порождает

отображение в себя совокупностей H и H^* . Именно, если $x \in Q$, $f \in H$, $\alpha \in H^*$, то полагаем $sf = f(sx)$, $s\alpha = \alpha(sf)$. Мы говорим, что функционал α инвариантен относительно отображения s , если $\alpha(f) = \alpha(sf)$ при всех $f \in H$. Пусть теперь G — полугруппа непрерывных отображений компакта Q на себя.

Теорема. Если все преобразования полугруппы G равностепенно непрерывны, то существует в H^* линейный функционал $\sigma(f)$, неотрицательный на неотрицательных функциях, равный единице, если $f \equiv 1$, и инвариантный относительно каждого преобразования полугруппы G .

Доказательство. Не нарушая общности, мы можем считать, что в полугруппу G входит тождественное преобразование. Введём в компакте Q новую метрику, полагая для любых двух точек $x, y \in Q$,

$$\rho^*(x, y) = \sup_{s \in G} \rho(sx, sy).$$

Так как преобразования полугруппы G равностепенно непрерывны, то метрики ρ и ρ^* топологически эквивалентны, следовательно, множество Q в новой метрике также является компактом. Если $t \in G$, то

$$\rho^*(tx, ty) = \sup_{s \in G} \rho(stx, sty) \leq \sup_{s \in G} \rho(sx, sy) = \rho^*(x, y). \quad (*)$$

Таким образом, каждое преобразование $s \in G$ является в метрике ρ^* нерасширяющим отображением компакта Q на себя, следовательно, по п. I, — изометрическим. В дальнейшем мы пользуемся только метрикой ρ^* .

Зададим стремящуюся к нулю последовательность чисел ε_i . Для каждого ε_i построим минимальную ε_i -сеть T_i компакта Q . Выделим в Q для каждого натурального n подмножества $U_{n1}, U_{n2}, \dots, U_{nk_n}$ так, чтобы они попарно не пересекались, чтобы диаметр каждого из них был меньше, чем $\frac{1}{n}$, и чтобы они покрывали компакт Q . Если $f(x)$ — некоторая функция, заданная на Q , то через $[C(f)]_i$ условимся обозначать среднее арифметическое значений этой функции на точках сети T_i . Через $f_{jk}(x)$ обозначим функцию, равную 1 на U_{jk} и 0 на остальных точках компакта Q .

Так как множество всех функций $f_{jk}(x)$ счётно, то из последовательности сетей T_i можно выделить такую подпоследовательность T_{i_n} , чтобы существовал $\lim_{n \rightarrow \infty} [C(f_{jk})]_{i_n}$ при любых фиксированных j и k . Но тогда очевидно, что существует и $\lim_{n \rightarrow \infty} [C(f)]_{i_n}$, где f — произвольная непрерывная функция. Обозначим $\sigma(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} [C(f)]_{i_n}$. Из определения функционала $\sigma(f)$ непосредственно следует, что

$$\sigma(\alpha f) = \alpha \sigma(f), \quad \sigma(f+g) = \sigma(f) + \sigma(g), \quad \sigma(f) \geq 0,$$

если $f \geq 0$ и $\sigma(f) = 1$, если $f \equiv 1$. Нам остаётся показать, что $\sigma(sf) = \sigma(f)$ при всяком $s \in G$.

Так как T_i есть минимальная ε_i -сеть, то совокупность точек sT_i есть также минимальная ε_i -сеть. Обозначим через U_1, U_2, \dots, U_r и соответственно через $U_1^*, U_2^*, \dots, U_r^*$ сферические окрестности радиуса ε_i

точек первой и второй сети. Очевидно, что никакие p ($p \leq r$) множеств первой системы не могут быть покрыты $p-1$ множествами второй. Следовательно, по известной лемме Кёнига (см. [1]) множества U_i и U_i^* можно так поставить во взаимно однозначное соответствие, чтобы каждая пара имела общую точку. Иначе говоря, существует такое взаимно однозначное соответствие точек сетей T_i и sT_i , что расстояние между точками каждой пары $< 2\varepsilon_i$. Из равномерной непрерывности функции $f(x)$ следует тогда, что модуль разности

$$[C(f)]_{i_n} - [C(sf)]_{i_n}$$

стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, т. е. что $\sigma(f) = \sigma(sf)$.

Замечание. Если, в частности, Q есть непрерывная компактная группа, удовлетворяющая второй аксиоме счётности (такая группа всегда метризуема), а G состоит из всех преобразований, получающихся при помощи умножения справа каждого элемента группы Q на некоторый фиксированный элемент этой группы (совокупность таких преобразований равностепенно непрерывна), то указанный функционал совпадает со средним Неймана. При применении указанного пути к доказательству существования среднего Неймана нет надобности пользоваться результатами п. I, так как в (*) вместо знака \leq будет стоять знак равенства.

Следствие. Если G — полугруппа отображений компакта Q на себя, и если все преобразования, входящие в G , равностепенно непрерывны, то все они взаимно однозначны.

При указанных условиях полугруппу G можно, следовательно, рассматривать как часть некоторой группы. Доказательство следует из того, что все преобразования полугруппы G оказываются в некоторой метрике изометрическими.

III. Пусть в линейном нормированном пространстве расположен некоторый выпуклый компакт Q . Отображение s компакта Q на себя будем называть аффинным, если

$$s\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) = \frac{sx_1 + sx_2 + \dots + sx_n}{n}$$

при любом выборе числа n и точек $x_1, x_2, \dots, x_n \in Q$.

Теорема. В выпуклом компакте Q существует точка, инвариантная относительно всех аффинных изометрических отображений компакта Q на себя.

Доказательство. Пусть последовательность положительных чисел $\varepsilon_i \rightarrow 0$. Построим в Q минимальные ε_i -сети T_i и обозначим через x_i среднее арифметическое точек сети T_i . Пусть x_0 — какая-нибудь точка сгущения последовательности $\{x_i\}$. Покажем, что $sx_0 = x_0$ для любого аффинного изометрического отображения s компакта Q на себя.

Действительно, точки сетей T_i и sT_i можно так поставить во взаимно однозначное соответствие, чтобы отрезки, соединяющие соответствующие друг другу точки, были короче $2\varepsilon_i$ [1]. Но тогда и отрезок, соединяющий средние арифметические этих сетей, будет короче $2\varepsilon_i$, т. е. $\|x_i - sx_i\| < 2\varepsilon_i$. Если теперь $x_{i_n} \rightarrow x_0$ при $n \rightarrow \infty$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{i_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} sx_{i_n}$, или $x_0 = sx_0$.

Замечание. Автор обязан М. Г. Крейну замечанием, что всякое изометрическое отображение компакта на себя является аффинным. Доказательство этого факта легко получается из рассуждений С. Мазура и С. Улама, приведённых в книге С. Банаха (см. [2], стр. 142—143).

В общей формулировке без требования аффинности отображения теорема была доказана ранее Д. П. Мильманом и автором [3], однако, с помощью трансфинитных процессов.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- [1] W. Maak, Eine neue Definition der fastperiodischen Funktionen, и Abstrakte fastperiodische Funktionen, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität, **11** (1935), 240—244 и **11** (1936), 367—380.
- [2] С. С. Банах, Курс функціонального аналізу, Радянська школа, 1948, 1—216.
- [3] М. С. Бродский и Д. П. Мильман, О центре выпуклого множества, ДАН, **ЛХ**, № 5 (1948), стр. 837—840.