В. И. Берник, Б. И. Пташник, Б. О. Салыга, Аналог многоточечной задачи для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами, *Дифференц. уравнения*, 1977, том 13, номер 4, 637–645

АПРЕЛЬ 1977 г., ТОМ XIII, № 4

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.944+511

В. И. БЕРНИК, Б. И. ПТАШНИК, Б. О. САЛЫГА

АНАЛОГ МНОГОТОЧЕЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В данной работе изучается аналог многоточечной задачи (по временной переменной) для гиперболического оператора с постоянными коэффициентами, однородного относительно порядка дифференцирования. Установлены условия существования, единственности и корректности решения задачи, которые формулируются в теоретико-числовых терминах.

В дальнейшем будем пользоваться такими обозначениями: $x=(x_1, \ldots, x_m)$, $k=(k_1, \ldots, k_m)$, $|k|=|k_1|+\ldots+|k_m|$, $\|k\|=\sqrt{k_1^2+\ldots+k_m^2}$, $(k, x)=k_1x_1+\ldots+k_mx_m$, $R_m=\{t, x: 0\leqslant t\leqslant T;\ -\infty<x_p<\infty,\ p=1, \ldots, m\}$; $C_{2\pi}^{(p, q)}(R_m)$ $(q\geqslant p)$ — класс функций $u(t, x)$, которые определены в области R_m, p раз непрерывно дифференцируемые по t, а по x q раз непрерывно дифференцируемые и 2π-периодические.

Класс функций $C_{2\pi}^{(p, q)}(R_m)$ станет полным нормированным пространством, если ввести норму функции $u(t, x)$ равенством

$$\|u(t, x)\|=\sum_{\substack{s_0\leqslant p,\\ s_0+s_1+\cdots+s_m\leqslant q}} \max_{R_m}\left|\frac{\partial^{s_0+s_1+\cdots+s_m}u(t, x)}{\partial t^{s_0}\,\partial x_1^{s_1}\cdots\partial x_m^{s_m}}\right|.$$

1. Постановка задачи. Пусть в области R_m дано дифференциальное уравнение

$$L[u]\equiv\sum_{|p|=n}A_p\frac{\partial^n u(t, x)}{\partial t^{p_0}\,\partial x_1^{p_1}\cdots\partial x_m^{p_m}}=f(t, x), \tag{1}$$

где $p=(p_0, p_1, \ldots, p_m)$, $|p|=p_0+p_1+\ldots+p_m$, A_p — действительные числа.

Предполагается, что оператор L строго гиперболический. Это значит, что для произвольного действительного $\eta=(\eta_1, \ldots, \eta_m)$ все корни $\lambda(\eta)$ уравнения

$$P(\lambda)\equiv\sum_{|p|=n}A_p\lambda^{p_0}\eta_1^{p_1}\cdots\eta_m^{p_m}=0 \tag{2}$$

действительные и различные и что $A_{n, 0, \ldots, 0}\neq 0$. Не ограничивая общности, будем считать, что $A_{n, 0, \ldots, 0}=1$.

Требуется найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$l_j[u]\equiv\sum_{r=0}^{n-1}a_r\frac{\partial^r u(t_j, x)}{\partial t^r}=0, \tag{3}$$

$$(j=1, \ldots, n;\ 0\leqslant t_1<t_2<\ldots<t_n\leqslant T),$$

где a_r $(r=0, 1, \ldots, n-1)$ — действительные числа $(a_0\neq 0)$.

Заметим, что в случае, когда $a_r=0$ $(r=1, \ldots, n-1)$, аналогичная задача изучалась в работах [1, 2], где было показано, что решение задачи (1), (3), вообще говоря, не будет единственным, если на него не наложить дополнительные условия по x. За эти условия примем условия периодичности по пространственным переменным и будем искать решение задачи (1), (3) в классе $C_{2\pi}^{(n,\,n)}(R_m)$, предполагая, что $f(t, x) \in C_{2\pi}^{(0,\,N)}(R_m)$ (N — достаточно большое натуральное число).

Решение задачи (1), (3) ищем в виде ряда

$$u(t, x) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{k_m=-\infty}^{\infty} u_k(t) \exp\{i(k, x)\}. \tag{4}$$

Тогда для определения каждой из функций $u_k(t)$ получаем следующую многоточечную задачу:

$$\sum_{|p|=n} A_p (ik_1)^{p_1} \ldots (ik_m)^{p_m} \frac{d^{p_0} u_k(t)}{dt^{p_0}} = f_k(t), \tag{5}$$

$$\sum_{r=0}^{n-1} a_r u_k^{(r)}(t_j) = 0 \qquad (j=1, \ldots, n), \tag{6}$$

где $f_k(t)$ — коэффициенты Фурье функции $f(t, x)$.

Замечание 1. Легко показать, что для вектора $k=(0, \ldots, 0)$ всегда существует единственное решение $u_0(t)$ задачи (5), (6).

Обозначим через $\lambda_p(k)$ $(k \neq 0;\ p=1, \ldots, n)$ корни уравнения (2) при $\eta_s = \frac{k_s}{\|k\|}$ $(s=1, \ldots, m)$; они являются равномерно ограниченными для всех векторов k. Однородное уравнение

$$\sum_{|p|=n} A_p (ik_1)^{p_1} \ldots (ik_m)^{p_m} \frac{d^{p_0} u_k(t)}{dt^{p_0}} = 0, \tag{5*}$$

которое отвечает неоднородному уравнению (5), имеет такую фундаментальную систему решений:

$$y_{kp}(t) = \exp\{i\lambda_p(k)\|k\|t\}, \qquad p=1, \ldots, n. \tag{7}$$

Решение задачи (5*), (6) представляется формулой

$$u_k(t) = \sum_{p=1}^{n} C_{kp} \exp\{i\lambda_p(k)\|k\|t\}, \tag{8}$$

где коэффициенты C_{kp} определяются из системы уравнений

$$\sum_{p=1}^{n} \sum_{r=0}^{n-1} a_r (i\lambda_p(k)\|k\|)^r \exp\{i\lambda_p(k)\|k\|t_j\} C_{kp} = 0, \tag{9}$$

определитель которой обозначим через $\Delta(k)$.

Легко видеть, что

$$\Delta(k) = \Delta^*(k) \prod_{p=1}^{n} \Bigl[\sum_{r=0}^{n-1} a_r (i\lambda_p(k)\|k\|)^r \Bigr], \tag{10}$$

где

$$\Delta^*(k) = \det \| \exp\{i\lambda_q(k)\|k\|t_p\} \|_{p,\,q=1}^{n}. \tag{11}$$

2. Единственность решения. Задача (1), (3) не может иметь двух разных решений тогда и только тогда, когда уравнение

$$L[u]=0 \tag{1*}$$

не имеет отличных от тождественного нуля решений, удовлетворяющих условиям (3).

Теорема 1. *Для единственности решения задачи (1), (3) в классе $C_{2\pi}^{(n,\,n)}(R_m)$ необходимо, а в классе $C_{2\pi}^{(n,\,n+m+1)}(R_m)$ необходимо и достаточно, чтобы ни одно из уравнений*

$$\sum_{r=0}^{n-1} a_r(i\lambda_p(k)\,\|k\|)^r=0, \qquad p=1,\ldots,n, \tag{12}$$

$$\Delta^*(k)=0 \tag{13}$$

не имело нетривиальных решений в целых числах $k_1,\ldots,k_m$.

Доказательство. Если хотя бы одно из уравнений (12) или (13) имеет нетривиальное решение в целых числах $k_{10},\ldots,k_{m0}$, то $\Delta(k_0)=0$ $(k_0=(k_{10},\ldots,k_{m0}))$ и существует по крайней мере одно нетривиальное решение задачи (1), (3), которое имеет вид

$$u_0(t,x)=\sum_{p=1}^{n} C_{k_0p}\exp i\{\lambda_p(k)\,\|k\|t+(k_0,x)\},$$

где C_{k_0p} $(p=1,\ldots,n)$ — решение системы (9) при $k=k_0$. Поэтому решение задачи (1), (3) (если оно существует) не будет единственным.

Докажем теорему в другую сторону. Предположим, что существуют два решения $u_1(t,x)$ и $u_2(t,x)$ задачи (1), (3) из класса $C_{2\pi}^{(n,\,n+m+1)}(R_m)$. Тогда функция $\bar u(t,x)=u_1(t,x)-u_2(t,x)$ является решением однородной задачи (1*), (3) и также принадлежит классу $C_{2\pi}^{(n,\,n+m+1)}(R_m)$. Следовательно, ее можно разложить в ряд Фурье

$$\bar u(t,x)=\sum_{k_1=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{k_m=-\infty}^{\infty}\bar u_k(t)\exp\{i,(k,x)\}$$

и применить к нему операторы L и l_j $(j=1,\ldots,n)$. Отсюда получим, что каждая из функций $\bar u_k(t)$ является решением однородной задачи (5*), (6). Из условий теоремы следует, что $\Delta(k)\neq 0$ для $k\neq 0$. Поэтому $\bar u_k(t)=0$ для всех векторов $k\neq 0$. Учитывая замечание 1, на основании теоремы о разложении функции в ряд Фурье получаем, что $\bar u(t,x)\equiv 0$, т. е. $u_1(t,x)\equiv u_2(t,x)$. Теорема доказана.

Рассмотрим случай, когда имеют место соотношения

$$t_{j+1}-t_j=t_0>0, \qquad j=1,\ldots,n-1;\ t_1=0. \tag{14}$$

При этих условиях определитель (11) факторизуется в виде

$$\Delta^*(k)=\prod_{n\geqslant p>s\geqslant 1}[\exp\{i\lambda_p(k)\,\|k\|t_0\}-\exp\{i\lambda_s(k)\,\|k\|t_0\}]. \tag{15}$$

Из (10), (15) и теоремы 1 следует

Теорема 2. *При выполнении соотношений (14) для единственности решения задачи (1), (3) в классе $C_{2\pi}^{(n,\,n)}(R_m)$ необходимо, а в классе*

$C_{2\pi}^{(n,\, n+m+1)}(R_m)$ *необходимо и достаточно, чтобы ни одно из уравнений (12) и*

$$[\lambda_p(k)-\lambda_s(k)]\,\|k\|-\frac{2\pi}{t_0}\,l=0, \qquad (p,\ s=1,\ \ldots,\ n;\ p\neq s) \tag{16}$$

не имело нетривиальных решений в целых числах $k_1, \ldots, k_m, l$.

3. Существование решения задачи. Для доказательства существования решения задачи (1), (3) из класса $C_{2\pi}^{(n,\, n)}(R_m)$ необходимо показать, что для каждого вектора k с целочисленными координатами существует решение задачи (5), (6) и что ряд (4) и ряды, полученные из него почленным дифференцированием до порядка n включительно, равномерно сходятся в области R_m.

В дальнейшем будем предполагать, что для всех целочисленных векторов $k\neq 0$ имеет место единственность решения задачи (5), (6). Тогда для каждого вектора $k\neq 0$ существует функция Грина $G_k(t,\ \tau)$ задачи (5*), (6), с помощью которой решение задачи (5), (6) представляется в виде

$$u_k(t)=\int_0^T G_k(t,\ \tau)f_k(\tau)\,d\tau. \tag{17}$$

В квадрате $K=\{0\leqslant t,\ \tau\leqslant T\}$ (за исключением прямых $\tau=t_j$, $j=1,\ldots$ $\ldots, n$; $\tau=0$, $\tau=T$) функция $G_k(t,\ \tau)$ определяется формулой

$$\begin{aligned} G_k(t,\ \tau) &= g_k(t,\ \tau)- \\ &-\sum_{m=1}^{j}\sum_{s,p=1}^{n}\frac{(-1)^{m+s+1}\,\gamma_p(k)\exp\{i\,\|k\|\,[\lambda_p(k)(t_m-\tau)+\lambda_s(k)\,t]\}}{2\,(i\,\|k\|)^{n-1}\,\gamma_s(k)\prod\limits_{\substack{l=1\\ l\neq p}}^{n}[\lambda_p(k)-\lambda_l(k)]}\times \\ &\times\frac{\Delta^*_{ms}(k)}{\Delta^*(k)}+ \\ &+\sum_{m=j+1}^{n}\sum_{s,p=1}^{n}\frac{(-1)^{m+s+1}\,\gamma_p(k)\exp\{i\,\|k\|\,[\lambda_p(k)(t_m-\tau)+\lambda_s(k)\,t]\}}{2\,(i\,\|k\|)^{n-1}\,\gamma_s(k)\prod\limits_{\substack{l=1\\ l\neq p}}^{n}[\lambda_p(k)-\lambda_l(k)]}\times \\ &\times\frac{\Delta^*_{ms}(k)}{\Delta^*(k)} \\ &(t_j<\tau<t_{j+1},\quad j=1,\ldots,n-1), \end{aligned} \tag{18}$$

где $\gamma_p(k)=\sum\limits_{r=0}^{n-1}a_r(i\lambda_p(k)\,\|k\|^r$ $(p=1,\ \ldots,\ n)$, $\Delta^*_{ms}(k)$ — алгебраическое дополнение элемента $\exp\{i\lambda_s(k)\,\|k\|\,t_m\}$ определителя $\Delta^*(k)$,

$$g_k(t,\ \tau)=\frac{\operatorname{sign}(t-\tau)}{2\,(i\|k\|)^{n-1}}\sum_{p=1}^{n}\frac{\exp\{i\|k\|\lambda_p(k)\,(t-\tau)\}}{\prod\limits_{l=1,\ l\neq p}^{n}[\lambda_p(k)-\lambda_l(k)]}. \tag{19}$$

На прямых $\tau=0$ и $\tau=t_j$ $(j=1,\ \ldots,\ n)$ функция $G_k(t,\ \tau)$ доопределяется по непрерывности по τ справа, а $G_k(t,\ T)$ — слева.

На основании формул (4), (17) (с учетом замечания 1) решение задачи (1), (3) формально представляется таким рядом:

$$u(t,\ x)=u_0(t)+\sum_{k_1,\ \dots,\ k_m=-\infty}' \int_0^T G_k(t,\ \tau)f_k(\tau)\,d\tau \exp\{i(k,\ x)\}, \tag{20}$$

где функция $G_k(t,\ \tau)$ определяется формулой (18), а знак ($'$) означает, что пропущено суммирование по нулевому вектору.

Ряд (20) может оказаться расходящимся, так как величины $|\Delta^*(k)|$, $\left|\sum\limits_{r=0}^{n-1} a_r(i\lambda_s(k)\|k\|)^r\right|$, $|\lambda_p(k)-\lambda_l(k)|$, будучи отличными от нуля, могут принимать как угодно малые значения для бесконечного множества векторов k с целочисленными координатами. Поэтому вопрос о существовании решения задачи (1), (3) связан с проблемой малых знаменателей.

Теорема 3. *Пусть существуют положительные константы M, M_1, M_2 и натуральные числа ν, ν_1, ν_2, что для всех (за исключением конечного числа) векторов k с целочисленными координатами выполняются неравенства*

$$\left|\frac{\Delta^*_{ms}(k)}{\Delta^*(k)}\right| \leqslant M|k|^{\nu+\frac{\varepsilon}{3}}, \qquad m,\ s=1,\ \dots,\ n, \tag{21}$$

$$\left|\sum_{r=0}^{n-1} a_r(i\lambda_s(k)\|k\|)^r\right| \geqslant M_1|k|^{-(\nu_1+\varepsilon/3)}, \qquad s=1,\ \dots,\ n, \tag{22}$$

$$\prod_{l=1,\ l\neq p}^{n} |\lambda_p(k)-\lambda_l(k)| \geqslant M_2|k|^{-(\nu_2+\varepsilon/3)}, \qquad p=1,\ \dots,\ n, \tag{23}$$

где $0<\varepsilon<1$, и пусть $f(t,\ x)\in C_{2\pi}^{(0,\ \nu+\nu_1+\nu_2+n+m+1)}(R_m)$. Тогда существует решение задачи (1), (3), принадлежащее классу $C_{2\pi}^{(n,\ n)}(R_m)$, которое дается рядом (20).

Доказательство. Из (18)—(23) следует, что общей мажорантой ряда (20) и рядов, полученных из него почленным дифференцированием до n-го порядка включительно, является следующий числовой ряд:

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}|u_0(t)|+\sum_{k_1,\ \dots,\ k_m=-\infty}^{\infty}{}' A\max_{0\leqslant t\leqslant T}|f_k(t)|\,|k|^{\nu+\nu_1+\nu_2+n+\varepsilon}, \tag{24}$$

где $A>0$ — некоторая константа, не зависящая от k. Если $f(t,\ x)\in C_{2\pi}^{(0,\ \nu+\nu_1+\nu_2+n+m+1)}(R_m)$, то имеет место оценка

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}|f_k(t)|=O(|k|^{-(\nu+\nu_1+\nu_2+n+m+1)}). \tag{25}$$

Из (25) следует сходимость ряда (24). Тогда ряд (20) сходится абсолютно и равномерно в области R_m вместе со своими производными до n-го порядка включительно. Теорема доказана.

В случае, когда имеют место соотношения (14),

$$\frac{\Delta^*_{ms}(k)}{\Delta^*(k)}=\frac{B_{n-m}}{\prod\limits_{l=1,\ l\neq s}^{n}[\exp\{i\lambda_s(k)\|k\|t_0\}-\exp\{i\lambda_l(k)\|k\|t_0\}]}, \tag{26}$$

где $B^{(s)}_{n-m}$ — суммы всевозможных произведений элементов $\exp\{i\lambda_l(k)\times\times\|k\|t_0\}$ $(l=1, \ldots, n;\ l\neq s)$, взятых по $n-m$ в каждом произведении $(B^{(s)}_0\equiv 1)$. Из (26) и теоремы 3 следует

Теорема 4. *Пусть выполнены соотношения (14) и пусть существуют положительные константы M, M_1, M_2 и натуральные числа ν, ν_1, ν_2, что для всех (за исключением конечного числа) векторов k с целочисленными координатами выполняются неравенства (22), (23) и неравенство*

$$\prod_{l=1,\, l\neq s}^{n} |\exp\{i\lambda_s(k)\|k\|t_0\}-\exp\{i\lambda_l(k)\|k\|t_0\}|\geqslant M|k|^{-\nu-\varepsilon/3} \tag{27}$$

$$(s=1, \ldots, n).$$

Если $f(t, x)\in C^{(0,\,\nu+\nu_1+\nu_2+n+m+1)}_{2\pi}(R_m)$, то существует решение задачи (1), (3), которое принадлежит классу $C^{(n,\,n)}_{2\pi}(R_m)$ и дается рядом (20).

Замечание 2. Легко видеть, что при условиях теорем 3 и 4 решение рассматриваемой задачи корректно относительно функции $f(t, x)$ в том смысле, что если последовательность функций $f_q(t, x)$ стремится при $q\to\infty$ к $f(t, x)$ по норме пространства $C^{(0,\,\nu+\nu_1+\nu_2+n+m+1)}_{2\pi}(R_m)$, то последовательность решений $u_q(t, x)$ уравнений $L[u_q]=f_q(t, x)$, удовлетворяющих условиям (3), стремится к решению задачи (1), (3) по норме пространства $C^{(n,\,n)}_{2\pi}(R_m)$.

4. Некоторые теоретико-числовые результаты. Сформулированные и доказанные ниже теоремы покажут, что оценки (22), (23) и (27) достигаются для почти всех значений (в смысле меры Лебега) коэффициентов уравнения (1) и условий (3) в пространствах R^+ и R^n, где t — число коэффициентов A_p. Приведем две леммы, используемые для доказательства этих метрических теорем.

Лемма 1. *Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ — последовательность измеримых множеств в R^m, причем $\sum_{i=1}^{\infty}|A_i|<\infty$, где $|A_i|$ — мера множества A_i. Пусть B — множество точек R^m, попадающих в бесконечное число A_i. Тогда $|B|=0$.*

Это известная лемма Бореля — Кантелли. Ее доказательство можно найти, скажем, в [3].

Лемма 2. *Пусть заданная на отрезке (a, b) функция $f(x)$ удовлетворяет условию $|f^{(n)}(x)|>c_1$ для всех $x\in(a, b)$, где c_1 — некоторая постоянная. Тогда мера тех x, для которых $|f(x)|<\varepsilon$ не превосходит $c_2\sqrt[n]{\varepsilon}$, где $c_2=c_2(c_1, n)>0$.*

Доказательство леммы можно провести аналогично доказательству леммы 4 в [4].

Теорема 5. *Для почти всех $a_n=(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ неравенства (22) справедливы для всех $|k|>k_0(a_n)$ при $\nu_1=m$.*

Доказательство. Обозначим через A множество тех a_n, принадлежащих некоторому n-мерному параллелепипеду $[\alpha_0, \beta_0]\times P_{n-1}$, для которых неравенство

$$\left|\sum_{r=0}^{n-1} a_r(i\lambda_s(k)\|k\|)^r\right|<|k|^{-m-\varepsilon} \tag{28}$$

имеет бесконечное число решений для целочисленных векторов $k=(k_1, \ldots, k_m)$.

Пусть $k_1=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}|k_i|$, что, конечно, не умаляет общности. Зафиксируем k и $a_1, \ldots, a_{n-1}$. Тогда для $A_k(a_1, \ldots, a_{n-1})$ — множества тех a_0, для которых выполняется (28), справедливо $|A_k(a_1, \ldots, a_{n-1})|<<2|k|^{-m-\varepsilon}$, где $|B|$ — мера множества B. Отсюда

$$\sum_{|k_j|\leqslant k_1} \int\limits_{(a_1,\ldots,a_{n-1})\in P_{n-1}} \cdots \int A_k(a_1, \ldots, a_{n-1})\, da_1 \ldots da_{n-1} < k_1^{-1-\varepsilon}.$$

Так как $\sum\limits_{k_1} k_1^{-1-\varepsilon}$ есть сходящийся ряд, то из леммы Бореля — Кантелли следует, что $|A|=0$ и, следовательно, для почти всех a_n выполняется противоположное неравенство.

Теорема 6. *Для почти всех коэффициентов A_p уравнения (1) при $k>k_0(A_p)$ выполняются неравенства*

$$\prod_{\substack{l=1\\ l\neq p}}^{n} |\lambda_p(k)-\lambda_l(k)|>C|k|^{-\frac{mn}{2}-\varepsilon_1}, \quad 0<\varepsilon_1<1, \quad p=1, \ldots, n, \tag{29}$$

где C — положительная константа, не зависящая от k.

Доказательство. Для дискриминанта $D(P)$ многочлена (2) имеют место два представления (30) и (31).

$$D(P)=\prod_{1\leqslant p<l\leqslant n} (\lambda_p(k)-\lambda_l(k))^2. \tag{30}$$

Для получения второго представления запишем (2) в виде

$$\lambda^n+\sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i B_i(p, A_p),$$

где $B_i(p, A_p)$ — коэффициент, стоящий при i-й степени λ. В этом случае дискриминант $D(P)$ можно записать в виде

$$D(P)=\pm\begin{vmatrix} 1 & B_{n-1} \ldots B_0 & & \\ & 1 \quad B_{n-1} \ldots B_0 & & \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ & & 1 \quad B_{n-1} \ldots B_0 & \\ n & (n-1)B_{n-1} \ldots B_1 & & \\ & n \quad (n-1)B_{n-1} \ldots B_1 & & \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ & & n \quad (n-1)B_{n-1} \ldots B_1 & \end{vmatrix}, \tag{31}$$

где пустые места заполнены нулями. Покажем, что для почти всех A_p $|D(P)|>|k|^{-mn-\varepsilon}$. Обозначим через B множество тех A_p, для которых бесконечно часто выполняется противоположное неравенство $|D(P)|<<|k|^{-mn-\varepsilon}$. Опять будем считать, что $k_1=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}|k_i|$. Зафиксируем целочисленный вектор k. Тогда в разложении $D(P)$ из (30) получаем, что коэффициент, стоящий при $t_1^n=A^n_{n-1,1,0,\ldots,0}$, имеет вид $c(n)\dfrac{k_i}{\sqrt{k_1^2+\ldots+k_m^2}}\times$

$\times D'(A'_p)$, где $D'(A'_p)$ — сумма миноров порядка $n-1$, получающихся после вычеркивания из $D(P)$ n строк и n столбцов, содержащих t_1. Эти миноры, очевидно, не содержат t_1. Сделаем допущение, что для почти всех A'_p $|D'(A'_p)|>|k|^{-\delta}$ $(0<\delta<\varepsilon)$, так как в противном случае относительно $D'(A'_p)$ возникает аналогичная задача, однако $D'(A'_p)$ зависит от меньшего числа переменных. Из неравенств $k_1>c(m)\|k\|$ и $D'(A'_p)>|k|^{-\delta}$ $(0<\delta<\varepsilon)$ получаем, что коэффициент, стоящий при t_1^n, ограничен снизу величиной $c(n, m)|k|^{-\delta}$, а так как $\left|\frac{\partial^n D(P)}{\partial t_1^n}\right| = \left| n!c(k)\frac{k_1}{\|k\|}\right| > c_1(m, n)|k|^{-\delta}$, то по лемме 2 мера тех значений t_1, для которых выполняется неравенство $|D(P)|<|k|^{-mn-\varepsilon}$, оценивается сверху величиной $c_2(m, n)|k|^{-m-\varepsilon_1}$. Проинтегрируем эту оценку по всем остальным A_p, а затем просуммируем по всем $|k_i|\leqslant k_1$. Получающийся при этом ряд $\sum_{k_1} k_1^{-1-\varepsilon_2}$ сходится. Поэтому $|B|=0$, а значит, для почти всех A_p $|D(P)|>|k|^{-mn-\varepsilon}$. Теперь из (30) получаем теорему 6.

Теорема 7. *Для почти всех A_p при $|k|>k_0(A_p)$ неравенства (27) выполняются для* $\nu=(mn-1)(n-1)$.

Доказательство. Заметим, что для любого вектора $k\neq 0$ выполняются неравенства

$$|\exp\{i\lambda_s(k)\|k\|t_0\}-\exp\{i\lambda_l(k)\|k\|t_0\}|>$$
$$>\frac{t_0}{2\pi}\|k\|\left|\lambda_s(k)-\left(\lambda_l(k)+\frac{T}{\|k\|}\frac{2\pi}{t_0}\right)\right|, \tag{32}$$

где T — неотрицательное целое число с условием

$$\left|\,|\lambda_s(k)-\lambda_l(k)|\,\|k\|\frac{t_0}{2\pi}-T\right|\leqslant\frac{1}{2}.$$

Выражение $\left[\lambda_s(k)-\left(\lambda_l(k)+\frac{T}{\|k\|}\frac{2\pi}{t_0}\right)\right]$ — это разность между корнями двух многочленов $P(\lambda)$ из (2) и $P\left(\lambda-\frac{T}{\|k\|}\frac{2\pi}{t_0}\right)$. Результант $R(P)$ этих многочленов можно записать в виде определителя от коэффициентов $P(\lambda)$ и $P\left(\lambda-\frac{T}{\|k\|}\frac{2\pi}{t_0}\right)$. Аналогично, как и при оценке снизу $D(P)$, можно получить, что $|R(P)|>|k|^{-mn-\varepsilon}$. С другой стороны,

$$R(P)=\prod_{1\leqslant i,\, j\leqslant n}(\lambda_i-\mu_j),$$

где λ_i — корни $P(\lambda)$, а μ_j — корни $P\left(\lambda-\frac{T}{\|k\|}\frac{2\pi}{t_0}\right)$. Так как все λ_i и μ_j ограничены сверху, то все выражения

$$\left|\lambda_s(k)-\left(\lambda_l(k)+\frac{T}{\|k\|}\frac{2\pi}{t_0}\right)\right|$$

оцениваются снизу через $|k|^{-mn-\varepsilon}$. Учитывая (32), получаем доказательство теоремы 7.

Замечание 3. Результаты работы переносятся на случай, когда уравнение (1) нестрого гиперболическое.

Литература

1. Пташник Б. И. УМЖ, **23**, 4, 1971.
2. Бобик О. І., Боднарчук П. І., Пташник Б. Й., Скоробогатько В. Я. Елементи якісної теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними. Киев, «Наукова думка», 1972.
3. Спринджук В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел. Минск, «Наука» и техника», 1967.
4. Пяртли А. С. Функциональный анализ и его приложения, **3**, № 4, 1969.

Поступила в редакцию 11 февраля 1976 г.

Институт математики АН БССР,
Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР