M. A. Shereshevskii, Asymptotics of the Hausdorff dimension of the basic set which is generated in the vanishing of an equilibrium state of the saddle–saddle type,
Funktsional. Anal. i Prilozhen., 1987, Volume 21, Issue 1, 88–89

Функциональный анализ и его приложения,
1987, т. 21, вып. 1, 88—89

УДК 517.9

ОБ АСИМПТОТИКЕ ХАУСДОРФОВОЙ РАЗМЕРНОСТИ БАЗИСНОГО МНОЖЕСТВА, РОЖДАЮЩЕГОСЯ ПРИ ИСЧЕЗНОВЕНИИ СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ ТИПА СЕДЛО—СЕДЛО

М. А. Шерешевский

В пространстве $\mathbf{R}^3$ рассмотрим однопараметрическое семейство $\{v_\varepsilon\}$ векторных полей, считая их достаточно гладкими и достаточно гладко зависящими от параметра ε. Пусть векторное поле v_0 имеет состояние равновесия O типа седло — седло, т. е. характеристическое уравнение в точке O имеет корни: 0, $\lambda < 0$, $\gamma > 0$; причем ограничение ростка v_0 на центральное многообразие гладко эквивалентно ростку, 3-струя которого имеет вид: $\dot{z} = z^2 + \beta z^3$. Предположим далее, что у векторного поля v_0 имеется $p \geqslant 2$ трансверсальных гомоклинических траекторий $\Gamma_{i,0}$, $i = 1, \ldots, p$ состояния равновесия O. Из [I] следует, что в этом случае для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ поток $\{f_\varepsilon^t\}$, определяемый векторным полем v_ε имеет нетривиальное базисное множество Λ_ε (см. [2]; 3]), содержащееся в малой окрестности множества $\bigcup_{i=1}^{p} \Gamma_{i,0}$. Обозначим через $W^{S0}(\Lambda_\varepsilon)$ и $W^{U0}(\Lambda_\varepsilon)$ соответственно глобальное устойчивое и глобальное неустойчивое многообразия множества Λ_ε. Основным результатом настоящей работы является

Теорема. *Асимптотическое поведение хаусдорфовой размерности (см. например [2]) множеств $W^{U0}(\Lambda_\varepsilon)$ и $W^{S0}(\Lambda_\varepsilon)$ при $\varepsilon \to +0$ описывается следующими формулами:*

$$\dim_H W^{U0}(\Lambda_\varepsilon) = 2 + (\ln p/\pi\,|\lambda|)\sqrt{\varepsilon} + o(\sqrt{\varepsilon}), \tag{1}$$

$$\dim_H W^{S0}(\Lambda_\varepsilon) = 2 + (\ln p/\pi\gamma)\sqrt{\varepsilon} + o(\sqrt{\varepsilon}). \tag{2}$$

Сейчас мы сформулируем одну лемму о хаусдорфовой размерности, на которой будет основываться доказательство теоремы.

Пусть для каждого $n \in \mathbf{N}$ каждому набору $(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \{1, \ldots, p\}^n$ ($\{1, \ldots, p\}^n$ означает декартово произведение n экземпляров множества $\{1, \ldots, p\}$) поставлено в соответствие множество $\Delta^{(\omega_1 \ldots \omega_n)} \subset \mathbf{R}^2 = \{(\xi, \eta)\}$ вида

$$\Delta^{(\omega_1 \ldots \omega_n)} = \{(\xi, \eta) : \xi \in [0, 1],\ \underline{\varphi}^{(\omega_1 \ldots \omega_n)}(\xi) \leqslant \eta \leqslant \bar{\varphi}^{(\omega_1 \ldots \omega_n)}(\xi)\},$$

где $\underline{\varphi}^{(\omega_1 \ldots \omega_n)}(\xi)$, $\bar{\varphi}^{(\omega_1 \ldots \omega_n)}(\xi)$ — непрерывные функции на $[0, 1]$. Предположим кроме того, что выполняются следующие условия:

1) если $(\omega_1, \ldots, \omega_n) \neq (\omega_1', \ldots, \omega_n')$, то $\Delta^{(\omega_1 \ldots \omega_n)} \cap \Delta^{(\omega_1' \ldots \omega_n')} = \varnothing$;
2) для каждого набора $(\omega_1, \ldots, \omega_n, \omega_{n+1}) \in \{1, \ldots, p\}^{n+1}$:

$$\Delta^{(\omega_1 \ldots \omega_n \omega_{n+1})} \subset \Delta^{(\omega_1 \ldots \omega_n)}.$$

Обозначим

$$\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{(\omega_1, \ldots, \omega_n)} \Delta^{(\omega_1 \ldots \omega_n)}.$$

Лемма. а) *Если для всякого $n \in \mathbf{N}$ и всякого $(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \{1, \ldots, p\}^n$ при всех $\xi \in [0, 1]$ имеет место неравенство*

$$\bar{\varphi}^{(\omega_1 \ldots \omega_n)}(\xi) - \underline{\varphi}^{(\omega_1 \ldots \omega_n)}(\xi) \geqslant \alpha_1 r_1^n,$$

где $\alpha_1 > 0$, $0 < r_1 < 1$ — некоторые константы, то

$$\dim_H \Delta \geqslant 1 + \ln p / (-\ln r_1).$$

б) *Если для всякого $n \in \mathbf{N}$ и всякого $(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \{1, \ldots, p\}^n$ при всех $\xi \in [0, 1]$ имеет место неравенство*

$$\bar{\varphi}^{(\omega_1 \ldots \omega_n)}(\xi) - \underline{\varphi}^{(\omega_1 \ldots \omega_n)}(\zeta) \leqslant \alpha_2 r_2^n,$$

где α_2, $0 < r_2 < 1$ — некоторые константы, и все функции $\underline{\varphi}^{(\omega_1 \ldots \omega_n)}(\xi)$, $\bar{\varphi}^{(\omega_1 \ldots \omega_n)}(\xi)$

удовлетворяют условию Липшица с одной и той же константой Липшица, то

$$\dim_H \Delta \leqslant 1 + \ln p/(-\ln r_2).$$

Недавно Ю. С. Ильяшенко и С. Ю. Яковенко (1985) доказали, что существует окрестность U точки O и $\varepsilon_0 > 0$ такие, что в $U \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ гладкой заменой координат и параметра семейство $\{v_\varepsilon\}$ приводится к виду

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda(z, \varepsilon) x, \\ \dot{y} &= \gamma(z, \varepsilon) y, \\ \dot{z} &= \varepsilon + z^2 + \beta(\varepsilon) z^3, \end{aligned} \tag{3}$$

где $\lambda(0, 0) = \lambda$, $\gamma(0, 0) = \gamma$.

Существует такое ε_1, $0 < \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_0$, что при подходящем выборе констант $\zeta > 0$, $a > 0$, b, c локальная секущая

$$\Pi \overset{\text{def}}{=} \{(x, y, z) \in U : z = \zeta,\ x \in [-a, a],\ y \in [b, c]\}$$

обладает тем свойством, что $\Gamma_{i,\varepsilon} \cap \Pi \neq \varnothing$[1]), $i = 1, \ldots, p$ при всех $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1]$.

Фиксируем произвольное $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$. Можно показать, что

$$W^{U_0}(\Lambda_\varepsilon) \cap \Pi \overset{\text{def}}{=} \Delta_\varepsilon = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{(\omega_1, \ldots, \omega_n)} \Delta_\varepsilon^{(\omega_1 \ldots \omega_n)},$$

где

$$\Delta_\varepsilon^{(\omega_1 \ldots \omega_n)} = \{(x, y, \zeta) : y \in [b, c],\ \underline{\varphi}_\varepsilon^{(\omega_1 \ldots \omega_n)}(y) \leqslant x \leqslant \overline{\varphi}_\varepsilon^{(\omega_1 \ldots \omega_n)}(y)\},$$

$\underline{\varphi}_\varepsilon^{(\omega_1 \ldots \omega_n)}(y)$, $\overline{\varphi}_\varepsilon^{(\omega_1 \ldots \omega_n)}(y)$ — дифференцируемые функции на отрезке $[b, c]$; причем множества $\Delta_\varepsilon^{(\omega_1 \ldots \omega_n)}$ удовлетворяют условиям 1, 2 (см. выше).

Утверждение 1. *Для каждого* $n \in \mathbb{N}$ *и для каждого* $(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \{1, \ldots, p\}^n$ *при всех* $y \in [b, c]$

$$\alpha_1 (\nu_1 e^{R(\varepsilon)})^n \leqslant \overline{\varphi}_\varepsilon^{(\omega_1 \ldots \omega_n)}(y) - \underline{\varphi}_\varepsilon^{(\omega_1 \ldots \omega_n)}(y) \leqslant \alpha_2 (\nu_2 e^{R(\varepsilon)})^n,$$

где $R(\varepsilon) \overset{\text{def}}{=} \int_{-\zeta}^{\zeta} [\lambda(z, \varepsilon)/(\varepsilon + z^2 + \beta(\varepsilon) z^3)] dz$; $\alpha_1, \alpha_2, \nu_1, \nu_2$ — *некоторые положительные константы.*

Причем нетрудно проверить, что все функции $\underline{\varphi}_\varepsilon^{(\omega_1 \ldots \omega_n)}(y)$ $\overline{\varphi}_\varepsilon^{(\omega_1 \ldots \omega_n)}(y)$ имеют общую константу Липшица. Теперь, применяя к Δ_ε лемму, получим следующие оценки:

$$1 + \ln p/(-\ln \nu_1 - R(\varepsilon)) \leqslant \dim_H \Delta_\varepsilon \leqslant 1 + \ln p/(-\ln \nu_2 - R(\varepsilon)).$$

Таким образом,

$$2 + \ln p/(-\ln \nu_1 - R(\varepsilon)) \leqslant \dim_H W^{U_0}(\Lambda_\varepsilon) \leqslant 2 + \ln p/(-\ln \nu_2 - R(\varepsilon)). \tag{4}$$

Утверждение 2. $\lim_{\varepsilon \to +0} \sqrt{\varepsilon} R(\varepsilon) = \pi\lambda$.

Это утверждение позволяет легко вывести из (4) формулу (1). Формула (2) вытекает из (1), поскольку $W^{S_0}(\Lambda_\varepsilon)$ и $W^{U_0}(\Lambda_\varepsilon)$ меняются местами при замене v_ε на $-v_\varepsilon$.

Автор выражает благодарность В. С. Афраймовичу за постановку задачи и внимание к работе, а также Ю. С. Ильяшенко за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шильников Л. П.* // ДАН СССР.— 1969. Т. 189, № 1.— С. 59—62. 2. *Бунимович Л. А., Песин Я. Б., Синай Я. Г., Якобсон М. В.* // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления.— М.: ВИНИТИ, 1985.— С. 113—231. 3. *Боуэн Р.* Методы символической динамики.— М.: Мир, 1979. 4. *Шильников Л. П.* // ДАН СССР.— 1966. Т. 170, № 1.— С. 48—52.

НИИ прикладной математики и кибернетики
при Горьковском государственном
университете им. Н. И. Лобачевского

Поступило в редакцию
16 апреля 1986 г.

[1]) Через $\Gamma_{i,\varepsilon}$ мы обозначаем седловой предельный цикл, рождающийся из $\Gamma_{i,0}$ при $\varepsilon > 0$ (см. [4]).