А. В. Шутов, Многомерные обобщения сумм дробных долей и их теоретико-числовые приложения, *Чебышевский сб.*, 2013, том 14, выпуск 1, 104–118

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 14 Выпуск 1 (2013)

УДК 519.21

МНОГОМЕРНЫЕ ОБОБЩЕНИЯ СУММ ДРОБНЫХ ДОЛЕЙ И ИХ ТЕОРЕТИКО-ЧИСЛОВЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ [1]

А. В. Шутов (г. Владимир)

Аннотация

В работе рассмотрено новое многомерное обобщение понятия дробной доли числа. Получена формула, выражающая число точек орбиты иррационального сдвига многомерного тора, попавших в определенную область, через суммы многомерных дробных долей. Также рассмотрен ряд приложений полученной формулы к задачам теории чисел.

MULTIDIMENSIONAL GENERALIZATION OF SUMS OF FRACTION PARTS AND THEIR APPLICATIONS TO NUMBER THEORY

A. V. Shutov (Vladimir)

Abstract

In the paper a new multidimensional generalization of fraction part function is introduced. We obtain a formula which express the number of points from the orbit of irrational shift on multidimensional torus, lying in a given domain, in the terms of sums of multidimensional fraction parts. Also we give some application of this formula to various number-theoretic problems.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 11-01-00578-а.

1. Введение

Пусть $\{x\}$ – дробная доля числа x. Классической задачей теории чисел является задача изучения суммы

$$C_n(\alpha, \gamma) = \sum_{j=1}^{n} \{n\alpha + \gamma\}. \tag{1}$$

Эта задача тесно связана с проблемами распределения дробных долей линейной функции по модулю 1, с задачей Харди-Литтлвуда [5] о целых точках в треугольнике, а также с рядом других теоретико-числовых проблем.

Изучению и оценке суммы (1) посвящено огромное количество работ, например [3], [6], [10], [20]. Настоящая работа посвящена многомерным аналогам суммы (1).

Пусть L – d-мерная решетка. Точки a и b называются сравнимыми по модулю решетки L, $a \equiv b \pmod{L}$, если соединяющий их вектор принадлежит решетке $a - b \in L$. Множество T называется фундаментальной областью решетки L, если выполняется два условия:

1) Для любой точки $x \in \mathbb{R}^n$ существует точка $x' \in T$, такая, что $x \equiv x' \pmod{L}$.

2) Любые две точки $x, x' \in T$ несравнимы по модулю решетки: $x \not\equiv x' \pmod{L}$.

Из определения фундаментальной области немедленно вытекает, что для любой точки $x \in \mathbb{R}^n$ существует единственная точка $x' \in T$ из фундаментальной области, сравнимая с x по модулю решетки L. Определим функцию

$$Fr_T(x) = x', x' \in T, x \equiv x' \pmod{L}. \tag{2}$$

Функцию (2) будем называть обобщенной дробной долей. Функция (2) впервые была введена В.Г.Журавлевым в работе [11] для получения явных формул для числа попаданий точек орбиты иррационального сдвига тора в некоторые области. Данная формула напоминала хорошо известный одномерный аналог [6], [22], но ее доказательство достаточно сильно отличалось от одномерной ситуации. В настоящей работе мы даем новое более простое доказательство формулы Журавлева, аналогичное одномерному, а также приводим некторое ее обобщение. Кроме того мы рассматриваем ряд новых приложений доказанной формулы к решению теоретико-числовых задач.

В §2 мы доказаываем явные формулы для характеристических функций некоторых областей на многомерном торе. В §3 доказанные формулы используются для получения нового вывода формулы Журавлева, а также для ее обобщения. Также в §3 рассматриваются приложения к задаче Гекке-Кестена о множествах ограниченного остатка. В §4 даются приложения доказанной формулы к задаче постоения сбалансированных слов. В §5 вводится новый класс квазирешеток, для которых даются оценки тригонометрических сумм и условия вложимости решеток.

2. Явные формулы для характеристических функций

Фундаментальную область T естественным образом можно отождествить с d-мерным тором $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/L$. Вектор α будем называть иррациональным (относительно решетки L), если размерность линейного пространства над $\mathbb{Q}$, порожденного векторами решетки L и вектором α равна $d+1$. Каждому вектору α соответствует отображение сдвига тора

$$R_\alpha(x) : \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d, x \to x + \alpha \pmod{L},$$

которое естественным образом определяет отображение развертки T в себя. Это отображение мы также будем обозначать через R_α.

Рассмотрим разбиение

$$T = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \ldots T_d, \tag{3}$$

такое, что для $x \in T_j$ справедливо равенство

$$R_\alpha(x) = x + v_j \tag{4}$$

с некоторым вектором v_j, зависящим только от номера области T_j.

Разбиения (3) будем называть перекладывающимися торическими разбиениями. Подобные разбиения тесно связаны с многомерной проблемой Гекке-Кестена. Многочисленные конструкции таких разбиений можно найти в работах [1], [9], [12], [19], [21].

На множестве T определим характеристические функции множеств T_j

$$\chi_j(x) = \begin{cases} 1, & x \in T_j \\ 0, & x \notin T_j \end{cases},$$

$j = 0, 1, \ldots, d$. Отметим, что функции $\chi_j(x)$ не определены для $x \notin T$.

Заметим, что разбиение (3) можно также рассматривать как разбиение d-мерного тора $\mathbb{T}^d$ и в этом случае функции $\chi_j(x)$ определены на всем торе.

Теорема 1. *Существуют векторы $e_0, e_1, \ldots, e_d$ такие, что*

$$\chi_j(x) = (Fr_T(x+\alpha) - Fr_T(x), e_j) - \frac{vol(T_j)}{vol(T)}. \tag{5}$$

В настоящем пункте мы докажем более слабое равенство

$$\chi_j(x) = (Fr_T(x+\alpha) - Fr_T(x), e_j) - c_j, \tag{6}$$

с некоторыми эффективно вычислимыми константами c_j. Равенство

$$c_j = \frac{vol(T_j)}{vol(T)} \tag{7}$$

будет доказано в следующем разделе.

Заметим, что по определению для $x \in T$ имеем $Fr_T(x) = x$ и $Fr_T(R_\alpha(x)) = Fr_T(x+\alpha)$. Отсюда, учитывая (4), получаем, что

$$Fr_T(x+\alpha) - Fr_T(x) = v_j, \tag{8}$$

если $x \in T_j$. Из (8) следует, что для $j = 1, 2, \ldots, d$ справедливо равенство

$$Fr_T(x+\alpha) - Fr_T(x) - v_0 = v_j - v_0, \tag{9}$$

если $x \in T_j$. Множество векторов $v'_j = v_j - v_0$, $j = 1, 2, \ldots, d$ является линейно независимым (над $\mathbb{R}$) [11]. Соответственно определен двойственный базис $e_1, e_2, \ldots, e_d$ такой, что

$$(v'_j, e_k) = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}. \tag{10}$$

Из (9) и (10) немедленно получаем, что равенство (6) справедливо для $j = 1, 2, \ldots, d$ с константами

$$c_j = (v_0, e_j).$$

В случае $j = 0$ положим $e_0 = -\sum_{j=1}^d e_j$ и $c_0 = 1 - \sum_{j=1}^d c_j$ и воспользуемся очевидным равенством

$$\sum_{j=0}^{d} \chi_j(x) = 1.$$

3. Множества ограниченного остатка

Определим счетные функции

$$N_j(\alpha, x, n) = \sharp\{k : 0 \leq k < n : R_\alpha^k(x) \in T_j\}$$

показывающие сколько точек R_α-орбиты точки x попало в область T_j.

Согласно теореме Вейля о равномерном распределении для любого иррационального относительно решетки L вектора α имеем

$$N_j(\alpha, x, n) = n\frac{vol(T_j)}{vol(T)} + o(n). \tag{11}$$

По определению характеристической функции

$$N_j(\alpha, x, n) = \sum_{k=0}^{n-1} \chi_j(Fr_T(k\alpha + x)).$$

В силу (6), находим что при $n \geq 1$

$$N_j(\alpha, x, n) = (Fr_T((n\alpha + x) - Fr(x), e_j) + nc_j. \tag{12}$$

Сопоставляя (11) и (12) и учитывая, что скалярное произведение $(Fr_T((n\alpha+x)-Fr(x),e_j)$ ограничено константой, не зависящей от n,получаем равенство (7).

Рассмотрим остаточные члены проблемы распределения дробных долей

$$r_j(\alpha,x,n)=N_j(x,n)-n\frac{vol(T_j)}{vol(T)}.$$

Из предудущих рассуждений получаем следующий результат.

Теорема 2. *Множества T_j являются множествами ограниченного остатка для сдвига R_α, то есть*

$$r_j(\alpha,x,n)=O(1).$$

Более того

$$r_j(\alpha,x,n)=(Fr_T((n\alpha+x)-Fr(x),e_j).$$

Пусть теперь вектор β определяется условием

$$\beta\equiv h\alpha \pmod L). \tag{13}$$

для некоторого целого $h\neq 0$.

Теорема 3. *Множества T_j являются множествами ограниченного остатка для сдвига R_β, то есть*

$$r_j(\beta,x,n)=O(1).$$

Более того справедливы равенства

$$r_j(\beta,x,n)=(\sum_{k=0}^{h-1}(Fr((k+n)\beta+x)-Fr(k\beta+x)),e_j)$$

при $0<h<n$,

$$r_j(\beta,x,n)=(\sum_{k=0}^{n-1}(Fr((k+h)\beta+x)-Fr(k\beta+x)),e_j)$$

при $0<n\leq h$,

$$r_j(\beta,x,n)=(\sum_{k=0}^{|h|-1}(Fr((k+h)\beta+x)-Fr((k+h+n)\beta+x)),e_j)$$

при $-n<h<0$, *и, наконец,*

$$r_j(\beta,x,n)=(\sum_{k=0}^{n-1}(Fr((k+h)\beta+x)-Fr(k\beta+x)),e_j)$$

при $h\leq -n<0$.

Для доказательства рассмотрим счетные функции $N_j(\beta, x, n)$ и остаточные члены $r_j(\beta, x, n)$. По определению характеристической функции

$$N_j(\beta, x, n) = \sum_{k=0}^{n-1} \chi_j(Fr_T(k\beta + x)).$$

С учетом теоремы Вейля о равномерном распределении имеем,

$$r_j(\beta, x, n) = \sum_{k=0}^{n-1} \chi_j(Fr_T(k\beta + x)) - \frac{vol(T_j)}{vol(T)}.$$

Далее, учитывая теорему 1, находим, что

$$r_j(\beta, x, n) = \sum_{k=0}^{n-1} (Fr(k\beta + x + \alpha) - Fr(k\beta + x), e_j).$$

Используя (13), получаем, что

$$r_j(\beta, x, n) = \sum_{k=0}^{n-1} (Fr((k + h)\beta + x) - Fr(k\beta + x), e_j).$$

Разбивая на две суммы и меняя в первой диапазон суммирования, находим

$$r_j(\beta, x, n) = \sum_{k=h}^{n+h-1} (Fr(k\beta + x), e_j) - \sum_{k=0}^{n-1} (Fr(k\beta + x), e_j) = \Sigma_1 - \Sigma_2. \qquad (14)$$

Остается выяснить, какие из слагаемых в формуле (14) взаимно уничтожаются. Для этого рассмотрим четыре случая.

1) $0 < h < n$. Тогда в сумме Σ_1 остаются слагаемые с номерами $n, \dots, n+h-1$, а в сумме Σ_2 – слагаемые с номерами $0, \dots, h-1$. Отсюда

$$r_j(\beta, x, n) = \sum_{k=n}^{n+h-1} (Fr(k\beta + x), e_j) - \sum_{k=0}^{h-1} (Fr(k\beta + x), e_j).$$

После преобразований получаем

$$r_j(\beta, x, n) = (\sum_{k=0}^{h-1} (Fr((k + n)\beta + x) - Fr(k\beta + x)), e_j).$$

2) $0 < n \leq h$. Тогда в сумме Σ_1 остаются слагаемые с номерами $h, \dots, n+h-1$, а в сумме Σ_2 – слагаемые с номерами $0, \dots, n-1$. Отсюда

$$r_j(\beta, x, n) = \sum_{k=h}^{n+h-1} (Fr(k\beta + x), e_j) - \sum_{k=0}^{n-1} (Fr(k\beta + x), e_j).$$

После преобразований получаем

$$r_j(\beta, x, n) = (\sum_{k=0}^{n-1}(Fr((k+h)\beta + x) - Fr(k\beta + x)), e_j).$$

Заметим, что при $h = n$ формулы пунктов 1 и 2 совпадают.

3) $-n < h < 0$. Тогда в сумме Σ_1 остаются слагаемые с номерами $h, \ldots, -1$, а в сумме Σ_2 – слагаемые с номерами $n+h, \ldots, n-1$. Отсюда

$$r_j(\beta, x, n) = \sum_{k=h}^{0}(Fr(k\beta + x), e_j) - \sum_{k=n+h}^{n-1}(Fr(k\beta + x), e_j).$$

После преобразований получаем

$$r_j(\beta, x, n) = (\sum_{k=0}^{|h|-1}(Fr((k+h)\beta + x) - Fr((k+h+n)\beta + x)), e_j).$$

4) $h \le -n < 0$. Тогда в сумме Σ_1 остаются слагаемые с номерами $h, \ldots, n+h-1$, а в сумме Σ_2 – слагаемые с номерами $0, \ldots, n-1$. Отсюда

$$r_j(\beta, x, n) = \sum_{k=h}^{n+h-1}(Fr(k\beta + x), e_j) - \sum_{k=0}^{n-1}(Fr(k\beta + x), e_j).$$

После преобразований получаем

$$r_j(\beta, x, n) = (\sum_{k=0}^{n-1}(Fr((k+h)\beta + x) - Fr(k\beta + x)), e_j).$$

Заметим, что при $h = -n$ формулы пунктов 3 и 4 вновь совпадают.

В случае $h > 0$ теорема 3 была другим способом доказана В.Г.Журавлевым в работе [11].

Функции $r_j(\beta, x, n)$, $j = 0, 1, \ldots, d$ связаны очевидным соотношением

$$\sum_{j=0}^{d} r_j(\beta, x, n) = 0. \tag{15}$$

Теорема 4. *Соотношение* (15) *является единственным линейным соотношением для функций $r_j(\beta, x, n)$, $j = 0, 1, \ldots, d$, выполненным для всех n.*

Поскольку соотношение (15) позволяет выразить функцию $r_0(\beta, x, n)$ через функции $r_1(\beta, x, n), \ldots r_d(\beta, x, n)$, достаточно доказать отсутствие линейных соотношений для функций $r_1(\beta, x, n), \ldots r_d(\beta, x, n)$. Предположим противное, то есть существование констант $A_1, \ldots, A_n$ таких, что

$$\sum_{j=1}^{d} A_j r_j(\beta, x, n) = 0$$

для всех n. Далее воспользуемся теоремой 3.

Для простоты рассмотрим только случай $h > 0$. Тогда для всех $n > h$ выполняется соотношение

$$\sum_{j=1}^{d} A_j(\sum_{k=0}^{h-1}(Fr((k+n)\beta + x) - Fr(k\beta + x)), e_j) = 0.$$

Обозначим

$$r^*(n) = \sum_{k=0}^{h-1} Fr((k+n)\beta + x) - Fr(k\beta + x).$$

Тогда

$$(r^*(n), \sum_{j=1}^{d} A_j e_j) = 0$$

для всех n.

Так как $r^*(n) \neq 0$ для бесконечно многих n, получаем

$$\sum_{j=1}^{d} A_j e_j = 0,$$

что противоречит тому факту, что $e_1, \ldots, e_d$ – базис.

Случай $h < 0$ рассматривается полностью аналогично.

4. Сбалансированные слова

Множество $A = \{0, 1, \ldots, d-1\}$ назовем алфавитом. Бесконечную последовательность $w = \{w_k\}_{k=0}^{\infty}$, $w_k \in A$ для всех k, назовем словом над алфавитом A. Конечные подпоследовательности $u = \{w_k\}_{k=u_1}^{u_1+u_2-1}$ будем называть подсловами слова w. Число u_2 будем назвать длиной $|u|$ подслова u. Для каждого подслова u и $j \in A$ определим величину

$$|u|_j = \sharp\{k : u_1 \leq k < u_1 + u_2, w_k = j\},$$

то есть количество вхождений символа j в подслово w. Слово w назовем C-сбалансированным [7], если для любой пары его подслов одинаковой длины u, v и для любого $j \in A$ выполняется неравенство

$$||u|_j - |v|_j| \leq C. \tag{16}$$

Константу C будем называть показателем сбалансированности слова w.

Интерес к сбалансированным словам объясняется, в частности, знаменитой теоремой о том, что непериодическое слово над двухсимвольным алфавитом

1-сбалансированно тогда и только тогда, когда оно является словом Штурма [8].

В настоящая время известно описание непериодических 1-сбалансированных слов над произвольным алфавитом [17]. В случае $C > 1$ известны только отдельные конструкции C-сбалансированных слов [2]. В связи с этим представляют интерес новые конструкции C-сбалансированных слов.

Пусть дано разбиение (3), связанное с вектором α, а вектор β определен условием (13). Опеределим бесконечное слово $w = w(\beta, x)$ по правилу $w_k = j$, если $R^k_\beta(x) \in T_j$.

Теорема 5. *Слово $w(\beta, x)$ является C-сбалансированным с эффективно вычислимым показателем сбалансированности C.*

Рассмотрим произвольное слово $u = \{w_k\}_{k=u_1}^{u_1+u_2-1} = \{u_k\}_{k=0}^{u_2-1}$, где $u_k = w_{k+u_1}$. По определению слова w получаем, что $u_k = j$ тогда и только тогда, когда $R^k_\beta(x_u) \in T_j$, где $x_u = R^{u_1}_\beta(x)$. Очевидно, что

$$|u|_j = N_j(\beta, x_u, u_2).$$

Условие (16) перепишется в виде

$$||u|_j - |v|_j| = |N_j(\beta, x_u, u_2) - N_j(\beta, x_v, v_2)| \leq C.$$

Используя теорему Вейля о равномерном распределении и равенство длин u и v, находим

$$||u|_j - |v|_j| = |r_j(\beta, x_u, u_2) - r_j(\beta, x_v, u_2)|. \tag{17}$$

Обозначим

$$r_j^+ = \sup_x \sup_n r_j(\beta, x, n),$$
$$r_j^- = \inf_x \inf_n r_j(\beta, x, n).$$

В силу теоремы 3 величины r_j^+, r_j^- конечны для всех i. Отсюда, используя (15) и (17), получаем утверждение теоремы 5 с константой $C = \sup_j(r_j^+ - r_j^-)$.

Замечание. *В работе [11] приведен алгоритм вычисления точных значений r_j^+, r_j^- для $h > 0$, основанный на соответствующей части теоремы 3. Полностью аналогичный алгоритм может быть получен и для $h < 0$.*

5. Квазирешетки

В случае $d = 1$ разбиение (3) имеет вид $[0; 1) = [0; 1 - \alpha) \sqcup [1 - \alpha; 1)$. Данное разбиение определяет одномерную квазирешетку $Q = Q(\alpha, l_1, l_2)$, рассматриваемую как множество точек $\{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, определяемое условиями

$$x_{-1} = 0;$$
$$x_{n+1} = \begin{cases} x_n + l_1, & \{n\alpha\} < 1 - \alpha \\ x_n + l_2, & \{n\alpha\} \geqslant 1 - \alpha \end{cases}. \tag{18}$$

Для квазирешеток вида (18) и ряда их аналогов решен целый ряд теоретико-числовых задач: асимптотика числа решений линейных уравнений в точках квазирешетки [18], вложение решеток в квазирешетки [14], [15], распределение точек квазирешетки по различным модулям [16], оценки тригонометрических сумм по точкам квазирешеток [23] и т.д.

Естественно определить многомерное обобщение квазирешеток типа (18). Пусть фундаментальная область T содержит начало координат $0 \in T$. Тогда для разбиения (3) и положительных чисел $l_0, \ldots, l_d$ определим квазирешетку $Q = Q(\alpha, l_0, \ldots, l_d)$ как множество точек $\{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, заданное условиями

$$\begin{gathered} x_{-1} = 0; \\ x_{n+1} = x_n + l_j, \text{если } R_\alpha^n(0) \in T_j \end{gathered} . \tag{19}$$

Квазирешетку $Q = Q(\alpha, l_0, \ldots, l_d)$ будем называть квазирешеткой коразмерности d, кодируемой сдвигами тора.

Рассмотрим тригонометрические суммы

$$f_n(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} e(x_k \lambda), \tag{20}$$

где

$$e(x) = e^{2\pi i x}$$

.

В работе [23] были рассмотрены суммы $f_n(\lambda)$ в случае квазирешеток коразмерности 1.

Теорема 6. *Пусть*

$$h_Q = \sum_{j=0}^{d} l_j \frac{vol(T_j)}{vol(T)}$$

и $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ *– иррациональный относительно решетки* L *вектор. Тогда при*

$$\lambda \neq \frac{a_0 + \sum_{j=1}^{d} a_j \alpha_j}{b}$$

с целыми a_j, b *справедлива оценка*

$$|f_n(\lambda)| = o(n).$$

Заметим, что

$$x_n = \sum_{j=0}^{d} l_j N_j(\alpha, 0, n+1).$$

Используя определение h_Q получаем

$$x_n = n h_Q + \sum_{j=0}^{d} l_j r_j(\alpha, 0, n+1).$$

Учитывая равенство

$$\sum_{j=0}^{d} r_j(\alpha, 0, n+1) = 0,$$

получаем

$$x_n = nh_Q + \sum_{j=1}^{d}(l_j - l_0) r_j(\alpha, 0, n+1).$$

Используя теорему 2, находим

$$x_n = nh_Q + \sum_{j=1}^{d}(l_j - l_0)(Fr_T((n+1)\alpha), e_j). \tag{21}$$

Множество $\widehat{T} = [0;1) \oplus T$ можно отождествить с $(d+1)$-мерным тором $\mathbb{T}^{d+1} = \mathbb{T} \oplus \mathbb{T}^d = \mathbb{R}/\widehat{L}$, где $\widehat{L} = \mathbb{Z} \oplus L$. Определим на $\widehat{T}$ отображение

$$\widehat{R_\alpha} : y \to y + (h_Q\lambda, \alpha) \pmod{\widehat{L}}.$$

Рассмотрим множество точек $\{y_n \in \widehat{T}\}_{n=0}^{\infty}$, где $y_n = \widehat{R_\alpha}(y_{n-1})$, $y_0 = (0, Fr_T(\alpha))$. Точка y_n будет иметь вид $y_n = (\{nh_Q\lambda\}, Fr_T((n+1)\alpha)$. Далее для каждой точки $\widehat{z} = (z_0, z) \in \widehat{T}$ определим функцию

$$h(z) = e(z_0 + \sum_{j=1}^{d}(z, e_j)(l_j - l_0)). \tag{22}$$

Объединяя (20)-(22) получаем, что

$$f_n(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} h(y_k).$$

Пусть $\lambda \neq \frac{a_0 + \sum_{j=1}^{d} a_j\alpha_j}{b}$ с целыми a_j, b. Тогда вектор $\widehat{\alpha} = (h_Q\lambda, \alpha)$ является иррациональным в решетке $\widehat{L}$ и, следовательно, точки y_n равномерно распределены на $\widehat{T}$. Применяя теорему Вейля о равномерном распределении, находим

$$f_n(\lambda) = nI + o(n), \tag{23}$$

где

$$I = \int_{\mathbb{T}^{d+1}} h(\widehat{z})d\widehat{z}. \tag{24}$$

Перейдем к вычислению интеграла (24). Учитывая (22) и правило $e(x+y) = e(x)e(y)$ и разделяя переменные, находим

$$\begin{aligned} I &= \textstyle\int_0^1 \int_{\mathbb{T}^d} e(z_0) e(\sum_{j=1}^{d}(z, e_j)(l_j - l_0)) dz_0 dz = \\ &= \textstyle\int_0^1 e(z_0)dz_0 \int_{\mathbb{T}^d} e(\sum_{j=1}^{d}(z, e_j)(l_j - l_0))dz = 0, \end{aligned}$$

так как $\int_0^1 e(z_0)dz_0 = 0$. Теорема 6 доказана.

Оценка тригонометрической суммы из теоремы 6 может быть усилена. Для этого заметим, что с использованием многомерного неравенства Коксмы-Главки [13] равенство (23) может быть переписано в виде

$$f_n(\lambda) = nI + O(\Delta(\widehat{\alpha}, n)),$$

где $\Delta(\widehat{\alpha}, n)$ – многомерное отклонение для сдвига $\widehat{R_\alpha}$. Учитывая равенство $I = 0$, получаем окончательную оценку

$$f_n(\lambda) = O(\Delta(\widehat{\alpha}, n)).$$

Некоторые нетривиальные оценки величины $\Delta(\widehat{\alpha}, n)$ можно найти в работе [4].

Рассмотрим также приложения полученных результатов к задаче вложения одномерной решетки в казирешетку Q. Рассмотрим одномерную решетку $L_1(h_L) = \{nh_L : n \in \mathbb{Z}\}$. Будем говорить, что решетка $L_1(h_L)$ сильно вкладывается в квазирешетку Q, если существует h_0 такое, что для любого $n \geq 0$ выполняются неравенства

$$x_{n-1} \leq h_0 + nh_L < x_n. \tag{25}$$

Сильное вложение квазирешеток коразмерности 1 рассмотрено в работе [16].

Пусть

$$l^* = \sum_{j=1}^{d} (l_j - l_0) e_j.$$

Теорема 7. *Для того, чтобы существовала решетка $L_1(h_L)$ сильно вкладывается в квазирешетку $Q(\alpha, l_0, \ldots, l_d)$, необходимо и достаточно, чтобы множество $I^* = \bigcap_{j=0}^{d} I_j$, где $I_j = [\sup_{x \in T_j}(x, l^*) - l_j, \inf_{x \in T_j}(x, l^*))$, было непустым. При этом $h_L = h_Q$ и $h_0 \in I^*$.*

Из формулы (21) вытекает асимптотика

$$x_n = nh_Q + O(1).$$

Подставляя в (25), находим, что

$$h_0 + nh_L = nh_Q + O(1),$$

откуда немедленно вытекает, что сильно вкладываться могут только решетки, у которых $h_L = h_Q$. Пусть $l(n) = x_n - x_{n-1}$. Тогда условие сильной вложимости (25) может быть переписано в виде

$$\sum_{j=1}^{d} (l_j - l_0)(Fr_T((n+1)\alpha), e_j) - l(n) \leq h_0 < \sum_{j=1}^{d} (l_j - l_0)(Fr_T((n+1)\alpha), e_j)$$

или

$$(Fr_T((n+1)\alpha), l^*) - l(n) \le h_0 < (Fr_T((n+1)\alpha), l^*). \tag{26}$$

Заметим, что равенство

$$l(n) = l_j, j = 0, 1, \ldots d$$

эквивалентно условию

$$Fr_T((n+1)\alpha) \in T_j.$$

Поэтому условия (26) эквивалентны набору из $d+1$ условия

$$\sup_{n\in\mathbb{N}_j}(Fr_T((n+1)\alpha), l^*) - l_j \le h_0 < \inf_{n\in\mathbb{N}_j}(Fr_T((n+1)\alpha), l^*), \tag{27}$$

где

$$\mathbb{N}_j = \{n : n \ge 0, Fr_T((n+1)\alpha) \in T_j\}.$$

Поскольку обобщенные дробные доли $Fr_T((n+1)\alpha)$ равномерно распределены на T, они равномерно распределены на всех T_j, а значит

$$\inf_{n\in\mathbb{N}_j}(Fr_T((n+1)\alpha), l^*) = \inf_{x\in T_j}(x, l^*),$$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}_j}(Fr_T((n+1)\alpha), l^*) = \sup_{x\in T_j}(x, l^*).$$

Поэтому условия (27) переписываются в виде

$$h_0 \in I_j$$

для всех $j = 0, 1, \ldots, d$, откуда и следует утверждение теоремы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Baladi V., Rockmore D., Tongring N., Tresser C. Renor malization on the n-dimensional torus // Nonlinearity. 1992. V. 5. P. 1111—1136.

2. Berthe V., Labbe S. Uniformly balanced words with linear complexity and predescribed letter frequencies // Words 2011. Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science. V. 63. P. 44—52.

3. Brown T. C., Shue P. J. Sums of fractional parts of integer multiplies of an irrational // J. Number Theory. 1995. V. 50. P. 181—192.

4. Drmota M., Tichy R. F. Sequences, discrepancies and applications. Berlin: Springer, 1997.

5. Hardy G. H., Littlewood J. E. Some problems of diophantine ap- proximation; the lattice points of a right-angled triangle // Proc. London Math. Soc. 1922. V. 20. P. 15—36.

6. Pinner C. G. On Sums of Fractional Parts $\{n\alpha+\gamma\}$ // J. Number Theory. 1997. V. 65. P. 48—73.

7. Sano Sh., Miyoshi N., Kataoka R. m-Balanced words: A generalization of balanced words // Theoretical computer science. 2004. V. 314. P. 97—120.

8. Vuillon L. Balanced words // Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. 2003. V. 10. P. 787—805.

9. Абросимова А. А. Множества ограниченного остатка на двумерном торе // Чебышевский сборник. 2011. Т. 12. Вып. 4. С. 15—23.

10. Добровольская В. Н. Неполные суммы дробных долей // Чебышевский сборник. 2004. Т. 5. Вып. 10. С. 42—48.

11. Журавлев В. Г. Многомерная теорема Гекке о распределении дробных долей // Алгебра и анализ. 2012. Т. 24. Вып. 1. С. 1—33.

12. Журавлев В. Г. Многогранники ограниченного остатка // Труды математического института имени В. А. Стеклова, Современные проблемы математики. 2012. Вып. 16. С. 82—102.

13. Кейперс Л., Нидеррейтер Г. Равномерное распределение последовательностей. М.: Мир, 1985.

14. Красильщиков В. В., Шутов А. В. Некоторые вопросы вложения решеток в одномерные квазипериодические разбиения // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2007. Вып. 7(57). С. 84—91.

15. Красильщиков В. В., Шутов А. В. Одномерные квазипериодические разбиения, допускающие вложение прогрессий // Известия вузов. Математика. 2009. №7. С. 3—9.

16. Красильщиков В. В., Шутов А. В. Распределение точек одномерных квазирешеток по переменному модулю // Известия вузов. Математика. 2012. №3. С. 17—23.

17. Чернятьев А. Л. Сбалансированные слова и динамические системы // Фундаментальная и прикладная математика. 2007. Т. 13. С. 213—224.

18. Шутов А. В. Арифметика и геометрия одномерных квазирешеток // Чебышевский сборник. 2010. Т. 11. Вып. 1. С. 255—262.

19. Шутов А. В. Двумерная проблема Гекке-Кестена // Чебышевский сборник. 2011. Т. 12. Вып. 2(38). С. 151—162.

20. Шутов А. В. О распределении дробных долей // Чебышевский сборник. 2004. Т. 5. Вып. 3. С. 112—121.

21. Шутов А. В. Об одном семействе двумерных множеств ограниченного остатка // Чебышевский сборник. 2011. Т. 12. Вып. 4. С. 264—271.

22. Шутов А. В. Оптимальные оценки в проблеме распределения дробных долей на множествах ограниченного остатка // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2007. Вып. 7(57) С. 168—175.

23. Шутов А. В. Тригонометрические суммы над квазирешетками // Чебышевский сборник. 2012. Т. 13. Вып. 2. С. 136—148.

Владимирский Государственный Университет
Поступило 4.03.2013