Л. Г. Мардоян, А. П. Нерсесян, М. Г. Петросян, Эффект Штарка в системе заряд–дион, *ТМФ*, 2004, том 140, номер 1, 78–85

DOI: 10.4213/tmf80

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 140, № 1
июль, 2004

© 2004 г. **Л. Г. Мардоян**[*,†], **А. П. Нерсесян**[*,‡], **М. Г. Петросян**[*,‡]

ЭФФЕКТ ШТАРКА В СИСТЕМЕ ЗАРЯД–ДИОН

Рассмотрен линейный эффект Штарка в задаче МИК-Кеплер, описывающей движение заряда в поле дираковского диона. Показано, что постоянное однородное электрическое поле полностью снимает вырождение энергетических уровней по азимутальному квантовому числу.

Ключевые слова: эффект Штарка, дираковский дион, МИК-Кеплер.

В феврале 2003 года не стало профессора Валерия Тер-Антоняна: интеллигента, блестящего педагога и научного работника, тонкого знатока квантовой механики. В последние годы жизни он увлекся изучением задачи Кулона в присутствии топологически нетривиальных объектов. Двоим из нас посчастливилось сотрудничать с ним в этой области. Этой скромной работой мы хотели бы отдать дань его памяти

1. ВВЕДЕНИЕ

Интегрируемая система МИК-Кеплер была построена Цванцигером [1] и переоткрыта МакИнтошем и Кизнеросом [2]. Эта система описывается гамильтонианом

$$\mathcal{H}_0 = \frac{\hbar^2}{2\mu}(i\nabla + s\mathbf{A})^2 + \frac{\hbar^2 s^2}{2\mu r^2} - \frac{\gamma}{r}, \tag{1.1}$$

где $\operatorname{rot}\mathbf{A} = \mathbf{r}/r^3$. Ее отличительной особенностью является наличие скрытой симметрии задачи Кулона. Именно, гамильтониан (1.1) имеет интегралы движения

$$\mathbf{I} = \frac{\hbar}{2\mu}\big[(i\nabla + s\mathbf{A})\times\mathbf{J} - \mathbf{J}\times(i\nabla + s\mathbf{A})\big] + \gamma\frac{\mathbf{r}}{r}, \qquad \mathbf{J} = -\hbar(i\nabla + s\mathbf{A})\times\mathbf{r} + \frac{\hbar s\mathbf{r}}{r}. \tag{1.2}$$

[*]Международный центр перспективных исследований, Ереванский государственный университет, Ереван, Армения. E-mail: mardoyan@icas.ysu.am

[†]Арцахский государственный университет, Степанакерт, Армения

[‡]Ереванский физический институт, Ереван, Армения

Оператор $\mathbf{J}$ определяет вращательный момент системы, а оператор $\mathbf{I}$ является аналогом вектора Рунге–Ленца.

Подобно задаче Кулона, интегралы движения вместе с гамильтонианом образуют квадратичную алгебру. При фиксированных отрицательных значениях энергии интегралы движения образуют алгебру $so(4)$, а при положительных значениях энергии – $so(3.1)$. В силу скрытой симметрии задача МИК-Кеплер факторизуется не только в сферических, но и в параболических координатах. Таким образом, система МИК-Кеплер является естественным обобщением задачи Кулона в присутствии монополя Дирака. В обоих случаях монопольное число s удовлетворяет дираковскому правилу квантования зарядов $s = 0, \pm 1/2, \pm 1, \ldots$.

Задачу МИК-Кеплер можно построить редукцией четырехмерного изотропного осциллятора с помощью так называемого преобразования Кустанхеймо–Штифеля на классическом и квантовом уровнях [3]. Аналогично редукцией двумерного и восьмимерного изотропных осцилляторов можно получить двумерный [4] и пятимерный [5] аналоги системы МИК-Кеплер. В двумерном случае роль магнитного монополя играет бесконечно тонкий соленоид, порождающий в системе спин $1/2$, а в пятимерном – $SU(2)$-монополь Янга [6], наделяющий систему $SU(2)$ изоспином. Все указанные системы имеют кулоновские симметрии соответствующей размерности и решены в сферических и параболических координатах как в дискретной, так и в непрерывной части спектра [7]. Имеются обобщения системы МИК-Кеплер на трехмерную сферу [8] и гиперболоид [9].

При целочисленных значениях s задача МИК-Кеплер описывает относительное движение двух дираковских дионов (заряженных магнитных монополей). Для этого надо положить

$$s = \frac{eG - Qg}{\hbar c}, \qquad \gamma = eQ + gG, \tag{1.3}$$

где (e, g) и (Q, G) есть электрические и магнитные заряды соответственно первого и второго дионов. Параметр μ играет роль приведенной массы, а вектор $\mathbf{r}$ определяет положение второго диона относительно первого [1]. При полуцелых s предполагается также наличие магнитного поля соленоида, наделяющего систему спином $1/2$ (ср. с [4]). Отметим, что система МИК-Кеплер описывает также относительное движение как дираковских дионов, так и двух удаленных монополей/дионов Богомольного–Прасада–Зоммерфельда (БПЗ)[1].

[1] Система, описывающая относительное движение удаленных БПЗ-дионов [10], задается гамильтонианом

$$\mathcal{H}_{\mathrm{BPS}} = \frac{1}{4\mu}\left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)^{-3/2}(i\boldsymbol{\nabla} + s\mathbf{A})\left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)^{1/2}(i\boldsymbol{\nabla} + s\mathbf{A}) + \frac{eg}{r},$$

где e обозначают относительный электрический заряд БПЗ-монополей. Легко видеть, что уравнение Шредингера этого гамильтониана немедленно сводится к уравнению Шредингера задачи МИК-Кеплер. Наличие в упомянутой системе кулоновской симметрии является хорошо известным фактом; ее эквивалентность задаче МИК-Кеплер была замечена, видимо, лишь в работе [11]

Волновая функция основного состояния задачи МИК-Кеплер имеет вид

$$\psi_m\big(\mathbf{r};|s|\big) = \mathrm{const}\, r^{|s|} e^{-r/a(|s|+1)} \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{|s+m|} \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{|s-m|} e^{im\varphi}, \tag{1.4}$$

где $m = -|s|, -|s|+1, \ldots, |s|-1, |s|$. Как видим, оно вырождено по квантовому числу m и не является сферически-симметричным. Система даже в основном состоянии имеет отличный от нуля дипольный момент, и в присутствии внешнего электрического поля возможен линейный эффект Штарка . Радиальная функция основного уровня имеет при $r = 0$ узел. Поэтому имеет смысл провести более аккуратное исследование поведения связанной системы МИК-Кеплер во внешнем однородном электрическом поле с целью исследования эффекта Штарка и нахождения дипольного момента системы. Изучение этих вопросов и является целью представляемой работы.

Для простоты мы рассмотрим частный случай движения заряда в поле дираковского диона – систему, наиболее близкую атому водорода. Иными словами, мы полагаем

$$G = 0, \tag{1.5}$$

так что добавка к гамильтониану МИК-Кеплера (1.1), отвечающая за взаимодействие системы заряд–дион с внешним постоянным электрическим полем, имеет тот же вид, что и в случае атома водорода:

$$\mathcal{H}_S = e\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{r}. \tag{1.6}$$

Работа построена следующим образом. В разделе 2 мы приводим волновые функции связанной системы МИК-Кеплер в сферических и параболических координатах. В разделе 3 исследуется поведение связанной системы заряд–дион во внешнем постоянном однородном электрическом поле. Подтверждается предположение о наличии в системе линейного эффекта Штарка, вычисляется ее дипольный момент. Показывается, что внешнее электрическое поле полностью снимает вырождение по азимутальному квантовому числу. В заключении обсуждаются полученные результаты и их возможные обобщения.

2. ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ И СПЕКТР

Рассмотрим спектральную задачу, описывающую систему МИК-Кеплер с энергией $E^{(0)}$, вращательным моментом j и x_3-компонентой вращательного момента m:

$$\mathcal{H}_0\psi = E^{(0)}\psi, \qquad \mathbf{J}^2\psi = \hbar^2 j(j+1)\psi, \qquad J_3\psi = \hbar m\psi, \tag{2.1}$$

где $\mathcal{H}_0$ и $\mathbf{J}$ определяются выражениями (1.1) и (1.2) с векторным потенциалом монополя Дирака с осью сингулярности, направленной вдоль положительной полуоси:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{r(r-x_3)}(x_2, -x_1, 0).$$

Решение этой системы имеет вид

$$\psi_{njm}(\mathbf{r};s) = \left(\frac{2j+1}{8\pi^2}\right)^{1/2} R_{nj}\left(\frac{r}{a}\right) d^j_{ms}(\theta) e^{im\varphi}, \tag{2.2}$$

где d^j_{ms} есть d-функция Вигнера [12], а $R_{nj}(r/a)$ определяется выражением

$$R_{nj}(r) = \frac{2^{j+1}}{n^{j+2}(2j+1)!}\sqrt{\frac{(n+j)!}{(n-j-1)!}}\, r^j e^{-r/n} F\left(j-n+1; 2j+2; \frac{2r}{n}\right). \tag{2.3}$$

Здесь $a = \hbar^2/\mu e^2$ – боровский радиус, а $F(a;c;x)$ – вырожденная гипергеометрическая функция. Спектр системы определяется условиями

$$E^{(0)}_n = -\frac{\mu\gamma^2}{2\hbar^2 n^2}, \qquad n = |s|+1, |s|+2, \ldots, \tag{2.4}$$
$$j = |s|, |s|+1, \ldots, n-1; \qquad m = -j, -j+1, \ldots, j-1, j.$$

Квантовые числа j, m характеризуют полный момент системы и его проекцию на ось x_3. При целом s система имеет целый спин, а при полуцелом – полуцелый. При $s = 0$ она переходит в водородоподобную.

При тождественном преобразовании $\varphi \to \varphi + 2\pi$ волновая функция системы однозначна при целом s и меняет знак при полуцелом s. Во втором случае неоднозначность волновой функции можно истолковать как присутствие магнитного поля бесконечно тонкого соленоида (направленного вдоль оси x_3), порождающего в системе спин $1/2$ (ср. с [4]). В основном состоянии ($n = 1$) имеем $j = |s|$, так что волновая функция принимает вид (1.4).

Теперь рассмотрим систему МИК-Кеплер в параболическом базисе. В параболических координатах $\xi, \eta \in [0, \infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, которые определяются формулами

$$x_1 + ix_2 = \sqrt{\xi\eta}\, e^{i\varphi}, \qquad x_3 = \frac{1}{2}(\xi - \eta), \tag{2.5}$$

дифференциальные элементы длины и объема имеют вид

$$dl^2 = \frac{\xi+\eta}{4}\left(\frac{d\xi^2}{\xi} + \frac{d\eta^2}{\eta}\right) + \xi\eta\, d\varphi^2, \qquad dV = \frac{1}{4}(\xi+\eta)\, d\xi\, d\eta\, d\varphi, \tag{2.6}$$

а оператор Лапласа выглядит следующим образом:

$$\Delta = \frac{4}{\xi+\eta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\right] + \frac{1}{\xi\eta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \tag{2.7}$$

После подстановки

$$\psi(\xi,\eta,\varphi) = \Phi_1(\xi)\Phi_2(\eta)\frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \tag{2.8}$$

переменные в уравнении Шредингера разделяются, и мы приходим к следующей системе уравнений:

$$\frac{d}{d\xi}\left(\xi\frac{d\Phi_1}{d\xi}\right)+\left[\frac{\mu E^{(0)}}{2\hbar^2}\xi-\frac{(m-s)^2}{4\xi}+\frac{\mu}{2\hbar}\beta+\frac{1}{2a}\right]\Phi_1=0, \tag{2.9}$$

$$\frac{d}{d\eta}\left(\eta\frac{d\Phi_2}{d\eta}\right)+\left[\frac{\mu E^{(0)}}{2\hbar^2}\eta-\frac{(m+s)^2}{4\eta}-\frac{\mu}{2\hbar}\beta+\frac{1}{2a}\right]\Phi_2=0, \tag{2.10}$$

где β – постоянная разделения, являющаяся собственным значением x_3-компоненты вектора Рунге–Ленца $\mathbf{I}$.

При $s=0$ эти уравнения совпадают с уравнениями для атома водорода в параболических координатах [13]. Отсюда имеем

$$\psi_{n_1 n_2 m s}(\xi,\eta,\varphi)=\frac{1}{n^2 a^{3/2}}\Phi_{n_1,m-s}(\xi)\Phi_{n_2,m+s}(\eta)\frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{\pi}}, \tag{2.11}$$

где

$$\Phi_{pq}(x)=\frac{1}{|q|!}\sqrt{\frac{(p+|q|)!}{p!}}\,e^{-x/(2an)}\left(\frac{x}{an}\right)^{|q|/2}F\left(-p;|q|+1;\frac{x}{an}\right).$$

Здесь n_1 и n_2 – неотрицательные целые числа:

$$n_1=-\frac{|m-s|+1}{2}+\frac{\mu}{2\kappa\hbar}\beta+\frac{1}{2a\kappa},\qquad n_2=-\frac{|m+s|+1}{2}-\frac{\mu}{2\kappa\hbar}\beta+\frac{1}{2a\kappa},$$

где $\kappa=\sqrt{-2\mu E}\,/\hbar$. Из последних соотношений с учетом (2.4) получим, что параболические квантовые числа n_1 и n_2 связаны с главным квантовым числом n следующим образом:

$$n=n_1+n_2+\frac{|m-s|+|m+s|}{2}+1. \tag{2.12}$$

Таким образом, мы решили спектральную задачу

$$\mathcal{H}_0\psi=E^{(0)}\psi,\qquad I_3\psi=\hbar^2\beta\psi,\qquad J_3\psi=\hbar m\psi, \tag{2.13}$$

где $\mathcal{H}_0$, I_3, J_3 определяются выражениями (1.1) и (1.2).

3. ЭФФЕКТ ШТАРКА

Гамильтониан системы МИК-Кеплер во внешнем постоянном однородном поле имеет вид

$$\mathcal{H}=\frac{\hbar^2}{2\mu}(i\boldsymbol{\nabla}+s\mathbf{A})^2+\frac{\hbar^2 s^2}{2\mu r^2}-\frac{\gamma}{r}+|e|\varepsilon z. \tag{3.1}$$

Мы считаем, что электрическое поле ε направлено в положительном, а действующая на электрон сила – в отрицательном направлении оси x_3. Поскольку гамильтониан (3.1) обладает аксиальной симметрией, уравнение Шредингера системы заряд–дион во внешнем постоянном однородном электрическом поле удобно рассмотреть в параболических координатах. Таким образом, для вычисления матричных элементов переходов между взаимно вырожденными состояниями удобно выбрать в качестве невозмущенных волновых функций параболические волновые функции (2.11) системы МИК-Кеплер.

Нас интересуют матричные элементы переходов $n_1 n_2 m \to n_1' n_2' m'$ при фиксированном значении главного квантового числа n. Так как оператор возмущения есть $\widehat{V} = |e|\varepsilon z = |e|\varepsilon(\xi - \eta)/2$, то согласно теории возмущений поправка первого приближения к собственному значению энергии E_n (2.4) есть

$$E_n^{(1)} = \int \psi^*_{n_1 n_2 m}(\xi, \eta, \varphi) \widehat{V} \psi_{n_1 n_2 m}(\xi, \eta, \varphi)\, d\varphi. \tag{3.2}$$

С учетом (2.11) имеем

$$E_n^{(1)} = \frac{|e|\varepsilon}{4a^3 n^4}(\mathcal{I}_{n_1, m-s} I_{n_2, m+s} - I_{n_1, m-s}\mathcal{I}_{n_2, m+s}), \tag{3.3}$$

где

$$I_{pq} = \int_0^\infty \left[\Phi_{pq}(x)\right]^2 dx, \qquad \mathcal{I}_{pq} = \int_0^\infty x^2 \left[\Phi_{pq}(x)\right]^2 dx. \tag{3.4}$$

Далее мы воспользуемся формулами (см., например, [13])

$$\int_0^\infty e^{-\lambda z} z^\nu F(\alpha; \gamma; kz)\, dz = \Gamma(\nu+1)\lambda^{-\nu-1} F\left(\alpha, \nu+1; \gamma; \frac{k}{\lambda}\right) \tag{3.5}$$

и

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)}, \tag{3.6}$$

где $F(a, b; c; x)$ – гипергеометрическая функция. Отметим, что согласно [14] гипергеометрическая функция $F(a, b; c; 1)$ сходится при условии $\mathrm{Re}\, c > \mathrm{Re}\, a > 0$, $\mathrm{Re}\,(c - a - b) > 0$. В нашем случае это условие соблюдается.

В результате мы получим для интегралов I_{pq} и $\mathcal{I}_{pq}$ следующие выражения:

$$I_{pq} = an, \qquad \mathcal{I}_{pq} = 2(an)^3 \left[3p\big(p + |q| + 1\big) + \frac{|q|}{2}\big(|q| + 3\big) + 1\right]. \tag{3.7}$$

Теперь, пользуясь вычисленными интегралами, можно найти поправку первого приближения к собственному значению энергии (2.4):

$$E_n^{(1)} = \frac{3\hbar^2 |e|\varepsilon}{2\mu\gamma}\left[n\left(n_1 - n_2 + \frac{|m-s| - |m+s|}{2}\right) + \frac{ms}{3}\right]. \tag{3.8}$$

Как и в случае атома водорода, линейный по n член пропорционален x_3-компоненте вектора Рунге–Ленца. Однако имеется дополнительная линейная по m поправка, снимающая вырождение по x_3-компоненте вращательного момента.

Итак, в системе заряд–дираковский дион имеется линейный эффект Штарка, полностью снимающий вырождение по азимутальному квантовому числу m.

При фиксированном s согласно формуле (2.12) две крайние компоненты расщепившегося уровня соответствуют следующим значениям параболических квантовых чисел:

$n_1 = n - |s| - 1,\ n_2 = 0$ и $n_1 = 0,\ n_2 = n - |s| - 1$. Согласно (3.8) расстояние между этими крайними уровнями есть

$$\Delta E_n = \frac{3\hbar^2|e|\varepsilon}{\mu\gamma} n\big(n - |s| - 1\big),$$

т.е., как и в случае атома водорода, общее расщепление уровня при эффекте Штарка примерно пропорционально n^2.

Наличие линейного эффекта Штарка означает, что в невозмущенном состоянии связанная система заряд–дион обладает дипольным моментом со средним значением

$$\bar{d}_z = -\frac{3\hbar^2|e|}{2\mu\gamma}\left[n\left(n_1 - n_2 + \frac{|m-s| - |m+s|}{2}\right) + \frac{ms}{3}\right]. \tag{3.9}$$

Из выражения для среднего дипольного момента естественно следует определение оператора

$$\mathbf{d} = -\frac{3\hbar^2|e|}{2\mu\gamma}\left[n^2\mathbf{I} + \frac{s\mathbf{J}}{3}\right] = |e|\left[\frac{3\gamma}{4E^{(0)}}\mathbf{I} - \frac{\hbar^2 s}{2\mu\gamma}\mathbf{J}\right]. \tag{3.10}$$

Отметим, что все полученные нами формулы при $s = 0$ переходят в соответствующие формулы для атома водорода.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели эффект Штарка в задаче МИК-Кеплер, описывающей взаимодействие заряда с дираковским дионом. Мы нашли, что, несмотря на глубокое сходство системы заряд–дион с атомом водорода, отношение первой к эффекту Штарка качественно иное. Именно, в задаче МИК-Кеплер имеет место линейный эффект Штарка, полностью снимающий вырождение по азимутальному квантовому числу m.

Заметим, что эффект Штарка для системы заряд–дион не может быть непосредственно перенесен на систему двух дираковских дионов. Во втором случае мы должны учитывать взаимодействие внешнего поля с магнитным зарядом, т.е. в случае системы двух дираковских дионов к гамильтониану (3.1) нужно добавить возмущение внешним магнитным полем. Иными словами, эффект Штарка системы двух дираковских дионов должен быть суперпозицией эффектов Штарка и Зеемана задачи МИК-Кеплер.

Конечно же, наличие как линейного эффекта Штарка, так и ненулевого дипольного момента системы является следствием присутствия магнитного монополя. Очевидно, что качественно схожим поведением должна обладать и обсуждавшаяся во введении система двух БПЗ-дионов. При этом, преобразовывая уравнение Шредингера, отвечающее гамильтониану (3.1), в уравнение Шредингера системы двух БПЗ-дионов, мы получим систему, возмущенную нелинейным электрическим полем. Кроме того, формальное соответствие задач МИК-Кеплер и двух БПЗ-дионов предполагает зависимость константы взаимодействия второй системы как от константы взаимодействия, так и от энергии первой.

Наконец, было бы интересно провести аналогичный анализ эффекта Штарка в системе МИК-Кеплера на сфере и гиперболоиде с целью выяснения его зависимости от кривизны пространства. Еще более поучительным может быть исследование эффекта Штарка на пятимерном обобщении задачи МИК-Кеплер (так называемой задаче Янга–Кулона или $SU(2)$-Кеплер) [5] в силу наличия изоспиновых степеней свободы.

Благодарности. Авторы благодарны В. М. Тер-Антоняну за полезные обсуждения и замечания. Работа выполнена при поддержке грантов ANSEF № PS81 и INTAS № 00-00262 (А. Н.).

Список литературы

[1] *D. Zwanziger*. Phys. Rev. 1968. V. 176. P. 1480.
[2] *H. McIntosh, A. Cisneros*. J. Math. Phys. 1970. V. 11. P. 896.
[3] *T. Iwai, Y. Uwano*. J. Phys. A. 1988. V. 21. P. 4083; *A. Nersessian, V. Ter-Antonyan*. Mod. Phys. Lett. A. 1994. V. 9. P. 2431; 1995. V. 10. P. 2633.
[4] *A. Nersessian, V. Ter-Antonyan, M. M. Tsulaia*. Mod. Phys. Lett. A. 1996. V. 11. P. 1605; *А. Нерсесян, В. М. Тер-Антонян*. ЯФ. 1998. Т. 61. С. 1868.
[5] *T. Iwai*. J. Geom. Phys. 1990. V. 7. P. 507; *Л. Г. Мардоян, А. Н. Сисакян, В. М. Тер-Антонян*. ЯФ. 1998. Т. 61. С. 1859; *L. G. Mardoyan, A. N. Sissakian, V. M. Ter-Antonyan*. Mod. Phys. Lett. A. 1999. V. 14. P. 1303.
[6] *C. N. Yang*. J. Math. Phys. 1978. V. 19. P. 320.
[7] *L. G. Mardoyan, A. N. Sissakian, V. M. Ter-Antonyan*. Int. J. Mod. Phys. A. 1997. V. 12. P. 237; *Л. Г. Мардоян, А. Н. Сисакян, В. М. Тер-Антонян*. ТМФ. 2000. Т. 123. С. 44; *Л. Г. Мардоян*. ЯФ. 2002. Т. 65. С. 1006.
[8] *V. V. Gritsev, Yu. A. Kurochkin, V. S. Otchik*. J. Phys. A. 2000. V. 33. P. 4903.
[9] *A. Nersessian, G. Pogosyan*. Phys. Rev. A. 2001. V. 63. P. 020103(R).
[10] *G. W. Gibbons, N. S. Manton*. Nucl. Phys. B. 1986. V. 274. P. 183.
[11] *S. Bellucci, A. Nersessian*. Phys. Rev. D. 2003. V. 67. P. 065013.
[12] *Д. А. Варшалович, А. Н. Москалев, В. А. Херсонский*. Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975.
[13] *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*. Квантовая механика. М.: Наука, 1974.
[14] *Г. Бейтман, А. Эрдейи*. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1965.

Поступила в редакцию 17.VI.2003 г.