А. А. Арутюнов, Категорный подход к исследованию дифференцирований в групповых алгебрах, *Вестник российских университетов. Математика*, 2023, том 28, выпуск 142, 125–136

DOI: 10.20310/2686-9667-2023-28-142-125-136

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 28, № 142 2023

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-125-136
УДК 517.28+512.552+512.548.4

Категорный подход к исследованию дифференцирований в групповых алгебрах

Андроник Арамович АРУТЮНОВ
ФГБУН «Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова» Российской академии наук
117997, Российская Федерация, г. Москва, ул. Профсоюзная, 65
ФГАОУ ВО «Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
141701, Российская Федерация, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский переулок, 9

Аннотация. В работе представлен обзор результатов, посвященных описанию семейств операторов, подчиняющихся некоторым индуктивным тождествам (например правилу Лейбница — случай дифференцирований, дифференцирования Фокса, а также (σ,τ)-дифференцирований) как характеров на подходящем группоиде. В первую очередь дается реализация данной конструкции для дифференцирований в групповых алгебрах и дифференцирований Фокса, как характеров на группоиде действия. Также демонстрируется, как данная конструкция реализуется для дифференцирований на алгебрах, порожденных мальцевскими полугруппами, для случая дифференцирований со значениями в конечных кольцах, а также для $(\sigma,\tau)-$ дифференцирований.

Ключевые слова: дифференцирования, производная Фокса, операторная алгебра, тождество, группоиды

Благодарности: Работа выполнена в Институте проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 20-11-20131, https://rscf.ru/project/20-11-20131/).

Для цитирования: *Арутюнов А.А.* Категорный подход к исследованию дифференцирований в групповых алгебрах // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 142. С. 125–136. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-125-136

SCIENTIFIC ARTICLES

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-125-136

A categorical approach to the study of derivations in group algebras

Andronick A. ARUTYUNOV
V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS
65 Profsoyuznaya St., Moscow 117997, Russian Federation
Moscow Institute of Physics and Technology
9 Inststitutskii Per., Dolgoprudny 141700, Moscow Reg, Russian Federation

Abstract. We present a review of the results devoted to describing families of operators obeying some inductive identities (e. g. Leibniz's rule — the case of derivations, Fox derivation, and (σ, τ)-derivations) as characters on a suitable groupoid. We first give an implementation of this construction for derivations in group algebras and Fox derivations as characters on an action groupoid. It is also demonstrated how this construction can be realized for derivations on algebras generated by Maltsev semigroups, for the case of derivations with values in finite rings, and for $(\sigma, \tau)-$ derivations.

Keywords: derivation, Fox derivative, operator algebra, identity, groupoid

Acknowledgements: The work was carried out at the V. A. Trapeznikov Institute for Control Problems of the Russian Academy of Sciences with the support of a grant from the Russian Science Foundation (project no. 20-11-20131, https://rscf.ru/en/project/20-11-20131/).

Mathematics Subject Classification: 16W25, 47B47, 46L10, 16S34.

For citation: Arutyunov A.A. A categorical approach to the study of derivations in group algebras. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:142 (2023), 125–136. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-125-136
(In Russian, Abstr. in Engl.)

В данной работе предлагается концепция категорного подхода к исследованию дифференцирований в различных некоммутативных алгебрах, основанный на идее, предложенной в [1, 2]. Ниже мы опишем сам метод и продемонстрируем на нескольких примерах, как данный метод работает для различных вариантов дифференцирований в групповых и некоторых других ассоциативных алгебрах.

Сама задача изучения дифференцирований связана с проблемой Джонсона о тривиальности внешних дифференцирований в алгебре $L_1(G)$ (см. библиографию к [1]). При изучении дифференцирований в алгебрах без топологической структуры дифференциальное исчисление Фокса возникло (см. [3] и другие работы Фокса) как важный инструмент изучения теории узлов. Классические ассоциативные дифференцирования в таком алгебраическом смысле начали изучать независимо, они нашли свои приложения например в криптографии. Более подробно об истории исследований дифференцирований см. [4].

Важным мотивирующим примером является единая конструкция для классических дифференцирований, порожденных ассоциативной структурой, и для дифференциального исчисления в смысле Фокса.

Суть метода состоит в описании оператора дифференцирования как характера на некоторой категории (чаще всего группоиде, связанном со структурой групповой алгебры). Конкретно, дифференцирования (т. е. линейный оператор, удовлетворяющий правилу Лейбница $d(uv) = d(u)v + ud(v)$, либо его аналогу) отождествляются с характерами на группоиде присоединенного действия. Под характером при этом подразумевается отображение $\chi : \mathbf{Hom}\,(\Gamma) \to \mathbb{C}$, которое удовлетворяет для пары компонируемых морфизмов ψ, φ свойству

$$\chi(\psi \circ \varphi) = \chi(\psi) + \chi(\varphi).$$

В случае алгебр без оснащения топологической структурой, дифференцирования взаимно однозначно отождествляются с т. н. локально-финитными характерами на группоиде присоединенного действия. При этом удобно работать с идеалом квазивнутренних дифференцирований (неформально говоря, это дифференцирования, которые представимы в виде бесконечной суммы внутренних) и возникающей фактор алгеброй всех дифференцирований по квазивнутренним — квазивнешним дифференцированиям (эта конструкция была предложена в [5]).

Структура алгебр внешних и квазивнешних дифференцирований зависит от строения классов сопряженных элементов, от структур централизаторов. Эта связь ожидаема в контексте результатов по описанию первых когомологий Хохшильда (см. [6] и работы [7,8], в последних также изложена более подробная история вопроса). При описании структуры возникают и другие инварианты группы, в частности изученный в свое время Столлингсом инвариант — число концов группы.

Развитие предлагаемого подхода находит разные приложения: алгебры, порожденные мальцевскими полугруппами, (σ, τ)-дифференцирования, дифференцирования над групповыми алгебрами с коэффициентами в конечных полях (последний пример чрезвычайно интересен с точки зрения приложений (см., например, [9])).

Если оснастить групповую алгебру структурой нормированного пространства, то задача приводит к дифференцированиям со значениями в свободных бимодулях над $\mathbb{C}[G]$. Примечательно, что в последнем случае удается получить достаточно общий результат о тривиальности алгебры квазивнешних дифференцирований (подробнее см. в [10]).

1. Группоид действия и линейные операторы

Пусть $\lambda : G\times G \to G$ — действие группы на себе. С его помощью определим группоид действия Γ_λ. В качестве объектов возьмем элементы группы G, т. е. $\mathbf{Obj}(\Gamma_\lambda) := G$. В качестве морфизмов возьмем пары из множества $G\times G$, т. е. $\mathbf{Hom}\,(\Gamma_\lambda) := G\times G$. Началом морфизма $\phi = (m, g)$ положим объект $s(\phi) := m$, а в качестве конца $t(\phi) := g(m)$. Иными словами,

$$\mathbf{Hom}\,(a, b) = \{(a, g) |\, g(a) = b\}.$$

Эндоморфизмами (иногда будем называть их «петлями») назовем морфизмы, у которых совпадает начало и конец. Группа эндоморфизмов вокруг объекта m изоморфна стабилизатору элемента m,

$$\mathbf{Hom}\,(m, m) \cong Stab(m).$$

Для пары морфизмов $\varphi = (m, g_1), \psi = (m', g_2)$ таких, что $m' = g_1(m)$, определим композицию $\psi\circ\varphi$ по формуле

$$\psi\circ\varphi := (m, g_2g_1).$$

Ассоциативность композиции следует из ассоциативности умножения в группе. Нейтральный морфизм вокруг объекта m имеет вид (m, e), где e — нейтральный элемент в группе G. Морфизм обратный к (m, a) имеет вид $(a(m), a^{-1})$. Таким образом, Γ_λ действительно является группоидом.

Для элемента $u \in G$ будем обозначать через $[u]$ множество элементов орбиты относительно действия λ. Множество орбит будем обозначать G^λ. Определим субгруппоид $\Gamma_{[u]}$ следующим образом

$$\mathbf{Obj}(\Gamma_{[u]}) = [u],\ \ \mathbf{Hom}\,(\Gamma_{[u]}) = \mathbf{Hom}\,(a, x),\ \ \ a \in [u],\ \ x \in G.$$

Группоид Γ_λ представим в виде несвязного объединения субгруппоидов $\Gamma_{[u]}$, т. е.

$$\Gamma_\lambda = \coprod_{[u]\in G^\lambda} \Gamma_{[u]}.$$

Зададим на группоиде Γ_λ пространство характеров, аналогичное изученному ранее в работах [2, 5, 11]. Пусть имеем некоторое кольцо $\mathfrak{K}$. Тогда

О п р е д е л е н и е 1.1. Будем называть функцию $\chi : \mathbf{Hom}\,(\Gamma_\lambda) \to \mathfrak{K}$ характером, если для любой пары компонируемых морфизмов ϕ, ψ выполняется

$$\chi(\psi\circ\phi) = \chi(\psi) + \chi(\phi). \tag{1.1}$$

Формулу (1.1) удобно переписать в эквивалентном виде

$$\chi(m, g_2g_1) = \chi(m, g_1) + \chi(g_1(m), g_2). \tag{1.2}$$

Нас будут интересовать в основном локально финитные характеры.

О п р е д е л е н и е 1.2. Назовем характер χ локально финитным, если для каждого $g \in G$ множество морфизмов $\psi \in \mathbf{Hom}\,(*, g)$ таких, что $\chi(\psi) \neq 0$, конечно. Пространство локально финитных характеров со значениями в кольце $\mathfrak{K}$ будем обозначать $X(\Gamma_\lambda, \mathfrak{K})$. Если это не вызывает разночтений, то будем писать коротко $X(\Gamma)$.

Обычно мы будем работать со стандартными групповыми алгебрами $\mathbb{C}[G]$, т. е. финитными линейными комбинациями $\sum_{g\in G} x(g)g$, где $x(\cdot): G \to \mathbb{C}$. Однако, также у нас будут встречаться и алгебры над другими кольцами. А именно, пусть $\mathfrak{K}$ — кольцо, обозначим через $\mathfrak{K}[G]$ финитные линейные комбинации $\sum_{g\in G} x(g)g$, где функция $x(\cdot): G \to \mathfrak{K}$ со значениями в кольце $\mathfrak{K}$.

2. Характеры и порождаемые тождества

Пусть $\lambda : G \times G \to G$ — свободное и транзитивное левое действие группы на себе. Когда речь идет о фиксированном действии, будем для краткости писать $\lambda(g,h) =: g(h)$. Продолжим действие λ по линейности до действия $\lambda : G \times \mathfrak{K}[G] \to \mathfrak{K}[G]$ на групповой алгебре. А именно, если $x(\cdot): G \to \mathfrak{K}$ — финитная функция, определим действие элемента g по формуле

$$g\left(\sum_{h\in G} x(h)h\right) := \sum_{h\in G} x(h)gh.$$

Рассмотрим семейство операторов, действующих в групповой алгебре $\mathfrak{K}[G]$, порождаемое характерами на группоиде Γ_λ.

О п р е д е л е н и е 2.1. Обозначим через $\mathcal{B}(\mathfrak{K}[G],\lambda)$ пространство операторов, действующих в $\mathfrak{K}[G]$ таких, что для каждого $\alpha \in \mathcal{B}(\mathfrak{K}[G],\lambda)$ выполнено

$$\alpha(uv) = u\alpha(v) + uv \cdot v^{-1}\left(u^{-1} \cdot \alpha(u)\right). \tag{2.1}$$

Для краткости будем писать $\mathcal{B}$ вместо $\mathcal{B}(\mathfrak{K}[G],\lambda)$.

Лемма 2.1. *Пространство операторов $\mathcal{B}$ канонически изоморфно $X(\Gamma_\lambda)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оператор α лежит в $\mathcal{B}$, если (и только если) тождество (2.1) выполнено на всех образующих. Запишем оператор α для $g \in G$ в виде

$$\alpha(g) = \sum_{h\in G} \chi(h,g)gh. \tag{2.2}$$

Тождество (2.1) для образующих $g_{1,2} \in G$ дает следующее

$$\alpha(g_2g_1) = \sum_{h\in G} \chi(h,g_2g_1)g_2g_1h = g_2\sum_{h\in G}(\chi(h,g_1)g_1h + g_1\chi(g_1(h),g_2)h) =$$
$$= g_2\alpha(g_1) + g_2g_1\sum_{h\in G}\chi(h,g_2)g_1^{-1}(h) = g_2\alpha(g_1) + g_2g_1g_1^{-1}(g_2^{-1}\alpha(g_2)).$$

Здесь мы воспользовались «перенумерацией» элементов группы, использовав точность действия: если $g_1(h) = m$, то $h = g_1^{-1}(m)$, а также транзитивностью, поставив знак суммирования по всей группе.

Поскольку в выкладке все переходы эквивалентны, получаем, что из выполнения тождества (2.1) следует, что для коэффициентов, определенных формулой (2.2), будет выполняться свойство (1.2), а значит рассматриваемое отображение является характером. □

Семейство операторов $\mathcal{B}$ обобщает понятия классического дифференцирования и дифференциальное исчисление Фокса.

Теорема 2.1.

- *Если имеем действие левыми сдвигами* tr_-, *то тождество* (2.1) *принимает вид*
$$\alpha(uv) = \alpha(u) + u\alpha(v).$$
- *Если* λ *— действие сопряжениями, то тождество* (2.1) *определяет дифференцирования, т. е. задает правило Лейбница*
$$\alpha(uv) = u\alpha(v) + v\alpha(u).$$

Второе тождество — «классическое» правило Лейбница, определяющее «классическое» дифференцирование. Первое же тождество $\alpha(u)+u\alpha(v)$ — соответствует тождеству, которому удовлетворяют т. н. производные Фокса (Fox derivative), что следует из определения в [12, с. 96].

Само понятие дифференцирования Фокса было введено в оригинальной работе Р. Фоксом (см. [3]). В дальнейшем дифференциальное исчисление Фокса применялось к различным задачам, в частности к теории узлов (см. [12]).

С учетом сказанного получаем

Следствие 2.1.

1. *Пространство дифференцирований Фокса канонически изоморфно пространству* $\mathcal{B}(\mathbf{Z}[G], tr_-)$;
2. *Пространство дифференцирований в* $\mathbb{C}[G]$ *канонически изоморфно пространству* $\mathcal{B}(\mathbb{C}[G], \lambda)$, *где* λ *— действие сопряжениями.*

Отметим, что способ задания семейства операторов при помощи формулы (2.2) не единственен. Например, можно рассмотреть операторы, задаваемые формулой
$$\alpha(g) = \sum_{h\in G} \chi(h, g)h.$$
При этом рассуждения в духе леммы 2.1 будут приводить к другим индуктивным тождествам вида
$$\alpha(uv) = f(\alpha(u), v) + g(u, \alpha(v)) \tag{2.3}$$
для некоторых билинейных функций f, g. Одним из возникающих таким образом семейств являются (σ,τ)-дифференцирования, которые будут рассмотрены ниже. Отметим, что возникающие таким образом семейства операторов не обязаны быть алгебрами. Тем не менее, при решении задачи их описания естественна следующая схема: рассмотрение операторов, порождаемых тривиальными на петлях характерами, затем рассмотрение фактор пространства по ним. Таким образом, возникает аналог понятия внешних и внутренних дифференцирований, которые, конечно, не обязаны образовывать идеал (поскольку операторы не образуют алгебру). Однако, как показывает предлагаемый ниже пример дифференцирований со значениями в конечном кольце и дифференцирований в алгебре, порождаемой мальцевской полугруппой, если соответствующее семейство операторов все же образует алгебру, то операторы, порождаемые тривиальными на петлях характерами, будут образовывать идеал.

3. Описание алгебры дифференцирований

Далее мы сосредоточимся на изучении «классических» дифференцирований, т. е. удовлетворяющих правилу Лейбница. Зафиксируем обозначения.

Определение 3.1. Далее через $Der(\mathbb{C}[G])$ мы будем обозначать алгебру линейных операторов $d:\mathbb{C}[G]\to\mathbb{C}[G]$, удовлетворяющих правилу Лейбница

$$d(uv)=d(u)v+ud(v),\forall u,v\in\mathbb{C}[G].$$

Далее мы будем работать группоидом, порождаемым действием группы на себе при помощи сопряжений и обозначим его для краткости Γ.

Пусть d — дифференцирование. В силу линейности, для элемента групповой алгебры $u=\sum\limits_{g\in G}\lambda^g g$ найдутся коэффициенты $d_h^g g,h\in G$ такие, что справедлива формула

$$d(u)=\sum_{g\in G}\left(\sum_{h\in G}d_h^g\lambda^h\right)g. \tag{3.1}$$

- Обозначим через $X(\Gamma)$ пространство всех локально финитных характеров на группоиде Γ.
- Подпространство в $X(\Gamma)$ локально финитных характеров тривиальных на петлях обозначим через $X_0(\Gamma)$, т. е.

$$X_0(\Gamma)=\{\chi\in X(\Gamma)\,|\,\forall\varphi\in\mathbf{Hom}\,(a,a):\ \chi(\varphi)=0\}.$$

- Через $X(\Gamma_{[u]})$ и $X_0(\Gamma_{[u]})$ мы будем обозначать подпространства общего пространства характеров, с носителями, локализованными в соответствующем субгруппоиде $supp\chi\subset\Gamma_{[u]}$.

Определение 3.2. Назовем дифференцирования, задаваемые формулой (3.1) при помощи характеров из пространства $X_0(\Gamma)$, квазивнутренними дифференцированиями $QInnDer(\mathbb{C}[G])$.

Понятие квазивнутреннего дифференцирования было введено в [5] (раздел 3.3, и названы слабыми дифференцированиями). Несложно убедиться, что всякое внутреннее дифференцирование является квазивнутренним. Обратное — вообще говоря неверно. Соответствующим примером является свободная группа (см. пример в [2]) или группа Гейзенберга и вообще нилпотентные группы ранга 2 (см. [13]).

При этом квазивнутренние дифференцирования образуют идеал в алгебре $Der(\mathbb{C}[G])$.

Теорема 3.1. [5, теорема 3.1] *Пространство $QInnDer(\mathbb{C}[G])$ квазивнутренних дифференцирований образует идеал в алгебре всех дифференцирований.*

Эта теорема делает корректным следующее определение.

Определение 3.3. Фактор алгебру

$$QOutDer(\mathbb{C}[G]):=Der(\mathbb{C}[G])/QInnDer(\mathbb{C}[G])$$

назовем алгеброй квазивнешних дифференцирований.

Через $\langle\langle H\rangle\rangle$ для подгруппы H в группе G обозначим нормальное замыкание подгруппы H. Чтобы определить гомоморфизм $\tau_{[u]} : \langle\langle Z(u)\rangle\rangle \to (\mathbb{C}, +)$, заметим, что каждый элемент $h \in \langle\langle Z(u)\rangle\rangle$ имеет вид

$$h = t_1 z_1 t_1^{-1} \cdot \cdots \cdot t_k z_k t_k^{-1},$$

где $t_i \in G, z_i \in Z(u)$. Зададим гомоморфизм следующим образом

$$\tau_{[u]}(h) := \tau_u^*(z_1) + \cdots + \tau_u^*(z_k).$$

Определение 3.4. Обозначим через $\mathcal{Q}([u])$ пространство всех гомоморфизмов $\tau_{[u]} : \langle\langle Z(u)\rangle\rangle \to (\mathbb{C}, +)$.

Неформально говоря, пространство $\mathcal{Q}$ — это те гомоморфизмы на централизаторе, которые порождают некоторый локально финитный характер. Разумеется, «порождают» с точностью до характера тривиального на петлях. При этом далеко не каждый гомоморфизм централизатора породит некоторый локально финитный характер. К примеру, в нильпотентных группах ранга 2 (см. [13, теорема 5]) никакой характер, нетривиальный на петлях над бесконечным субгруппоидом, не может быть локально финитным. Наиболее естественным примером такой группы является группа Гейзенберга.

Теорема 3.2. [14, Theorem 3.6] *Для конечно порожденных групп G следующие пространства канонически изоморфны:*

$$QOutDer(\mathbb{C}[G]) \cong \bigoplus_{[u]\in G^G} \mathcal{Q}([u]).$$

Если, к тому же, $e(G) = 1$, то имеет место также канонический изоморфизм

$$OutDer(\mathbb{C}[G]) \cong \bigoplus_{[u]\in G^G} \mathcal{Q}([u]).$$

Следствие 3.1. [14, Corollary 3.7] *Для любой конечно порожденной группы справедлив канонический изоморфизм*

$$OutDer(\mathbb{C}[G]) \cong \bigoplus_{[u]\in G^G} \left(X(\Gamma_{[u]})/X_0(\Gamma_{[u]}) \times X_0(\Gamma_{[u]})/X_0^{loc}(\Gamma_{[u]})\right).$$

4. Обобщения для других алгебр

FC-группы и характеры со значениями в конечных кольцах

Для приложений представляет интерес случай групповых алгебр с коэффициентами в конечных кольцах для конечных групп. На самом деле с точки зрения нашего подхода нет разницы между конечными группами и группами, в которых все классы сопряженности конечны (FC-группы, см. [15]). В частности, теорема 3.2 и следствие 3.1 приобретают следующий вид.

Теорема 4.1. [11, теорема 3.2] *Пусть G — конечно порожденная FC-группа, A — унитальное коммутативное кольцо, тогда*

$$Der(A[G]) \cong Inn(A[G]) \oplus \bigoplus_{[u]\in G^G} \mathbf{Hom}_{Ab}(Z(u), A).$$

Здесь (см. [11, определение 2.12]) $\mathbf{Hom}_{Ab}$ — множество аддитивных гомоморфизмов из централизатора $Z(u)$ фиксированного элемента $u \in G$ в кольцо A.

Если кольцо A конечно, имеет место следующее разложение

$$A \cong \mathbf{Z}_{p_1^{i_1}} \oplus ... \oplus \mathbf{Z}_{p_n^{i_n}}.$$

Если и группа G конечна, то фактор группа по коммутанту конечна и

$$G/[G,G] \cong \mathbf{Z}_{q_1^{j_1}} \oplus ... \oplus \mathbf{Z}_{q_m^{j_m}}$$

есть примарное разложение группы $G/[G,G]$.

Теорема 4.2. [11, теорема 4.3] *Для конечной группы G и конечного кольца A все дифференцирования $Der(A[G])$ будут внутренними ($Der(A[G]) = Inn(A[G])$), если и только если $\{p_1,...,p_n\} \cap \{q_1,...,q_m\} = \emptyset$.*

В частности, для приложений интересны случаи групповых алгебр $\mathbf{Z}_4[S_3]$ и $\mathcal{F}_{2^m}D_{2n}$. О важности данных результатов см. [9].

Таким образом, в случае FC-групп (в частности конечных) и групповых алгебр с коэффициентами в конечных кольцах алгебра внешних дифференцирований вообще говоря не тривиальна. При этом внутренние и квазивнутренние дифференцирования совпадают.

Мальцевские полугруппы

Другим примером использования нашей конструкции являются алгебры (с комплексными коэффициентами) над полугруппами. Возможность получения всеобъемлющих результатов для произвольных полугрупп представляется нам малореальной, однако в [16] для случая мальцевской полугруппы S получены следующие результаты.

Теорема 4.3. [16, теорема 2.2] *Пространство $QInnDer(S)$ квазивнутренних дифференцирований образует идеал в алгебре $Der(S)$.*

Отметим, что здесь вместо группоида выступает категория (вкладываемая в группоид группы, порождаемой полугруппой S), и характеры определяются соответственным образом на этой категории (см. [16, раздел 2.3]), как и квазивнутренние дифференцирования понимаются как дифференцирования, задаваемые характерами, тривиальными на эндоморфизмах.

Характерно, что алгебра дифференцирований такой полугрупповой алгебры вкладывается в алгебру дифференцирований соответствующей групповой алгебры ([16, теорема 2.3]).

Случай (σ, τ)-дифференцирований

Еще одним важным примером реализации предлагаемой нами категорной конструкции являются т. н. (σ, τ)-дифференцирования.

Пусть $\mathcal{A}$ — ассоциативная алгебра над полем $\mathcal{K}$ и (σ, τ) — пара $\mathcal{K}$-линейных эндоморфизмов $\mathcal{A}$.

Определение 4.1. Будем называть (σ, τ)-дифференцированием все такие $\mathcal{K}$-линейные отображения $D : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, что для всех $a, b \in \mathcal{A}$ справедливо (σ, τ)-обобщенное тождество Лейбница

$$D(ab) = D(a)\tau(b) + \sigma(a)D(b). \tag{4.1}$$

Отметим, что это правило — частный случай формулы (2.3).

Множество всех (σ,τ)-дифференцирований на $\mathcal{A}$ обозначим $\mathcal{D}_{(\sigma,\tau)}(\mathcal{A})$.

Линейное отображение $D:\mathbb{C}[G]\to\mathbb{C}[G]$ для каждого базисного элемента $g\in G$ может быть записано как

$$D(g)=\sum_{h\in G}\lambda_g^h h,\qquad \lambda_g^h\in\mathbb{C}.$$

Если $D:\mathbb{C}[G]\to\mathbb{C}[G]$ — это (σ,τ)-дифференцирование, удовлетворяющее (σ,τ)-правилу Лейбница (4.1), для любых $g_1,g_2\in G$ имеем

$$D(g_2g_1)=D(g_2)\tau(g_1)+\sigma(g_2)D(g_1),$$
$$\lambda_{g_2g_1}^h=\lambda_{g_2}^{h\tau(g_1^{-1})}+\lambda_{g_1}^{\sigma(g_2^{-1})h}.$$

Теперь построим подходящий группоид (с характерами на нем мы и будем ассоциировать наши (σ,τ)-дифференцирования). Следующая конструкция была предложена в [17].

О п р е д е л е н и е 4.2. [17, с. 5] Определим

- $Obj(\Gamma)=G$
- Для объектов $a,b\in Obj(\Gamma)$ морфизмами будет множество

$$\mathbf{Hom}\,(a,b)=\big\{(u,v)\in G\times G\,|\,\sigma(v^{-1})u=a,\ u\tau(v^{-1})=b\big\}$$

- Композицию морфизмов $\varphi=(u_1,v_1)\in\mathbf{Hom}\,(a,b)$ и $\psi=(u_2,v_2)\in\mathbf{Hom}\,(b,c)$ определим как морфизм $\varphi\circ\psi\in\mathbf{Hom}\,(a,c)$ такой, что

$$\varphi\circ\psi=(u_2\tau(v_1),v_2v_1).$$

Тогда справедливо описание через характеры (σ,τ)-дифференцирований групповой алгебры. Рассмотрим отображение $\Psi:\mathcal{D}_{(\sigma,\tau)}(\mathbb{C}[G])\to X(\Gamma)$, такое, что если $D(g)=\sum\limits_{h\in G}\lambda_g^h h$, то $\Psi(D)(h,g)=\lambda_g^h$. Аналогично строится и обратное отображение Ψ^{-1},

$$\Psi^{-1}(\chi)(g)=\sum_{h\in G}\chi(h,g)h.$$

Теорема 4.4. [17, теорема 1] *Пусть G — дискретная, конечно порожденная группа, такая что $\sigma,\tau\in\boldsymbol{End}(G)$. Тогда отображение $\Psi:\mathcal{D}_{(\sigma,\tau)}(\mathbb{C}[G])\to X(\Gamma)$ — изоморфизм.*

Аналогично вводится понятие квазивнутреннего дифференцирования.

О п р е д е л е н и е 4.3. [17, определение 6] Назовем (σ,τ)-дифференцирование D квазивнутренним, если характер $\Psi(D)$ тривиален на петлях.

К сожалению, сами (σ,τ)-дифференцирования алгебру в обычном смысле не образуют, однако изучение квазивнутренних дифференцирований все равно достаточно полезно. К примеру, имеет место следующее утверждение.

Назовем группу G — (σ,τ)-FC группой, если каждый (σ,τ)-класс сопряженности $[u]_{\sigma,\tau}$ конечен.

Теорема 4.5. [17, теорема 4] *Если G — конечно порожденная (σ, τ)-FC группа, и σ, τ — эндоморфизмы группы G, то*

$$D_{(\sigma,\tau)} \cong \bigoplus_{[a]_{(\sigma,\tau)}} Z^*_{(\sigma,\tau)}(a) \bigoplus Inn(\Gamma).$$

Здесь $Z^*_{(\sigma,\tau)}(a)$ — пространство групповых характеров (σ, τ)-централизатора $Z_{(\sigma,\tau)}(a)$. В частности, справедливо следующее следствие, которое отнюдь не является самоочевидным для (σ, τ)-дифференцирований.

Следствие 4.1. [17, следствие 5] *Если G — конечная группа и $\sigma, \tau \in \boldsymbol{End}(G)$, то все (σ, τ)-дифференцирования являются внутренними.*

В завершение отметим, что предлагаемый подход также может быть применен для описания дифференцирований и других операторных пространств, удовлетворяющих индуктивным тождествам. Более того, по всей видимости пространство характеров на каждой категории отвечает такому пространству над некоторой алгеброй. Установление подобной двойственности между пространствами характеров категорий и операторных пространств не только представляет самостоятельный интерес, но и даст возможность посмотреть на пространства характеров как на некоторый аналог сопряженного пространства.

References

[1] А. А. Арутюнов, А. С. Мищенко, А. И. Штерн, “Деривации групповых алгебр”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **21**:6 (2016), 65–78; англ. пер.:A. A. Arutyunov, A. S. Mishchenko, A. I. Shtern, “Derivations of group algebras”, *Journal of Mathematical Sciences*, **248** (2020), 709–718.

[2] А. А. Арутюнов, А. С. Мищенко, “Гладкая версия проблемы Джонсона о деривациях групповых алгебр”, *Матем. сб.*, **210**:6 (2019), 3–29; англ. пер.:A. A. Arutyunov, A. S. Mishchenko, “A smooth version of Johnson’s problem on derivations of group algebras”, *Sb. Math.*, **210**:6 (2019), 756–782.

[3] R. H. Fox, “Free differential calculus. I: Derivation in the free group ring”, *The Annals of Mathematics*, **57**:3 (1953), 547–560.

[4] А. А. Арутюнов, “О дифференцированиях в групповых алгебрах и других алгебраических структурах”, *Вестник российских университетов. Математика*, **27**:140 (2022), 305–317. [A. A. Arutyunov, “On derivations in group algebras and other algebraic structures”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **27**:140 (2022), 305–317 (In Russian)].

[5] A. A. Arutyunov, A. V. Alekseev, “Complex of n-categories and derivations in group algebras”, *Topology and its Applications*, **275** (2020), 107002.

[6] D. Burghelea, “The cyclic homology of the group rings”, *Coment. Math. Helv.*, **60** (1985), 354–365.

[7] A. S. Mischenko, “Derivations of group algebras and Hochschild cohomology”, *Differential Equations on Manifolds and Mathematical Physics, Dedicated to the Memory of Boris Sternin*, Trends in Mathematics, eds. V. M. Manuilov, A. S. Mishchenko, V. E. Nazaikinskii, B.-W. Schulze, W. Zhang, Springer Nature Switzerland, Switzerland, 2022, 263–272.

[8] A. S. Mischenko, “Geometric description of the Hochschild cohomology of group algebras”, *Contemporary Mathematics*, 2021, 267–279.

[9] L. Creedon, K. Hughes, “Derivations on group algebras with coding theory applications”, *Finite Fields and Their Applications*, **56** (2019), 247–265.

[10] A. Arutyunov, *A combinatorial view on derivations in bimodules*, 2022, arXiv: abs/2208.05478.

[11] A. A. Arutyunov, L. M. Kosolapov, “Derivations of group rings for finite and FC groups”, *Finite Fields and Their Applications*, **76** (2021), 101921.

[12] R. H. Crowell, R. H. Fox, *Introduction to Knot Theory*, Graduate Texts in Mathematics, **57**, Springer, New York, 1977.

[13] А. А. Арутюнов, “Алгебра дифференцирований в некоммутативных групповых алгебрах”, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Сборник статей, Труды МИАН, **308**, МИАН, М., 2020, 28–41; англ. пер.:A. A. Arutyunov, “Derivation algebra in noncommutative group algebras”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **308** (2020), 22–34.

[14] A. Arutyunov, “Derivations in group algebras and combinatorial invariants of groups”, *European Journal of Mathematics*, **9**:39 (2023).

[15] D. Robinson, *Finintess Conditions and Generalized Solvable Groups*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 2. Folge, **62**, Springer-Verlag: Berlin, 1972.

[16] A. V. Alekseev, A. A. Arutyunov, “Derivations in semigroup algebras”, *Eurasian Mathematical Journal*, **11**:2 (2020), 9–18.

[17] A. Alekseev, A. Arutyunov, S. Silvestrov, *On* (σ,τ)*-derivations of group algebra as category characters*, 2020, arXiv: abs/2008.00390.

Информация об авторе

Арутюнов Андроник Арамович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник. Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва; доцент кафедры высшей математики. Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), г. Долгопрудный, Московская обл., Российская Федерация. E-mail: andronick.arutyunov@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6878-0993

Поступила в редакцию 19.05.2023 г.
Поступила после рецензирования 05.06.2023 г.
Принята к публикации 09.06.2023 г.

Information about the author

Andronick A. Arutyunov, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher. V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow; Associate Professor of the Higher Mathematics Department. Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Moscow Reg., Russian Federation. E-mail: andronick.arutyunov@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6878-0993

Received 19.05.2023
Reviewed 05.06.2023
Accepted for press 09.06.2023