Автоматика и телемеханика, № 1, 2015

**© 2015 г. А.М. ЦИРЛИН, д-р техн. наук (tsirlin@sarc.botik.ru)
(Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН, Переславль-Залесский)**

СЕГРЕГИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ, МОДЕЛИ И УПРАВЛЕНИЕ[1]

Рассмотрены математические модели и оптимальное управление системами, состоящими из большого числа агрегатов, взаимодействующих с однородной средой. Получены условия оптимальности. Развит структурный подход к расчету плотностей распределения времени пребывания агрегатов в системе.

1. Введение

Важный класс управляемых систем представляют собой макросистемы, состоящие из большого числа элементарных подсистем, каждая из которых индивидуально не управляема и не наблюдаема. Воздействовать на эти системы и проследить их реакцию на эти воздействия можно лишь на макроуровне, измеряя их усредненные характеристики (см. [1, 2]). Частным случаем макросистем являются системы с сегрегацией.

Сегрегированными называют системы, состоящие из большого числа агрегатов, взаимодействующих друг с другом через однородную среду, состояние которой усредненно зависит от состояния агрегатов. Примерами сегрегированных систем физико-химической природы являются процессы кристаллизации и растворения, сушки и грануляции, процессы биосинтеза, выращивания растений, рыб и животных и др. (см. [3]).

Сегрегированные модели адекватны системам социально-экономической природы, в которых множество элементарных экономических агентов (ячеек) формируют общую нормативно-законодательную и ценовую среду. Состояние среды усредненно зависит от взаимодействия с ячейками.

Математической особенностью моделей сегрегированных систем является наличие усреднения в правых частях дифференциальных уравнений, описывающих эволюцию состояния среды, а также то обстоятельство, что управляющие воздействия могут быть приложены только к среде, изменяя условия, общие для всех агрегатов. Как для всех макросистем, каждым из агрегатов в системах с сегрегацией нельзя управлять и нет возможности измерять его состояние.

2. Системы, изолированные по агрегатам

2.1. Модель системы

Обозначим через x и y векторы состояния агрегата и среды соответственно. Эволюция состояния агрегата определяется его уравнением кинетики

$$\dot{x}(t,\gamma) = f(x(t,\gamma), y(t)), \quad x(0,\gamma) = x_0(\gamma). \tag{2.1}$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 10-06-00161а).

Здесь γ — случайный параметр с плотностью распределения вероятностей $P(\gamma)$, t — время пребывания агрегатов в системе. Таким образом, состояние $x(t,\gamma)$ случайно для любого момента t. Одной из составляющих вектора γ является начальное значение вектора состояния агрегата.

Состояние среды в каждый момент времени изменяется в соответствии с уравнением

$$\dot{y} = \overline{\varphi(y, x(t,\gamma))}^{\gamma} + g(y,t) = \int \varphi(y, x(t,\gamma))P(\gamma)d\gamma + g(y,t), \; y(0) = y_0. \tag{2.2}$$

Здесь через $\overline{\varphi(y, x(t,\gamma))}^{\gamma}$ обозначено среднее по γ значение функции $\varphi(y, x(t,\gamma))$.

Если система управляема, то управляющие воздействия $u(t)$ входят только в правые части уравнений (2.2). Они примут форму

$$\dot{y} = \overline{\varphi(y,u,x)}^{\gamma} + g(y,u,t), \quad y(0) = y_0, \quad u \in V_u, \tag{2.3}$$

где множество V_u допустимых управлений определено ограничениями, наложенными на них в каждый момент времени или на интервале управления $[0,\tau]$. Первое слагаемое в правой части (2.3) характеризует кинетику взаимодействия с агрегатами, а второе — внешние воздействия на состояние среды.

2.2. Задачи управления и условия оптимальности

Запишем критерий оптимальности как:

$$y_0(T) = \int_0^T \left[\overline{\varphi_0(y,u,x)}^{\gamma} + g_0(y,u,t)\right] dt \to \max, \quad y_0(0) = 0. \tag{2.4}$$

К такой форме может быть приведен широкий класс критериев оптимальности введением соответствующих переменных.

Будем предполагать, что для любого $t \in [0,\tau]$ множество V_u замкнуто и ограничено. При получении необходимых условий оптимальности используем принцип максимума для вариационных задач со скалярным аргументом в форме [4]. Согласно предложенному в [4] формализму, каждому из условий задачи ставится в соответствие слагаемое в подынтегральном выражении R обобщенного функционала Лагранжа, а переменные задачи по определенному правилу разбиваются на две группы. По переменным первой группы функция R на оптимальном решении достигает максимума, а по переменным второй группы — стационарна.

В предположении невырожденного решения функция R (подынтегральное выражение обобщенного функционала Лагранжа) для задачи (2.1), (2.3) и (2.4) имеет вид

(2.5)

$$R = \int \{[\varphi_0(y,u,x(t,\gamma)) + \xi\varphi(y,u,x(t,\gamma))] +$$
$$+ \psi(\gamma,t)f(x(t,\gamma),y) + \dot{\psi}(\gamma,t)x(t,\gamma)\}P(\gamma)d\gamma + g_0(y,u,t) + \xi g(y,u,t) + \dot{\xi}y.$$

Здесь интеграл берется по области определения плотности распределения $P(\gamma)$. К переменным первой группы относятся управления $u(t)$, а ко второй группе — переменные, характеризующие состояния среды и агрегатов.

Если в задаче подлежат выбору параметры a, неизменные на интервале $(0, \tau)$, то интеграл S от функции R на этом интервале должен быть локально неулучшаем на множестве V_a допустимых значений параметров.

Необходимые условия оптимальности задачи (2.1), (2.2), (2.4), сформулированные через функцию R, примут форму:

$$u^*(t) = \arg\max_{u \in V_u} R(u, y^*(t), x^*(t, \gamma)), \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial R}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial x(t, \gamma)} = 0 \quad \forall \gamma. \tag{2.7}$$

Для сокращения записи введем обозначение

$$H = \overline{\varphi_0(y, u, x) + \xi \varphi(y, u, x)}^{\gamma} + g_0(y, u, t) + \xi g(y, u, t) \tag{2.8}$$

и с учетом (2.5) перепишем условия (2.6), (2.7) в форме

$$u^*(t) = \arg\max_{u \in V_u} H(y, u, x), \tag{2.9}$$

$$\dot{\xi} = -\frac{\partial}{\partial y}\left[H(y, u, x(t, \gamma)) + \overline{\psi(t, \gamma) f(x(t, \gamma), y)}^{\gamma}\right], \tag{2.10}$$

$$\dot{\psi}(\gamma, t) = -\frac{\partial[\varphi_0(y, u, x) + \xi \varphi(y, u, x) + f(x(t, \gamma), y)]}{\partial x(t, \gamma)}, \tag{2.11}$$

$$\xi(\tau) = \psi(\gamma, \tau) = 0 \quad \forall \gamma. \tag{2.12}$$

Здесь

$$\overline{\psi, f(x(t, \gamma), y)}^{\gamma} = \int \psi(\gamma, t) f(x(t, \gamma), y) P(\gamma) d\gamma. \tag{2.13}$$

3. Системы, открытые по агрегатам. Стационарный режим

В открытой системе происходит обмен с окружением не только потоками, влияющими на состояние среды, но и потоками агрегатов. Будем рассматривать только стационарный режим таких систем, в котором состояние среды и распределения случайных величин, влияющих на состояние агрегатов, не зависят от календарного времени.

3.1. Математическая модель

В статическом режиме состояние среды y постоянно и равно состоянию на выходе из системы, так как среда однородна. Состояние агрегата изменяется с его возрастом τ_i — временем, прошедшим от попадания агрегата в систему до текущего момента времени, так что

$$\frac{dx}{d\tau_i} = f(x(\gamma, \tau_i), y), \quad x(0) = x_0(\gamma). \tag{3.1}$$

В ряде случаев удается получить решение уравнений (3.1) в форме

$$x = x(\gamma, \tau_i, y), \tag{3.2}$$

что позволяет существенно упростить решение задачи оптимизации системы. Решение (3.2) называют кинетической кривой.

Возраст агрегата — случайная величина. Будем предполагать, что он не зависит от вектора γ, а его плотность распределения обозначим через $P_1(\tau_i)$. Другим случайным параметром агрегата является время пребывания в системе τ_f, его иногда называют временем жизни агрегата. Время пребывания случайно, его плотность распределения обозначим через $P_2(\tau_f)$. Далее покажем, что плотности распределения возраста и времени пребывания связаны друг с другом.

Состояние среды определяется усредненными условиями вида

$$\overline{\varphi(y, u, x(\gamma, \tau_i))}^{\gamma, \tau_i} = g(y, u), \tag{3.3}$$

где u — вектор управляющих воздействий, а черта означает усреднение по τ_i, γ в соответствии с плотностями распределения $P_1(\tau_i)$ и $P_3(\gamma)$. В частности, правая часть равенства (3.3) может быть равна $\frac{V}{g}(y - y_0)$, где V — объем системы, g — расход среды, являющийся одним из управлений.

Размерность вектор-функции φ совпадает с размерностью вектора y, функции f и φ непрерывные и непрерывно дифференцируемые по совокупности своих аргументов, как и функция, определяющая критерий оптимальности

$$\overline{\varphi_0(y, u, x(\tau_f))}^{\gamma, \tau_f} \to \max_{u \in V_u}. \tag{3.4}$$

В число управлений могут входить и параметры, определяющие форму функций распределения возраста и времени пребывания агрегатов.

3.2. Оптимизация статического режима систем с сегрегацией

Обобщенная функция Лагранжа для задачи (3.1)–(3.4) примет форму (для невырожденного решения $\lambda_0 = 1$):

$$\begin{gathered} R = \overline{\varphi_0(y, u, x(\gamma, \tau_f))}^{\gamma, \tau_f} + \lambda \left[\overline{\varphi(y, u, x(\gamma, \tau_i))}^{\gamma, \tau_i} - g(y, u) \right] + \\ + \left[\overline{\frac{d\psi(\gamma, \tau_i)}{d\tau_i} x(\gamma, \tau_i) + \psi(\gamma, \tau_i) f(x(\gamma, \tau_i), y)}^{\gamma, \tau_i} \right]. \end{gathered} \tag{3.5}$$

Здесь $P_1(\tau_i)$ и $P_2(\tau_f)$ связаны друг с другом равенством (4.3), полученным в разделе 4. Переменные первой группы в этой задаче отсутствуют.

Необходимые условия оптимальности [5] запишутся в виде:

$$\frac{\partial R}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial u} \delta u \leqslant 0, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = 0, \tag{3.6}$$

где δu — допустимая вариация управлений с учетом наложенных на них ограничений $u \in V_u$.

Для функции R, имеющей форму (3.5), условия (3.6) примут вид:

$$\begin{gathered} \frac{d\psi}{d\tau_i} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\psi(\gamma,\tau_i)f(x,y) + \lambda\varphi(y,u,x)\right], \\ \psi(\gamma,\tau_f) = \frac{\partial}{\partial x(\gamma,\tau_f)}\varphi_0(y,u,x). \end{gathered} \tag{3.7}$$

$$\delta u \int\limits_0^\infty \frac{\partial}{\partial u}\left[\overline{\varphi_0(y,u,x(\gamma,\tau))P_2(\tau) + \lambda\varphi(y,u,x(\gamma,\tau))P_1(\tau)}^{\gamma}\right] d\tau \leqslant 0, \tag{3.8}$$

$$\begin{gathered} \int\limits_0^\infty \frac{\partial}{\partial y}\left[\overline{\varphi_0(y,u,x(\gamma,\tau))P_2(\tau) + \lambda\varphi(y,u,x(\gamma,\tau))} + \right. \\ \left. + \overline{\psi(\gamma,\tau)f(x(\tau),y)P_1(\tau)}^{\gamma}\right] d\tau = 0. \end{gathered} \tag{3.9}$$

Эти условия совместно с уравнениями (3.1) и усредненными условиями (3.3) определяют векторы u, y, λ и функции $x(\gamma,\tau)$ и $\psi(\gamma,\tau)$.

Условия оптимальности существенно упрощаются, если удается получить кинетическую кривую $x(\gamma,\tau_i,y)$. В этом случае задача приводится к виду:

$$I = \overline{\varphi_0(x(\gamma,\tau,y),u,y)}^{\gamma,\tau_f} \to \max, \tag{3.10}$$

$$J = \overline{\varphi(x(\gamma,\tau,y),u,y)}^{\gamma,\tau_i} - g(y,u) = 0. \tag{3.11}$$

Здесь усреднение производится по τ, но для функционала I с распределением P_2 времени пребывания агрегатов, а для функции φ — с распределением P_1 возраста агрегатов.

Необходимые условия оптимальности для непрерывно-дифференцируемых по y, u функций φ_0 и φ сводятся к тому, что найдется такой ненулевой вектор $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, ...)$, что на оптимальном решении функционал Лагранжа $S = \lambda_0 I + \lambda J$ стационарен по y и локально неулучшаем по $u \in V_u$:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\overline{\varphi_0(x(\gamma,\tau,y),u,y)}^{\gamma,\tau_f} + \lambda(\overline{\varphi(x(\gamma,\tau,y),u,y)}^{\gamma,\tau_i} - g(y,u))\right]\delta u \leqslant 0, \tag{3.12}$$

$$\begin{gathered} \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\right) \times \\ \times \left[\overline{\varphi_0(x(\gamma,\tau,y),u,y)}^{\gamma,\tau_f} + \lambda(\overline{\varphi(x(\gamma,\tau,y),u,y)}^{\gamma,\tau_i} - g(y,u))\right] = 0. \end{gathered} \tag{3.13}$$

Если функции распределения зависят от параметров, подлежащих выбору, то это нужно учесть в условиях оптимальности.

Пример 1. Оптимальный выбор среднего времени пребывания агрегатов в системе.

Пусть система однородна как по среде, так и по агрегатам. Кинетическая кривая

$$x(\tau,y) = \tau^2 e^{-y\tau}, \tag{3.14}$$

плотности распределения:

$$P_1(\tau,\Theta)=P_2(\tau,\Theta)=\frac{1}{\Theta}e^{-\tau/\Theta}. \tag{3.15}$$

Критерий оптимальности

$$I=\frac{1}{\Theta}\int\limits_0^\infty P_2(\tau,\Theta)x(\tau,y)d\tau\to\max, \tag{3.16}$$

$$J=\int\limits_0^\infty P_1(\tau,\Theta)\left[y-x(\tau,y)\right]d\tau=0,\quad \Theta\geqslant 0. \tag{3.17}$$

Выбору подлежит среднее время $\Theta=\frac{V}{g}$ пребывания агрегатов в системе.

Условия оптимальности (3.12), (3.13) после очевидных выкладок примут форму уравнений:

$$\frac{\partial S}{\partial\Theta}=0\to\int\limits_0^\infty \tau^2e^{-\tau}\left(y+\frac{1}{\Theta}\right)\left[\left(\frac{\tau}{\Theta}-2\right)\frac{1}{\Theta^2}+\lambda(y-\tau^2e^{-y\tau})\right]d\tau=0, \tag{3.18}$$

$$\frac{\partial S}{\partial y}=0\to\int\limits_0^\infty e^{-\tau/\Theta}\left[\frac{1}{\Theta}(1+\tau^3e^{-y\tau})+\lambda(1+\tau^2e^{-y\tau})\right]d\tau=0, \tag{3.19}$$

которые совместно с условием (3.17) определяют λ, y и Θ.

4. Плотности распределения времени пребывания агрегатов

Время пребывания агрегатов является одним из важнейших параметров, общим для всех сегрегированных систем. Рассмотрим способы вычисления плотностей распределения времени пребывания.

4.1. Связь между распределениями времени пребывания и возраста агрегатов

Будем предполагать, что начальное состояние x_0 — фиксированно, а время пребывания агрегатов в системе (возраст) τ_i и время пребывания τ_f агрегатов на выходе из системы случайны. Эти случайные величины взаимосвязаны, а значит, связаны друг с другом и их плотности распределения $P_1(\tau_i)$ и $P_2(\tau_f)$.

Найти эту связь важно потому, что распределение времени пребывания $P_2(\tau_f)$ определяет свойства выходного потока, а распределение возраста $P_1(\tau_i)$ — кинетику взаимодействия агрегатов и среды внутри системы; кроме того, во многих случаях распределение $P_2(\tau_f)$ можно найти эксперементально с использованием трассеров [6], когда на вход системы подают одномоментно порцию агрегатов и измеряют во времени долю $P_2(\tau_f)$ от поданных агрегатов, покидающих систему. Распределение возраста $P_1(\tau_i)$ нужно рассчитать по $P_2(\tau_f)$.

Пусть P_2 задана, тогда доля агрегатов, имеющих возраст от τ_i до $\tau_i+d\tau_i$, в момент t пропорциональна произведению потока g на $d\tau_i$, за исключением доли этих агрегатов, которые за время от $(t-\tau_i)$ до t покинули систему. Доля агрегатов, покинувших систему, в стационарном случае равна

$$F(\tau_i) = \int\limits_0^{\tau_i} P_2(\tau_f) d\tau_f.$$

Плотность распределения возраста равна доле оставшихся агрегатов с возрастом от τ_i до $\tau_i + d\tau_i$. С учетом нормирования получим

$$P_1(\tau_i) = \frac{1 - \int\limits_0^{\tau_i} P_2(\tau_f) d\tau_f}{\int\limits_0^{\infty} \left(1 - \int\limits_0^{\tau_i} P_2(\tau_f) d\tau_f\right) d\tau_i}. \tag{4.1}$$

Покажем, что знаменатель этого выражения равен среднему времени пребывания агрегатов в системе

$$\Theta = \int\limits_0^{\infty} \tau_f P_2(\tau_f) d\tau_f. \tag{4.2}$$

Действительно, интеграл в знаменателе выражения (4.1) равен пределу при $s \to 0$ изображения по Лапласу подынтегрального выражения

$$\lim_{s\to 0} L\left[1 - \int\limits_0^{\tau_i} P_2(\tau_f) d\tau_f\right] = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}\left(1 - P_2(s)\right).$$

Раскрывая неопределенность, получим по правилу Лопиталя, что этот предел равен пределу при $s \to 0$ от $-\frac{dP_2(s)}{ds}$, а он, в свою очередь, равен интегралу в (4.2), так что

$$P_1(\tau_i) = \frac{1}{\Theta}\left(1 - \int\limits_0^{\tau_i} P_2(\tau_f) d\tau_f\right). \tag{4.3}$$

Это выражение для любой сегрегированной системы позволяет найти плотность распределения времени пребывания агрегатов в объеме по плотности распределения времени пребывания агрегатов, покидающих систему, в стационарном режиме.

Перепишем равенство (4.3) с использованием преобразования Лапласа

$$P_1(s) = \frac{1}{\Theta s}\left(1 - P_2(s)\right), \tag{4.4}$$

При этом

$$\Theta = \lim_{s\to 0} \frac{dP_2(s)}{ds}.$$

Распределения $P_2(\tau_f)$ и $P_1(\tau_i)$ одинаковы в случае, когда

$$P_2(\tau_f) = \frac{1}{\Theta} e^{-\frac{\tau_f}{\Theta}}.$$

Действительно, в этом случае

$$P_2(s) = \frac{1}{\Theta s + 1}.$$

По (4.4) имеем

$$P_1(s) = \frac{1}{\Theta s}\left(1 - \frac{1}{\Theta s + 1}\right) = \frac{1}{\Theta s + 1}.$$

Преобразование Лапласа позволяет найти плотности распределения времени пребывания агрегатов в системах с произвольной структурой.

4.2. Структурный анализ распределений времени пребывания и возраста агрегатов

Сегрегированная система может состоять из нескольких подсистем, обменивающихся потоками агрегатов. В каждой подсистеме состояние среды зависит от управляющих воздействий и усредненного по возрасту состояния агрегатов. Связь между плотностями распределения для различных структур позволяет использовать эксперементальные данные, полученные в любой точке системы для расчета других подсистем.

При этом далее речь пойдет главным образом о распределениях $P_2(\tau_f)$ времени пребывания τ_f. Ее преобразование по Лапласу обозначим через $P_2(s)$. Распределение возраста агрегатов $P_1(\tau_i)$ и его преобразование $P_1(s)$ могут быть вычислены по формулам (4.3), (4.4) для одиночной и по полученным ниже формулам для сложной системы.

4.2.1. Простейшие модели и элементарные операции

При упорядоченном движении агрегатов от входа к выходу системы (гидродинамический режим вытеснения, очередь) время пребывания τ_f^0 всех агрегатов одинаково

$$P_2(\tau_f) = \delta(\tau_f - \tau_f^0), \quad P_2(s) = e^{-s\tau_f^0}. \tag{4.5}$$

При равномерном распределении агрегатов в объеме системы (гидродинамика идеального перемешивания), как нетрудно показать:

$$P_2(\tau_f) = \frac{1}{\Theta} e^{-\tau_f/\Theta}, \quad P_2(s) = \frac{1}{\Theta s + 1}. \tag{4.6}$$

Здесь Θ — среднее время пребывания агрегата в системе, равное отношению числа агрегатов к их расходу. Так как доля агрегатов в объеме и в выходном потоке одинакова, то Θ — отношение объема системы к расходу.

В системе может иметь место слияние и ветвление потоков. При этом плотности распределения времени пребывания изменяются.

Слияние потоков. Пусть для каждого i-го из n потоков с расходом g_i известно распределение $P_{2i}(\tau_f)$. Обозначим через

$$\gamma_i = \frac{g_i}{\sum_{j=1}^{n} g_j}, \quad \gamma_i \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \gamma_i = 1.$$

Доля агрегатов в i-м потоке, пребывающих в системе время от τ_f до $\tau_f + d\tau_f$, равна $g_i P_{2i}(\tau_f) d\tau_f$. Та же доля в потоке после слияния

$$gP_2(\tau_f)d\tau_f = \sum_{i=1}^{n} g_i P_{2i}(\tau_f) d\tau_f,$$

откуда

$$P_2(\tau_f) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i P_{2i}(\tau_f). \tag{4.7}$$

При разветвлении потоков

$$P_{2i}(\tau_f) = P_2(\tau_f) \quad \forall i. \tag{4.8}$$

4.2.2. Последовательное соединение подсистем

Пусть две подсистемы соединены последовательно. Тогда для первой подсистемы распределение времени пребывания в ней $P_{21}(\tau_f)$ и распределение возраста $P_{11}(\tau_i)$ связаны друг с другом выражением (4.3). Для второй подсистемы будем разделять возраст агрегатов в системе τ_i и их возраст только во второй подсистеме τ_2. Кроме того, будем отличать время пребывания τ_f на выходе из системы и время пребывания τ_{fi} в каждой из подсистем.

Так как

$$\tau_f = \tau_{f1} + \tau_{f2}$$

и эти две случайные величины независимы, то плотность распределения суммы равна свертке плотностей распределения слагаемых:

$$P_2(\tau_f) = P_{21}(\tau_{f1}) * P_{22}(\tau_{f2}).$$

В области преобразований по Лапласу свертка переходит в произведение, поэтому имеем

$$P_2(s) = P_{21}(s) P_{22}(s). \tag{4.9}$$

Распределение возраста агрегатов для первой подсистемы в области преобразований

$$P_{11}(s) = \frac{1}{\Theta_1 s}(1 - P_{21}(s)). \tag{4.10}$$

Для второй подсистемы возраст агрегатов в системе $\tau_i = \tau_{f1} + \tau_2$, а его распределение

$$P_1(\tau_i) = P_{21}(\tau_{f1}) * P_{12}(\tau_2).$$

В области преобразований

$$P_1(s) = P_{21}(s) * P_{12}(s). \tag{4.11}$$

Это распределение связано с распределением времени пребывания в системе выражением (4.4)

$$P_1(s) = \frac{1}{(\Theta_1 + \Theta_2)s}(1 - P_2(s)). \tag{4.12}$$

Откуда для распределения возраста агрегатов во второй подсистеме имеем

$$P_{12}(s) = \frac{1}{(\Theta_1 + \Theta_2)s}\left(\frac{1}{P_{21}(s)} - P_{22}(s)\right). \tag{4.13}$$

Многие характеристики плотностей распределения времени пребывания и возраста (средние значения, дисперсия, …) можно вычислить через их преобразования по Лапласу, не переходя в область оригиналов. Так, среднее значение времени τ_i и его дисперсия равны:

$$\Theta_i = \lim_{s\to 0}\left[-\frac{d}{ds}P_i(s)\right], \tag{4.14}$$

$$D_i = \lim_{s\to 0}\left[\frac{d^2P_i(s)}{ds^2} - \left(\frac{dP_i(s)}{ds}\right)^2\right]. \tag{4.15}$$

Полученные выражения позволяют с использованием преобразования Лапласа найти плотности распределения времени пребывания и возраста агрегатов в каждой из подсистем для системы произвольной структуры, включающей параллельно соединенные подсистемы, подсистемы с рециклом агрегатов и др.

Пример 2. Найдем плотность распределения времени пребывания в системе с рециклом, состоящей из двух подсистем. Поток агрегатов проходит через систему A, плотность распределения времени пребывания, $P_{a2}(\tau_f)$ в которой известна и равна

$$P_{ar}(\tau_f) = \frac{1}{\Theta}e^{-\frac{\tau_f}{\Theta}}, \quad P_{a2}(s) = \frac{1}{\Theta s + 1}, \tag{4.16}$$

после этого доля r от выходного потока агрегатов возвращается на вход системы через подсистему B, для которой

$$P_{b2}(\tau_f) = \delta(\tau_f - \tau_0), \quad P_{b2}(s) = e^{-\tau_0 s}. \tag{4.17}$$

Здесь Θ и τ_0 зависят от расхода и соответствуют расходу g на входе системы. Так как расход через рецикл равен rg, а расход через подсистему A равен $g(1+r)$, то

$$P^r_{b2}(s) = e^{-\frac{\tau_0 s}{r}}, \quad P^r_{a2}(s) = \frac{r+1}{\Theta s + r + 1}. \tag{4.18}$$

Найдем для системы в целом $P_2(\tau_f)$.

Для решения задачи используем преобразование Лапласа. В области преобразований имеем после слияния потоков на входе подсистемы A с учетом (4.18):

$$P_{abx}(s) = \frac{1 + rP_2(s)\cdot e^{-\frac{s\tau_0}{r}}}{1+r}. \tag{4.19}$$

С другой стороны,

$$P_2(s) = P_{abx}(s)\cdot\frac{r+1}{\Theta s + r + 1}. \tag{4.20}$$

Подставляя (4.20) в (4.19), получим

$$P_2(s)(\Theta s + 1 + r) = 1 + rP_2(s)e^{-\frac{\tau_0 s}{r}},$$

откуда изображение по Лапласу искомой плотности распределения времени пребывания τ_f агрегатов в системе

$$P_2(s) = \frac{1}{\Theta s + r\left(1 - e^{-\frac{\tau_0 s}{r}}\right) + 1}. \tag{4.21}$$

5. Заключение

Для систем, состоящих из большого числа агрегатов, взаимодействующих с однородной средой, сформулирована задача управления и получены условия оптимальности решения. Найдена связь плотностей распределения возраста и времени пребывания агрегатов в системе. Развит структурный подход к расчету распределения времени пребывания агрегатов в сложных системах с разветвлением и слиянием потоков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Попков Ю.С.* Теория макросистем, равновесные модели. М.: УРСС, 1999.
2. *Цирлин А.М.* Математические модели и оптимальные процессы в макросистемах. М.: Наука, 2003.
3. *Цирлин А.М., Миронова В.А., Крылов Ю.М.* Сегрегированные процессы в химической промышленности. М.: Химия, 1986.
4. *Цирлин А.М.* Условия оптимальности скользящих режимов и принцип максимума для задач управления со скалярным аргументом // АиТ. 2009. № 5. С. 106–121.

   Tsirlin A.M. Optimality Conditions of Sliding Modes and the Maximum Principle for Control Problems with the Scalar Argument // Autom. Remote Control. 2009. V. 70. No. 5. P. 839–854.
5. *Цирлин А.М.* Методы усредненной оптимизации и их приложения. М.: Физматлит, 1997.
6. *Кафаров В.В.* Методы кибернетики в химии и химической технологии. М.: Химия, 1971.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Ю.С. Попковым.

Поступила в редакцию 26.01.2012