Функциональный анализ и его приложения
1994, т. 28, вып. 4, с. 42–65

УДК 512.81

Реализация модулярного функтора в пространстве дифференциалов и геометрическая аппроксимация многообразия модулей G-расслоений

© 1994. А. В. Стояновский, Б. Л. Фейгин

Введение

0.1. Пусть G — комплексная полупростая односвязная группа Ли, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли и k — целое неотрицательное число. *Модулярный функтор* (в модели Весса–Зумино с группой G и центральным зарядом k) [1] сопоставляет каждой компактной римановой поверхности X некоторое конечномерное комплексное векторное пространство $M(X)$. У пространства $M(X)$ есть много эквивалентных определений; напомним два из них.

1) Выберем локальную координату z на кривой X с нулем в точке $P_0 \in X$. Это позволяет отождествить маленькую окрестность точки P_0 с единичным диском $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, а границу окрестности — с единичной окружностью S^1. Пусть $L\mathfrak{g}$ — алгебра Ли аналитических отображений $S^1 \to \mathfrak{g}$, а $L^{\mathrm{in}}\mathfrak{g}$ и $L^{\mathrm{out}}\mathfrak{g}$ — подалгебры в $L\mathfrak{g}$, состоящие из граничных значений голоморфных отображений $D \to \mathfrak{g}$ и $X \setminus D \to \mathfrak{g}$ соответственно. Пусть $\hat{\mathfrak{g}} = L\mathfrak{g} \oplus \mathbb{C} \cdot K$ — аффинная алгебра Ли, т.е. центральное расширение алгебры $L\mathfrak{g}$ (задаваемое коциклом $\omega(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} \langle f, dg \rangle$), K — центральный элемент. Поскольку ограничение коцикла ω на подалгебры $L^{\mathrm{in}}\mathfrak{g}$ и $L^{\mathrm{out}}\mathfrak{g}$ равно нулю, мы можем рассматривать их как подалгебры в $\hat{\mathfrak{g}}$. *Вакуумным представлением* алгебры $\hat{\mathfrak{g}}$ уровня k мы называем неприводимый фактормодуль V_k индуцированного модуля $\mathrm{Ind}_{L^{\mathrm{in}}\mathfrak{g} \oplus \mathbb{C} \cdot K}^{\hat{\mathfrak{g}}} \chi_k$, где χ_k — характер алгебры $L^{\mathrm{in}}\mathfrak{g} \oplus \mathbb{C} \cdot K$, такой, что $\chi_k|_{L^{\mathrm{in}}\mathfrak{g}} = 0$, $\chi_k(K) = k$. Модулярный функтор (пространство конформных блоков) $M(X)$ определяется как двойственное пространство к пространству коинвариантов вакуумного представления относительно подалгебры $L^{\mathrm{out}}\mathfrak{g}$: $M(X) = H_0(L^{\mathrm{out}}\mathfrak{g}, V_k)^*$. (Определение пространства многоточечных конформных блоков см. в §I.1.)

2) Пусть $\mathcal{M}(X, G)$ — многообразие модулей голоморфных G-расслоений на кривой X и ξ — детерминантное линейное расслоение на $\mathcal{M}(X, G)$ [2]. Тогда $M(X) = H^0(\mathcal{M}(X, G), \xi^{\otimes k})$.

Канонический изоморфизм этих двух конструкций доказан в недавней статье [3][1].

0.2. В настоящей работе предлагается еще одна конструкция модулярного функтора. Эта конструкция является «глобализацией» с координатного диска D на риманову поверхность (ср. [4]) конструкции представлений алгебры $\hat{\mathfrak{g}}$, изло-

[1]В нашей работе также содержится некоторое (весьма непрямое) доказательство этого результата в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ (см. §II.4, теорема 5, и конец §II.5).

женной в нашей предыдущей работе [5]. Напомним вкратце основные моменты работы [5].

Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_-$ — картановское разложение алгебры $\mathfrak{g}$. Ключевую роль в [5] играет подалгебра $\hat{\mathfrak{n}}_+ = L\mathfrak{n}_+ \subset \hat{\mathfrak{g}}$, состоящая из токов со значениями в положительной нильпотентной подалгебре $\mathfrak{n}_+$. Пространство вакуумного представления V_k реализуется как объединение возрастающей последовательности подпространств вида $\omega \cdot W$, где $W = U(\hat{\mathfrak{n}}_+)v \subset V_k$, v — вакуумный вектор в V_k, а ω — некоторый элемент решетки сдвигов $\check{T}$ аффинной группы Вейля. Далее, подпространство W отождествляется с $U(\hat{\mathfrak{n}}_+)/I$, где I — левый идеал в $U(\hat{\mathfrak{n}}_+)$, аннулирующий вектор v. Идеал I вычисляется явно, и это приводит к некоторому описанию пространства W (точнее, двойственного пространства W^*), а следовательно, и пространства V_k^* (как предела пространств $(\omega \cdot W)^*$).

Например, в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ пространство W^* описывается так: $W^* = \bigoplus_{n \geqslant 0} (W^*)^{(n)}$, а $(W^*)^{(n)} \cong \{\varphi(z_1, \dots, z_n)\, dz_1 \dots dz_n$, φ — симметрическая функция от $z_1, \dots, z_n \in D$, обращающаяся в нуль на диагоналях $z_{i_1} = \dots = z_{i_{k+1}}$ коразмерности $k\}$. Пространства $(\omega \cdot W)^*$ имеют аналогичное описание, с той лишь разницей, что функции φ разрешается иметь полюс порядка не выше $2N$ на координатном кресте $z_i = 0$ (здесь N — число, соответствующее элементу ω^{-1} при изоморфизме $\check{T} \cong \mathbb{Z}$). Наконец, пространство V_k^* реализуется как прямая сумма по $n \in \mathbb{Z}$ некоторых пространств симметрических функций «от полубесконечного числа переменных» x_i, $-\infty < i \leqslant n$. В частности, при $k = 1$ несложные выкладки приводят к однородной реализации базисного представления алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ вертексными операторами [6, 7].

0.3. Возможность применения результатов из [5] к исследованию модулярного функтора основывается на теореме 1 настоящей работы, которая утверждает, что для вычисления коинвариантов вакуумного представления относительно подалгебры $L^{\text{out}}\mathfrak{g}$ достаточно взять коинварианты относительно меньшей алгебры $\hat{\mathfrak{n}}_+^{\text{out}} = \hat{\mathfrak{n}}_+ \cap L^{\text{out}}\mathfrak{g}$ и затем перейти к нулевой весовой компоненте относительно картановской подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$: $H_0(L^{\text{out}}\mathfrak{g}, V_k) \cong H_0(\mathfrak{h} \ltimes \hat{\mathfrak{n}}_+^{\text{out}}, V_k)$.

Поскольку пространства $\omega \cdot W = U(\hat{\mathfrak{n}}_+)(\omega \cdot v)$ инвариантны относительно алгебры $\mathfrak{h} \ltimes \hat{\mathfrak{n}}_+^{\text{out}}$, из теоремы 1 следует, что пространство $M(X)^*$ реализуется как объединение последовательности вложенных подпространств

$$H_0(\mathfrak{h} \ltimes \hat{\mathfrak{n}}_+^{\text{out}}, \omega \cdot W).$$

Так как пространство $M(X)$ конечномерно, эта последовательность стабилизируется, и $M(X) \cong H_0(\mathfrak{h} \ltimes \hat{\mathfrak{n}}_+^{\text{out}}, \omega \cdot W)^*$ для «достаточно большого» ω. Последнее пространство имеет описание, «глобализующее» описание нулевой $\mathfrak{h}$-весовой компоненты пространства $(\omega \cdot W)^*$ в терминах симметрических функций. Например, в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ получаем такой результат:

модулярный функтор реализуется в пространстве симметрических сечений расслоения $L^{\boxtimes kN}$ на (kN)-й степени кривой X, где $L = \Omega_X^1(2NP_0)$, обращающихся в нуль на диагоналях коразмерности k: $M(X) \cong H^0(S^{kN}X, L^{\boxtimes kN}_{(k+1)})$. (*)

Здесь индекс $(k+1)$ соответствует обращению в нуль на диагоналях, Ω_X^1 — каноническое расслоение на X, N — достаточно большое число. (На самом деле можно взять $N \geqslant g$, где g — род кривой X.)

Аналогичное (более сложное) описание модулярного функтора имеет место для любой алгебры $\mathfrak{g}$, см. §I.2 и I.5.

0.4. Кроме «функциональной» реализации пространства W^*, в работе [5] обсуждалась еще одна его реализация: $W^* \cong H^0(M, \mathcal{L}_k)$, где $\mathcal{L}_k$ — расслоение Бореля–Вейля на многообразии флагов $\mathcal{F}$ алгебры $\hat{\mathfrak{g}}$ [6], а M — замыкание орбиты отмеченной точки в $\mathcal{F}$ под действием группы $\widehat{\mathcal{N}}_+$, соответствующей алгебре Ли $\hat{\mathfrak{n}}_+$ (т.е. группы токов со значениями в унипотентной подгруппе $\mathcal{N}_+ \subset G$). Учитывая теорему 1, получаем еще одно описание модулярного функтора как пространства сечений некоторого линейного расслоения на факторпространстве $(\omega \cdot M)/T \ltimes \widehat{\mathcal{N}}_+^{\mathrm{out}}$ для «достаточно большого» $\omega \in \check{T}$ (здесь $T \ltimes \widehat{\mathcal{N}}_+^{\mathrm{out}}$ — группа с алгеброй Ли $\mathfrak{h} \ltimes \hat{\mathfrak{n}}_+^{\mathrm{out}}$), при условии, что такое подходящее факторпространство существует. Проблема факторизации многообразия по действию группы относится к геометрической теории инвариантов [11]. Как и в классическом случае конечномерной редуктивной группы, для построения факторпространства оказывается необходимым исключить некоторые «нестабильные» орбиты и склеить «полустабильные» орбиты. Процедура факторизации обсуждается (на полуэвристическом уровне) в §II.2 для случая $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$. Результат совпадает с конструкцией геометрической аппроксимации многообразия модулей двумерных расслоений, изучавшейся Бертрамом, Таддеушем и др. [8–10]. Эквивалентность этой конструкции и конструкции $(*)$, на «локальном» уровне весьма нетривиальная [5] (комбинаторно задающаяся тождествами Роджерса–Рамануджана–Гордона), на «глобальном» уровне становится почти тавтологическим изоморфизмом (§II.4). Тем самым мы получаем, что в случае $G = SL(2)$ конструкция $(*)$ по существу совпадает с конструкцией геометрической аппроксимации. В случае произвольной группы G наши результаты позволяют построить обобщения геометрической аппроксимации (в частности, на многообразия модулей многомерных расслоений). Мы кратко обсуждаем эти обобщения в §II.5.

0.5. Одним из основных свойств модулярного функтора $M(X)$ (и его многоточечных аналогов) является его независимость от выбора комплексной структуры на поверхности X. Точнее, пространства $M(X)$ образуют расслоение с канонической плоской проективной связностью над пространством модулей комплексных структур [2]. В частности, размерность пространства $M(X)$ зависит только от рода поверхности и задается формулой Верлинде [12]. К сожалению, несмотря на относительную простоту конструкции $(*)$, нам пока не удалось построить плоскую проективную связность в терминах этой конструкции. Некоторые другие компоненты конформной теории поля [4] — пространства многоточечных конформных блоков для неособых и вырожденных кривых, правила слияния — построены и обсуждаются в §I.2. Доказательство формулы Верлинде в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ с помощью геометрической аппроксимации см. в [9].

0.6. Опишем содержание работы по параграфам. Работа разделена на две части. Часть I соответствует §2 статьи [5] и посвящена изложению конструкции $(*)$ с различными обобщениями. В §1 даются определения пространств конформных блоков. В §2 формулируется основная теорема 1 и ее следствия — конструкции типа $(*)$. Доказательство теоремы 1 занимает §3–5. Оно основано на технике вертексных операторов и операторного разложения [4]. Ключевым для нас является тот факт, что росток отображения Абеля–Якоби в некотором смысле задается вертексным оператором (лемма 1 §3). В §3 мы доказываем теорему в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$, $k = 1$, используя однородную реализацию базисного представления V_1. Заодно мы доказываем изоморфизм модулярного функтора с пространством тэта-функций второго порядка. Метод доказательства затем обобщается в §4 на случай произвольного k; при этом вводится «вертексная подалгебра уровня k» $A_k \subset U_k(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$, изучаются ее представления и доказывается, что модулярный функтор относительно A_k изоморфен пространству тэта-функций порядка $2k$. В §5 завершается доказательство теоремы 1 в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$, и теорема 1 для произвольной алгебры $\mathfrak{g}$ сводится к случаю $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$; обсуждаются усиления этой теоремы.

Часть II соответствует §3 из [5]; в ней теорема 1 связывается с геометрией многообразия модулей расслоений. В §1 напоминается эквивалентность определений 1) и 2) модулярного функтора (см. п. 0.1). В §2 производится факторизация многообразия $\omega \cdot M$ по действию группы $T \ltimes \widehat{\mathcal{N}}_+^{\mathrm{out}}$ в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$; показывается, каким образом возникает геометрическая аппроксимация. Рассуждения §2 служат для нас скорее мотивировками, чем доказательствами; при желании им можно придать строгость, однако мы не заботились об этом. В §3 напоминаются результаты [9] о геометрической аппроксимации. В §4 строится изоморфизм геометрической аппроксимации с конструкцией $(*)$; в виде следствия доказывается эквивалентность двух определений модулярного функтора. Обсуждается связь с тэта-функциями. Наконец, в §5 мы формулируем теоремы об обобщении геометрической аппроксимации на параболические расслоения (что соответствует многоточечному модулярному функтору) и на многомерные расслоения.

Мы благодарны В. Ю. Барановскому за многочисленные очень полезные обсуждения.

Часть I

§1. Обозначения и определения

Кроме обозначений, введенных в пп. 0.1–0.3, отметим следующие. Если $\mathfrak{a}$ — алгебра Ли, то символом $L\mathfrak{a}$ мы обозначаем алгебру Ли аналитических петель $S^1 \to \mathfrak{a}$ относительно поточечного коммутатора. Пусть $P_1, \ldots, P_n$ — точки компактной римановой поверхности X, D_i — окрестность точки P_i, отождествленная с единичным диском D при помощи локальной координаты $z^{(i)}$, S_i^1 — граница диска D_i и $L\mathfrak{a}(P_i) \cong L\mathfrak{a}$ — алгебра Ли петель $S_i^1 \to \mathfrak{a}$, «живущая» в точке P_i. Символом $L^{\mathrm{out}}\mathfrak{a}(P_1, \ldots, P_n)$ обозначается подалгебра Ли в алгебре $L\mathfrak{a}(P_1) \oplus \ldots \oplus L\mathfrak{a}(P_n)$, состоящая из наборов граничных значений голоморфных отображений $X \backslash (D_1 \cup \ldots \cup D_n) \to \mathfrak{a}$. Пусть теперь $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли и $\omega(P_i)$ — стандартный 2-коцикл алгебры $L\mathfrak{g}(P_i)$ (см. п. 0.1). Обозначим через $\hat{\mathfrak{g}}(P_1, \ldots, P_n)$ центральное расширение алгебры $L\mathfrak{g}(P_1) \oplus \ldots \oplus L\mathfrak{g}(P_n)$, отвечающее коциклу $\omega(P_1) + \ldots + \omega(P_n)$. По теореме Коши ограничение этого коцикла на подалгебру $L^{\mathrm{out}}\mathfrak{g}(P_1, \ldots, P_n)$ равно нулю; поэтому мы считаем ее подалгеброй в $\hat{\mathfrak{g}}(P_1, \ldots, P_n)$. Пусть $\pi_1, \ldots, \pi_n$ — неприводимые интегрируемые представления алгебры $\hat{\mathfrak{g}}$ некоторого фиксированного уровня k. Будем говорить, что представление π_i «сидит» в точке P_i, и считать его (проективным) представлением алгебры $L\mathfrak{g}(P_i)$. Пространство $\pi_1 \otimes \ldots \otimes \pi_n$ является представлением алгебры $\hat{\mathfrak{g}}(P_1, \ldots, P_n)$, а значит, на нем действует и алгебра $L^{\mathrm{out}}\mathfrak{g}(P_1, \ldots, P_n)$.

Определение 1. Модулярным функтором (пространством конформных блоков) $M(X\,;\,P_1,\,\dots\,,P_n\,;\,\pi_1,\,\dots\,,\pi_n)$ называется пространство

$$H_0(L^{\mathrm{out}}\mathfrak{g}(P_1,\,\dots\,,P_n),\pi_1\,\otimes\,\dots\,\otimes\,\pi_n)^*.$$

Если $n=1$ и $\pi=V_k$, то модулярный функтор $M(X\,;\,P\,;\,\pi)$ не зависит от точки P (см. §2); мы обозначаем его просто $M(X)$.

§2. Формулировка основной теоремы и конструкции пространств конформных блоков

Теорема 1. *Пространство $H_0(L^{\mathrm{out}}\mathfrak{g},V_k)$ изоморфно нулевой $\mathfrak{h}$-весовой компоненте пространства $H_0(L^{\mathrm{out}}\mathfrak{n}_+,V_k)$.*

Заметим, что $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}\subset L^{\mathrm{out}}\mathfrak{g}$. Таким образом, теорема 1 утверждает, что коинварианты относительно алгебры $L^{\mathrm{out}}\mathfrak{g}$ изоморфны коинвариантам относительно меньшей алгебры $\mathfrak{h}\ltimes L^{\mathrm{out}}\mathfrak{n}_+$.

Для пространств многоточечных конформных блоков имеется аналогичная теорема (ее доказательство повторяет, с соответствующими усложнениями, доказательство теоремы 1):

Теорема 1$'$. *Пространство $H_0(L^{\mathrm{out}}\mathfrak{g}(P_1,\,\dots\,,P_n),\pi_1\,\otimes\,\dots\,\otimes\,\pi_n)$ изоморфно нулевой $\mathfrak{h}$-весовой компоненте пространства*

$$H_0(L^{\mathrm{out}}\mathfrak{n}_+(P_1,\,\dots\,,P_n),\pi_1\,\otimes\,\dots\,\otimes\,\pi_n)$$

(здесь картановская подалгебра $\mathfrak{h}$ алгебры $\mathfrak{g}$ вложена в $L\mathfrak{g}(P_1)\oplus\dots\oplus L\mathfrak{g}(P_n)$ диагонально).

Перейдем к конструкциям пространств конформных блоков в случае $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_2$. Сначала напомним некоторые результаты работы [5]. Пусть π — интегрируемое неприводимое представление алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ со старшим весом $(0,l,k)$, $0\leqslant l\leqslant k$ (мы следуем обозначениям статьи [5] и книги [6]), в пространстве V, v — вакуумный вектор. Пусть $W=U(\hat{\mathfrak{n}}_+)v$ — «основное подпространство» в V, $W_m=T_m\cdot W=U(\hat{\mathfrak{n}}_+)(T_m\cdot v)$, где T_m — элемент с номером m решетки сдвигов $\check{T}\cong\mathbb{Z}$ аффинной группы Вейля. Имеем $W_{m_1}\subset W_{m_2}$ при $m_1>m_2$ и $\bigcup_{N\in\mathbb{Z}}W_{-N}=V$. Каждое из пространств W_{-N} разлагается в прямую сумму своих $\mathfrak{h}$-весовых компонент: $W_{-N}=\bigoplus_{n\geqslant-kN}W_{-N}^{(2n+l)}$ (где на $W_{-N}^{(i)}$ элемент $h\in\mathfrak{h}$ действует умножением на i) и

$$W_{-N}^{(2n+l)*}\cong\{\varphi(z_1,\,\dots\,,z_{n+kN})(z_1\dots z_{n+kN})^{-2N}dz_1\dots dz_{n+kN}\},\tag{1}$$

φ — голоморфная симметрическая функция от переменных $z_i\in D$, обращающаяся в нуль при $z_1=\dots=z_{k+1}$ и при $z_1=\dots=z_{k-l+1}=0$ [5, (2.3.2$'$)]. Значение элемента пространства (1) на элементе

$$(\psi_1\,\otimes\,e)\cdot\ldots\cdot(\psi_{n+kN}\,\otimes\,e)\cdot T_{-N}v$$

пространства $W_{-N}^{(2n+l)}$ (здесь ψ_i — аналитические функции на окружности, $e\in\mathfrak{n}_+$, $\psi_i\,\otimes\,e\in\hat{\mathfrak{n}}_+$) равно [5, (2.3.1)] вычетному интегралу

$$\frac{1}{(2\pi i)^{n+kN}}\int_{|z_1|=\ldots=|z_{n+kN}|=1}\varphi(z_1,\,\dots\,,z_{n+kN})(z_1\dots z_{n+kN})^{-2N}\\\times\psi_1(z_1)\dots\psi_{n+kN}(z_{n+kN})\,dz_1\wedge\ldots\wedge dz_{n+kN}\,.\tag{2}$$

Пусть теперь $V = V_k$ — вакуумное представление, $l = 0$. По теореме 1

$$M(X)^* \cong H_0(\mathfrak{h} \ltimes \hat{\mathfrak{n}}_+^{\mathrm{out}}, V_k) = \bigcup_N H_0(\mathfrak{h} \ltimes \hat{\mathfrak{n}}_+^{\mathrm{out}}, W_{-N}) = W_{-N}^{(0)} / \hat{\mathfrak{n}}_+^{\mathrm{out}} W_{-N}^{(-2)} \qquad (3)$$

для достаточно большого N (так как пространство $M(X)$ конечномерно).

Двойственное пространство $(W_{-N}^{(0)} / \hat{\mathfrak{n}}_+^{\mathrm{out}} W_{-N}^{(-2)})^*$ состоит из тех элементов пространства (1), для которых спаривание (2) обращается в нуль, если одна из функций $\psi_i(z)$ продолжается до голоморфной функции на $X \setminus D$. Это условие равносильно продолжаемости элемента пространства (1) на X^{kN} как сечения расслоения $\Omega_X^1(2NP_0)^{\boxtimes kN}$ (знак $\boxtimes$ обозначает внешнее тензорное произведение). Равносильность есть теорема двойственности Серра:

$$H^{\mathrm{top}}(X^{kN}, \mathcal{O}(-2NP_0)^{\boxtimes kN})^* \cong H^0(X^{kN}, \Omega_X^1(2NP_0)^{\boxtimes kN}),$$

если вычислять группу H^{top} по Чеху с помощью открытого покрытия многообразия X^{kN}, индуцированного покрытием $X = U_1 \cup U_2$, где U_1 чуть больше D, U_2 чуть больше $X \setminus D$. Таким образом, доказано

Предложение 2. *Пространство* $W_{-N}^{(0)} / \hat{\mathfrak{n}}_+^{\mathrm{out}} W_{-N}^{(-2)}$ *двойственно к пространству* $\mathcal{C}_N = H^0(S^{kN}X, \Omega_X^1(2NP_0)^{\boxtimes kN}_{(k+1)})$ *симметрических сечений расслоения* $\Omega_X^1(2NP_0)^{\boxtimes kN}$ *на* (kN)*-й степени кривой* X, *обращающихся в нуль на диагоналях коразмерности* k. *Естественное вложение*

$$W_{-N}^{(0)} / \hat{\mathfrak{n}}_+^{\mathrm{out}} W_{-N}^{(-2)} \to W_{-(N+1)}^{(0)} / \hat{\mathfrak{n}}_+^{\mathrm{out}} W_{-(N+1)}^{(-2)}$$

двойственно проекции $\mathcal{C}_{N+1} \to \mathcal{C}_N$, *индуцированной вложением*

$$S^{kN}X \hookrightarrow S^{k(N+1)}X, \qquad (x_1, \ldots, x_{kN}) \mapsto (P_0, \ldots, P_0, x_1, \ldots, x_{kN}).$$

Теперь воспользуемся равенствами (3). Получается

Теорема 3 (случай $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$). *При достаточно больших* N

$$M(X) \cong H^0(S^{kN}X, \Omega_X^1(2NP_0)^{\boxtimes kN}_{(k+1)}).$$

В дальнейшем (§ II.4) мы увидим, что пространства $\mathcal{C}_N$ стабилизируются при $N \geqslant g$, где g — род кривой X.

Примеры. 0) Пусть $g = 0$. Тогда $M(X) \cong \mathcal{C}_0 = \mathbb{C}$ при всех k.

1) Пусть $g = 1$. Тогда $\mathcal{C}_g = H^0(S^kX, \mathcal{O}(2P_0)^{\boxtimes k}) \cong S^k H^0(X, \mathcal{O}(2P_0))$. В частности, $\dim M(X) = k + 1$.

2) Пусть $k = 1$. Диагональ коразмерности 1 является дивизором Δ в S^NX, и $\mathcal{C}_N = H^0(S^NX, \Omega_X^1(2NP_0)^{\boxtimes N} \otimes \mathcal{O}(-\Delta))$. Размерность пространства $\mathcal{C}_N$ вычисляется, например, по теореме Римана–Роха:

$$\dim \mathcal{C}_N = \sum_{i=0}^{N} \binom{g}{i} \qquad \text{при } N < g,$$

$$\dim \mathcal{C}_N = \dim M(X) = 2^g \quad \text{при } N \geqslant g.$$

Связь пространства $\mathcal{C}_N$ с пространством тэта-функций второго порядка будет обсуждаться в § 3.

Нетрудно найти аналог теоремы 3 для многоточечника

$$M(X\,;\,P_1,\dots,P_n\,;\,\pi_1,\dots,\pi_n)\,.$$

Вместо W_{-N} следует рассмотреть пространство

$$W_{-N_1}\otimes\dots\otimes W_{-N_n}\subset\pi_1\otimes\dots\otimes\pi_n\,.$$

Тогда

$$H_0(\mathfrak{h}\ltimes L^{\mathrm{out}}\mathfrak{n}_+(P_1,\dots,P_n),W_{-N_1}\otimes\dots\otimes W_{-N_n})^*\\ \cong H^0(S^NX,\Omega^1_X(2N_1P_1+\dots+2N_nP_n)^{\boxtimes N}_{(k+1\,;\,l_1,\dots,l_n)}),$$

где $(0,l_i,k)$ — старший вес представления π_i, $N=k\cdot\sum N_i-(\sum l_i)/2$ (если $\sum l_i$ нечетно, то $M(X)=0$) и индекс $(k+1\,;\,l_1,\dots,l_n)$ означает, что сечение должно обращаться в нуль в точках $(x_1,\dots,x_N)\in S^NX$, таких, что либо $x_1=\dots=x_{k+1}$, либо $x_1=\dots=x_{k-l_i+1}=P_i$ для некоторого i. При достаточно большом N

$$H_0(\mathfrak{h}\ltimes L^{\mathrm{out}}\mathfrak{n}_+(P_1,\dots,P_n),W_{-N_1}\otimes\dots\otimes W_{-N_n})^*\\ \cong M(X\,;\,P_1,\dots,P_n\,;\,\pi_1,\dots,\pi_n)\,.$$

Например, пусть $n>1$ и $l_1=0$, т.е. $\pi_1=V_k$. Выбирая $N_1=0$, получаем, что

$$M(X\,;\,P_1,\dots,P_n\,;\,V_k,\pi_2,\dots,\pi_n)\cong M(X\,;\,P_2,\dots,P_n\,;\,\pi_2,\dots,\pi_n)\,.\qquad(4)$$

В частности, $M(X\,;\,P_1\,;\,V_k)\cong M(X\,;\,P_1,P_2\,;\,V_k,V_k)\cong M(X\,;\,P_2\,;\,V_k)$, что доказывает независимость пространства $M(X)$ от точки P, упоминавшуюся в §1.

Наоборот, выбирая N_1 очень большим, а $N_2,\dots,N_n$ полагая равными нулю и пользуясь (4), получаем такое удобное для дальнейшего описание пространства конформных блоков:

Теорема 3$'$. *Для достаточно большого N (и четного $l=\sum l_i$)*

$$M(X\,;\,P_1,\dots,P_n\,;\,\pi_1,\dots,\pi_n)\cong H^0(S^{kN-l/2}X,\Omega^1_X(2NP_0)^{\boxtimes(kN-l/2)}_{(k+1\,;\,l_1,\dots,l_n)}),$$

где P_0 — любая точка, отличная от $P_1,\dots,P_n$. Если l нечетно, то

$$M(X\,;\,P_1,\dots,P_n\,;\,\pi_1,\dots,\pi_n)=0\,.$$

Теперь посмотрим, что произойдет с нашей конструкцией при вырождении кривой. Пусть X — кривая с простой двойной точкой Q, $\widetilde{X}\to X$ — ее нормализация, а Q_1 и $Q_2\in\widetilde{X}$ — прообразы особой точки. Каноническое расслоение на X вырождается в пучок Ω^1_X 1-форм на $\widetilde{X}$, имеющих простые полюсы с противоположными вычетами в точках Q_1 и Q_2. С учетом этого изменения определение 1 и теорема 3$'$ переносятся на вырожденный случай. Точная последовательность

$$0\to H^0(\widetilde{X},\Omega^1_{\widetilde{X}}(2NP_0))\to H^0(X,\Omega^1_X(2NP_0))\to\mathbb{C}\to 0$$

(вторая стрелка — вычет в точке Q_1) индуцирует $(m+1)$-членную фильтрацию на пространстве

$$S^m H^0(X, \Omega^1_X(2NP_0)) \cong H^0(S^m X, \Omega^1_X(2NP_0)^{\boxtimes m}),$$

где $m = kN - l/2$, с присоединенными факторами $S^{m-i}H^0(\widetilde{X}, \Omega^1_{\widetilde{X}}(2NP_0))$ и, следовательно, фильтрацию на подпространстве

$$H^0(S^m X, \Omega^1_X(2NP_0)^{\boxtimes m}_{(k+1\,;\,l_1,\dots,l_n)}).$$

Легко видеть, что i-й присоединенный фактор этой фильтрации изоморфен

$$H^0(S^{m-i}\widetilde{X}, \Omega^1_{\widetilde{X}}(2NP_0)^{\boxtimes(m-i)}_{(k+1\,;\,l_1,\dots,l_n,i,i)}) \cong M(\widetilde{X}\,;\, P_1,\dots,P_n,Q_1,Q_2\,;\,\pi_1,\dots,\pi_n,\pi,\pi)$$

для достаточно больших N (π — представление со старшим весом $(0,i,k)$). Отсюда получаются правила слияния, по крайней мере на уровне размерностей:

$$\dim M(X\,;\,P_1,\dots,P_n\,;\,\pi_1,\dots,\pi_n) = \sum_{\pi} \dim M(\widetilde{X}\,;\,P_1,\dots,P_n,Q_1,Q_2\,;\,\pi_1,\dots,\pi_n,\pi,\pi).$$

Наконец, отметим, что конструкции этого параграфа без особых трудностей переносятся на случай произвольной алгебры $\mathfrak{g}$. Описание пространства W^*, аналогичное (1)–(2), см. в [5, (1.1.2)]. В результате, например, имеет место

Теорема 3 (общий случай). *Пусть $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ — простые корни алгебры Ли $\mathfrak{g}$, (a_{ij}) — ее матрица Картана, ε_i — симметризующий множитель ($\varepsilon_i = 2/\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle = 1, 2$ или 3) и $k_i = k\cdot\varepsilon_i$. Рассмотрим многообразие $SX = S^{k_1N^{(1)}}X\times\dots\times S^{k_rN^{(r)}}X$, точками которого являются наборы $(x_j(\alpha_i))$, $i = 1,\dots,r$, $j = 1,\dots,k_iN^{(i)}$, «частиц» $x_j(\alpha_i)\in X$ цветов $\alpha_1,\dots,\alpha_r$, причем частицы одного цвета неразличимы. Пусть $\Delta(\alpha_i,\alpha_j) = \{x_{i'}(\alpha_i) = x_{j'}(\alpha_j)\}$ — дивизор совпадения двух частиц цветов α_i и α_j. Тогда для достаточно больших $N^{(1)},\dots,N^{(r)}$*

$$M(X) \cong H^0\Bigg(SX, \mathop{\boxtimes}_{j=1}^{r} \Omega^1_X\Big(\sum_i a_{ij}N^{(i)}P_0\Big)^{\boxtimes k_jN^{(j)}} \otimes \mathcal{O}\Big(\sum_{i<j}\Delta(\alpha_i,\alpha_j)\Big)^{\mathrm{Serre}}_{(k+1)}\Bigg),$$

где индексы означают, что сечение должно обращаться в нуль на множествах

(1) $x_1(\alpha_i) = \dots = x_{1-a_{ij}}(\alpha_i) = x_1(\alpha_j)$ (дуальные серровские соотношения);

(2) $x_1(\alpha_i) = \dots = x_{k_i+1}(\alpha_i)$.

Заметим, что если $a_{ij} = 0$, то нули (1) компенсируют полюсы вдоль $\Delta(\alpha_i,\alpha_j)$.

Легко также найти аналог теоремы $3'$. Особенно интересно проследить, как возникают правила слияния; к сожалению, недостаток места не позволяет нам привести здесь их вывод.

Существует и более простая конструкция пространства конформных блоков, основанная на усилении теоремы 1, см. §5, теорема 10.

§ 3. Доказательство теоремы 1 в случае $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_2$, $k=1$

Мы должны показать, что проекция $V_1\to H_0(\mathfrak{h}\ltimes L^{\mathrm{out}}\mathfrak{n}_+,V_1)$ пропускается через факторизацию пространства V_1 по действию алгебр $L^{\mathrm{out}}\mathfrak{h}$ и $L^{\mathrm{out}}\mathfrak{n}_-$. Фактически мы докажем большее:

Предложение 4. *Существует естественная коммутативная диаграмма*

$$\begin{tikzcd} & H_0(L^{\mathrm{out}}\mathfrak{h},V_1) \arrow[r, "\rho"] & H^0(J,\mathcal{O}(2\Theta))^* \\ V_1 \arrow[ur, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] & & \\ & H_0(\mathfrak{h}\ltimes L^{\mathrm{out}}\mathfrak{n}_+,V_1) & H^0(S^NX,\Omega^1_X(2NP_0)^{\boxtimes N}\otimes\mathcal{O}(-\Delta))^*. \arrow[l, "\nu_N"', shift right] \arrow[l, shift left] \arrow[uu, Rightarrow, "\varkappa_{N*}"'] \end{tikzcd} \tag{5}$$

Здесь J — якобиан кривой X, Θ — тэта-дивизор, Δ — диагональ в S^NX (см. пример 2 после теоремы 3), $N\geqslant g$. Точно такая же диаграмма существует для алгебры $\mathfrak{n}_-$ вместо $\mathfrak{n}_+$.

Поясним стрелки в диаграмме:

1) p_1 и p_2 — естественные проекции.

2) $\varkappa_{N*}$ индуцировано стандартным отображением $\varkappa_N\colon S^NX\to J$,

$$\varkappa_N(x_1,\ldots,x_N)=[x_1+\cdots+x_N-NP_0].$$

Известный факт теории алгебраических кривых состоит в том, что

$$\varkappa_N^*\mathcal{O}(2\Theta)\cong\Omega^1_X(2NP_0)^{\boxtimes N}\otimes\mathcal{O}(-\Delta)$$

(при $N=1$ это теорема Римана). Слои отображения $\varkappa_N$ — проективные пространства, и при $N\geqslant g$ оно сюръективно. Отсюда следует, что $\varkappa_{N*}$ — изоморфизм при $N\geqslant g$.

3) ν_N — композиция изоморфизма, установленного в предложении 2, и вложения $W^{(0)}_{-N}/\hat{\mathfrak{n}}^{\mathrm{out}}_+W^{(-2)}_{-N}\hookrightarrow H_0(\mathfrak{h}\ltimes\hat{\mathfrak{n}}^{\mathrm{out}}_+,V_1)$. Отображение ν_N является изоморфизмом при $N\geqslant g$. Действительно, пространства $\mathcal{C}_N$ стабилизируются при $N\geqslant g$, согласно п. 2), а их объединение исчерпывает пространство $H_0(\mathfrak{h}\ltimes\hat{\mathfrak{n}}^{\mathrm{out}}_+,V_1)$.

4) Наконец, чтобы определить отображение ρ, напомним некоторые факты о представлениях однородной подалгебры Гейзенберга $\hat{\mathfrak{h}}=L\mathfrak{h}+\mathbb{C}\cdot K\subset\widehat{\mathfrak{sl}}_2$. Неприводимые представления $\mathcal{H}_\mu$ алгебры $\hat{\mathfrak{h}}$ уровня $k=1$ задаются одним параметром μ — действием центрального элемента $h_0\in\hat{\mathfrak{h}}$, $h_0\colon S^1\to\mathfrak{h}$ — постоянное отображение. Представление $\mathcal{H}_\mu$ реализуется в двойственном пространстве к пространству $\mathrm{Hol}(\mathcal{V})$ голоморфных функций на векторном пространстве $\mathcal{V}=L\mathfrak{h}/L^{\mathrm{in}}\mathfrak{h}$. Далее, напомним однородную реализацию базисного представления:

$$V_1\cong\ldots\oplus\mathcal{H}_{-4}\oplus\mathcal{H}_{-2}\oplus\mathcal{H}_0\oplus\mathcal{H}_2\oplus\mathcal{H}_4\oplus\ldots. \tag{6}$$

Теперь имеем

$$H_0(L^{\mathrm{out}}\mathfrak{h},V_1)\cong H_0(L^{\mathrm{out}}\mathfrak{h},\mathcal{H}_0)\cong(\mathrm{Hol}(L^{\mathrm{out}}\mathfrak{h}\setminus\mathcal{V}))^*\cong(\mathrm{Hol}(H^1(X,\mathcal{O})))^*. \tag{7}$$

Пусть $T=\mathbb{C}^*$ — тор с алгеброй Ли $\mathfrak{h}$ и $\widehat{T}$ — группа Гейзенберга, т.е. центральное расширение связной компоненты L^0T группы петель со значениями в T. Отождествим пространство $\mathcal{V}$ с $L^0T/L^{\mathrm{in}}T$ при помощи экспоненты $\mathbb{C}\to\mathbb{C}^*$. Чтобы получить пространство тэта-функций, нужно факторизовать представление $\mathcal{H}_0$ по действию подгруппы $L^{\mathrm{out}}T \subset \widehat{T}$; иными словами, нужно дополнительно факторизовать пространство $(\mathrm{Hol}(H^1(X,\mathcal{O})))^*$ по действию решетки $\mathbb{Z}^{2g}$ связных компонент группы $L^{\mathrm{out}}T$:

$$\mathbb{Z}^{2g} \setminus H^1(X,\mathcal{O}) \cong L^{\mathrm{out}}T \setminus L^0T/L^{\mathrm{in}}T \cong J,$$

$$\mathbb{Z}^{2g} \setminus (\mathrm{Hol}(H^1(X,\mathcal{O})))^* \cong (\mathrm{Hol}(H^1(X,\mathcal{O}))^{\mathbb{Z}^{2g}})^* \cong H^0(J,\mathcal{O}(2\Theta))^*. \tag{8}$$

Изоморфизмы (7) и (8) дают искомое отображение ρ.

Осталось доказать коммутативность диаграммы (5). Введем обозначения, которыми будем пользоваться и в дальнейшем. Пусть $\{e,f,h\}$ — стандартный базис в $\mathfrak{sl}_2$, а $\{e_i(=e\otimes t^i), f_i, h_i, K\}$ — (топологический) базис в $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$. Напомним, что в однородной реализации (6) действие элементов e_i, f_j задается компонентами вертексного оператора $B^{\pm}(z)=\sum_{i\in\mathbb{Z}} B_i^{\pm} z^{-i-1}$, который определяется следующей формулой:

$$B^{\pm}(z) = z^{\pm h_0} \exp\biggl(\mp \sum_{i<0} \frac{h_i}{i} z^{-i}\biggr)\cdot T_{\pm 1}\cdot \exp\biggl(\mp\sum_{i>0}\frac{h_i}{i} z^{-i}\biggr). \tag{9}$$

Здесь $T_{\pm 1}$ — сдвиги из аффинной группы Вейля, коммутирующие с h_i при $i\neq 0$. (Формула записана в нормально упорядоченном виде: сначала действуют операторы уничтожения, а потом операторы рождения, так что оператор $B^{\pm}(z)$ корректно определен.) Если ввести производящие функции или «поля» $e(z)=\sum_{i\in\mathbb{Z}} e_i z^{-i-1}$ и $f(z)=\sum_{i\in\mathbb{Z}} f_i z^{-i-1}$, то $e(z)=B^+(z)$ и $f(z)=B^-(z)$.

Коммутативность диаграммы (5) следует из коммутативности соответствующей «локальной» диаграммы:

Лемма 1. *Диаграмма*

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{H}_0 \arrow[r, equal, "\cong"] & \mathrm{Hol}(L^0\mathbb{C}^*/L^{\mathrm{in}}\mathbb{C}^*)^* \\ V_1 \arrow[ur, "\widetilde{\rho}"] & & \\ & W_{-N}^{(0)} \arrow[ul, hook'] & H^0(S^ND,\Omega^1_D(2NP_0)^{\boxtimes N}\otimes\mathcal{O}(-\Delta))^* \arrow[l, "\widetilde{\nu}_N"', "\cong"] \arrow[uu, "\widetilde{\varkappa}_{N*}"'] \end{tikzcd}$$

в которой вертикальная стрелка индуцирована отображением

$$\widetilde{\varkappa}_N\colon S^ND \to L^0\mathbb{C}^*/L^{\mathrm{in}}\mathbb{C}^*,$$

переводящим точку $(z_1,\dots,z_N)\in S^ND$ *в класс элемента*

$$(1-z_1/t)^{-1}\dots(1-z_N/t)^{-1}\in L^0\mathbb{C}^*$$

($t=e^{i\varphi}$ — параметр на единичной окружности), коммутативна.

Доказательство. Положим $E_{\pm}(z)=\exp(-\sum_{\pm i>0} h_i z^{-i}/i)$. Согласно формуле (9), отображение $\widetilde{\nu}_N$ переводит «обобщенный элемент» $(z_1,\dots,z_N)\in S^ND$ в

$$E_-(z_1)E_+(z_1)E_-(z_2)E_+(z_2)\dots E_-(z_N)E_+(z_N)\cdot z_1^{-2}z_2^{-4}\dots z_N^{-2N}\cdot v\in V_1.$$

Непосредственно проверяется, что отображение $\widetilde{\varkappa}_{N*}$ переводит $(z_1,\dots,z_N)$ в

$$E_-(z_1)\dots E_-(z_N)\cdot\prod_{i<j}(z_i-z_j)^2\cdot\Bigl(\prod z_i\Bigr)^{-2N}\cdot v\in\mathcal{H}_0\subset V_1.$$

Эти два выражения равны ввиду стандартного тождества

$$E_+(z_i)\,E_-(z_j) = E_-(z_j)\,E_+(z_i)(1 - z_j/z_i)^2$$

(см. [7]). Лемма доказана.

Последнее утверждение предложения 4 очевидно: те же самые рассуждения проходят с заменой $\mathfrak{n}_+$ на $\mathfrak{n}_-$. Тем самым доказательство предложения 4, а с ним и теоремы 1, закончено.

§4. «Вертексная подалгебра» A_k и ее представления

Попытаемся применить метод предыдущего параграфа к доказательству теоремы 1 в случае $k > 1$. Трудность состоит в том, что поле $e(z)$ теперь не является вертексным оператором, так что не удается непосредственно связать пространство $\mathcal{C}_N$ с пространством тэта-функций. Однако, рассмотрим поля

$$e(z)^m = \sum S_i^+(m)\,z^{-i-1}, \qquad f(z)^m = \sum S_i^-(m)\,z^{-i-1},$$

где

$$S_i^+(m) = \sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_m=i+1-m} e_{\alpha_1}\dots e_{\alpha_m}, \quad S_i^-(m) = \sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_m=i+1-m} f_{\alpha_1}\dots f_{\alpha_m}.$$

(Элементы $S_i^{\pm}(m)$ лежат в пополненной универсальной обертывающей алгебре $\widetilde{U}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$, которая состоит из выражений, действующих на представлениях со старшим весом.) Тогда справедливо

Предложение 5. *Операторы $e(z)$ и $f(z)$ на пространстве интегрируемого представления алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ уровня k удовлетворяют соотношениям*

а) $e(z)^{k+1} = f(z)^{k+1} = 0$ (*т.е.* $S_i^{\pm}(k+1) = 0$);

б) $e(z)^k = B^+(z), f(z)^k = B^-(z)$ — *вертексные операторы* (9);

в) $f(z) = \frac{1}{(k-1)!}(z_1 - z_2)^{2k-2}e(z_1)^{k-1}\cdot B^-(z_2)|_{z_1=z_2=z}$,
$e(z) = \frac{1}{(k-1)!}(z_1 - z_2)^{2k-2}f(z_1)^{k-1}\cdot B^+(z_2)|_{z_1=z_2=z}$.

Доказательство этих формул см. в [7].

Равенство (б) мотивирует наши дальнейшие действия. Мы вводим «вертексную алгебру» A_k, порожденную операторами $e(z)^k$ и $f(z)^k$, и повторяем применительно к ней рассуждения §2–3. Используя полученные результаты, мы доказываем, что $L^{\mathrm{out}}\mathfrak{h}\cdot V_k \subset (\mathfrak{h}\ltimes L^{\mathrm{out}}\mathfrak{n}_+)\cdot V_k$.

Пусть $\mathfrak{n}_+^m = \mathbb{C}\cdot e^m$ и $\mathfrak{n}_-^m = \mathbb{C}\cdot f^m$ — одномерные пространства, $\mathcal{F}_{1-m} = \{\psi(z)(dz)^{1-m}\}$ — пространство тензорных полей на окружности веса $1-m$ ($\psi(z)$ — аналитическая функция) и $L\mathfrak{n}_{\pm}^m = \mathcal{F}_{1-m}\otimes\mathfrak{n}_{\pm}^m$. Вложим пространство $L\mathfrak{n}_+^m$ в $\widetilde{U}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ по формуле

$$\psi(z)(dz)^{1-m}\otimes e^m \mapsto \frac{1}{2\pi i}\int e(z)^m\psi(z)\,dz$$

(здесь поле $e(z)^m$ рассматривается как операторнозначное распределение на окружности), так что $z^i(dz)^{1-m}\otimes e^m$ переходит в $S_i^+(m)$. Аналогично вложим $L\mathfrak{n}_-^m$ в $\widetilde{U}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$. Легко проверить, что эти вложения естественны относительно действия алгебры Ли векторных полей $\mathrm{Vect}\,(S^1)$.

Положим $U_k = \widetilde{U}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)/J_k$, где J_k — двусторонний идеал, порожденный элементом $K - k$ и пространством $L\mathfrak{n}_+^{k+1}$. Легко видеть, что и $L\mathfrak{n}_-^{k+1} \subset J_k$. Согласно п. а) предложения 5, любое интегрируемое представление алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ уровня k является модулем над U_k. Можно показать, что верно и обратное: любой U_k-модуль является интегрируемым $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$-модулем.

Определение 2. Алгебра A_k — это подалгебра в U_k, порожденная пространствами $L\mathfrak{n}_\pm^k$.

Заметим, что однородная подалгебра Гейзенберга $\hat{\mathfrak{h}}$ содержится в A_k. Действительно, определим отображение $\theta\colon \mathcal{F}_{1-k} \otimes \mathcal{F}_{1-k} \to A_k$ по формуле

$$\varphi(z_1, z_2)(dz_1)^{1-k}(dz_2)^{1-k} \mapsto \frac{1}{(2\pi i)^2} \int \varphi(z_1, z_2)[S^+(z_1), S^-(z_2)]\, dz_1 dz_2,$$

где $S^+(z) = e(z)^k$, $S^-(z) = f(z)^k$. Очевидно, это $\mathrm{Vect}(S^1)$-гомоморфизм. Рассмотрим фильтрацию $F_0 \supset F_1 \supset F_2 \supset \ldots$ $\mathrm{Vect}(S^1)$-модуля $\mathcal{F}_{1-k} \otimes \mathcal{F}_{1-k}$, где $F_i = \{(z_1 - z_2)^i \psi(z_1, z_2)(dz_1)^{1-k}(dz_2)^{1-k}\}$; ясно, что $F_i/F_{i+1} \cong \mathcal{F}_{2-2k+i}$. Тогда $\theta|_{F_{2k}} = 0, \theta(F_{2k-1}) = \mathbb{C} \cdot K$, а $\theta(F_{2k-2}) = \hat{\mathfrak{h}}$. То же самое можно сказать и по-другому: существует операторное разложение [4]

$$S^+(z_1)\, S^-(z_2) = \frac{1}{(z_1 - z_2)^{2k}} + \frac{a(z_1)}{(z_1 - z_2)^{2k-1}} + O\left(\frac{1}{(z_1 - z_2)^{2k-2}}\right), \tag{10}$$

где поле $a(z)$ порождает алгебру $\hat{\mathfrak{h}}$ (его коэффициенты a_i совпадают с h_i с точностью до числового множителя).

Опишем вкратце, как конструкции §2–3 переносятся на алгебру A_k.

1) *Образующие и соотношения в алгебре* A_k. Положим

$$h(z) = \sum h_i \cdot z^{-i-1}.$$

Лемма 2. *Определяющие соотношения в* A_k *имеют вид*

(i) $[h(z_1), S^\pm(z_2)] = \pm 2k\delta(z_1 - z_2)\, S^\pm(z_1)$;

(ii) $:h(z)\, S^\pm(z): = \pm S^\pm(z)'$.

(*Две точки означают нормальное упорядочение.*) *Иными словами, имеет место операторное разложение*

$$h(z_1)\, S^\pm(z_2) = \frac{\pm 2k S^\pm(z_1)}{z_1 - z_2} \pm S^\pm(z_1)' + O(z_1 - z_2).$$

Соотношение (i) очевидно; (ii) получается, если приравнять нулю в U_k коммутаторы $[f_0, e(z)^{k+1}]$ и $[e_0, f(z)^{k+1}]$.

Обозначим через $U(\hat{\mathfrak{n}}_+^k)$ подалгебру в A_k, порожденную пространством $\hat{\mathfrak{n}}_+^k = L\mathfrak{n}_+^k$.

Лемма 3. *Определяющие соотношения в* $U(\hat{\mathfrak{n}}_+^k)$ *состоят в том, что выражение* $S^+(z_1)\, S^+(z_2)$ *обращается в нуль на диагонали* $z_1 = z_2$ *с кратностью* $2k$:

$$S^+(z_1)\, S^+(z_2)\delta(z_1 - z_2) = S^+(z_1)\, S^+(z_2)\delta'(z_1 - z_2) = \ldots$$
$$= S^+(z_1)\, S^+(z_2)\delta^{(2k-1)}(z_1 - z_2) = 0.$$

Эти соотношения следуют из равенства $e(z)^{k+1}=0$.

2) *Неприводимые представления алгебры* A_k. Пусть m — целое число, $0\leqslant m\leqslant 2k-1$, и пусть $\mathcal{H}_{2kn+m}$ — неприводимое представление алгебры $\hat{\mathfrak{h}}$ уровня k, содержащее вакуумный вектор w_n, такой, что $h_0w_n=(2kn+m)w_n$, $h_iw_n=0$ при $i>0$. Положим $P(m)=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathcal{H}_{2kn+m}$ и определим действие алгебры A_k на $P(m)$ равенством $S^{\pm}(z)=B^{\pm}(z)$; вертексный оператор $B^{\pm}(z)\colon\mathcal{H}_\mu\to\mathcal{H}_{\mu\pm 2k}$ задается формулой (9), в которой $T_{\pm1}$ — изоморфизм $\mathcal{H}_\mu\to\mathcal{H}_{\mu\pm2k}$, коммутирующий с h_i, $i\neq0$. Легко видеть, что $P(0),\dots,P(2k-1)$ — полный набор попарно неизоморфных неприводимых представлений алгебры A_k. (В частности, любой интегрируемый $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$-модуль уровня k при ограничении на A_k распадается в прямую сумму таких представлений.) Действительно, тот факт, что элемент $S^{\pm}(z)$ действует вертексным оператором на любом представлении, равносилен, как известно, соотношениям (i)–(ii) из леммы 2.

3) «*Основное подпространство*» $\overline{W}_{-N}$ в $P(m)$ определяется как $U(\hat{\mathfrak{n}}_+^k)\cdot w_{-N}$. Оно распадается в прямую сумму своих h_0-весовых компонент $\overline{W}_{-N}^{(2kn+m)}$, $n\geqslant -N$. Из леммы 3 вытекает описание пространства $\overline{W}^*_{-N}$, аналогичное (1):

$$\overline{W}_{-N}^{(2kn+m)*}\cong\Bigl\{\varphi(z_1,\dots,z_{n+N})\prod(z_i-z_j)^{2k}\Bigl(\prod z_i\Bigr)^{-2kN+m}\prod(dz_i)^k\Bigr\},\qquad(11)$$

φ — голоморфная функция от $z_i\in D$.

4) *Модулярный функтор относительно* A_k. Пусть $L^{\mathrm{out}}\mathfrak{n}^k_{\pm}$ — подпространство в $L\mathfrak{n}^k_{\pm}$, состоящее из тензорных полей $\psi(z)(dz)^{1-k}$, аналитически продолжающихся на $X\setminus D$. Аналогично предложению 2, из (11) выводим

$$(\overline{W}_{-N}^{(0)}/L^{\mathrm{out}}\mathfrak{n}^k_+\cdot\overline{W}_{-N}^{(-2k)})^*\cong H^0(S^NX,(\Omega^1_X(2NP_0)^{\otimes k})^{\boxtimes N}\otimes\mathcal{O}(-k\Delta)).\qquad(12)$$

Введем обозначение $L^{\mathrm{out}}\mathfrak{g}^{(k)}=L^{\mathrm{out}}\mathfrak{n}^k_++L^{\mathrm{out}}\mathfrak{h}+L^{\mathrm{out}}\mathfrak{n}^k_-\subset A_k$. Модулярным функтором относительно A_k назовем пространство

$$M^{(k)}(X)=(P(0)/L^{\mathrm{out}}\mathfrak{g}^{(k)}P(0))^*.$$

Модулярный функтор изоморфен пространству (12) и пространству тэта-функций порядка $2k$, как показывает

Предложение 6. *Пусть* $N\geqslant g$. *Естественная диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
 & H_0(L^{\mathrm{out}}\mathfrak{h},P(0)) \arrow[r, "\rho"] & H^0(J,\mathcal{O}(2k\Theta))^* \\
P(0) \arrow[ur, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] & & \\
 & H_0(\mathfrak{h}\ltimes L^{\mathrm{out}}\mathfrak{n}^k_{\pm},P(0)) & H^0(S^NX,(\Omega^1_X(2NP_0)^{\otimes k})^{\boxtimes N}\otimes\mathcal{O}(-k\Delta))^* \arrow[l, Leftarrow, "\nu_N"'] \arrow[uu, "\varkappa_{N*}"']
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Доказательство полностью аналогично доказательству предложения 4.

Мы повторили путь, пройденный в §2–3 в случае $k=1$. Осталось выяснить, как пространство $M^{(k)}(X)$ связано с обычным модулярным функтором $M(X)$.

Вложение прямого слагаемого $P(0) \to V_k, w_n \mapsto T_n v$, дает коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & V_k/L^{\mathrm{out}}\mathfrak{g}^{(k)}V_k \arrow[r] & M^{(k)}(X)^* \arrow[r, equal] & H^0(S^N X, (\Omega^1_X(2NP_0)^{\otimes k})^{\boxtimes N} \otimes \mathcal{O}(-k\Delta))^* \arrow[d, "\delta_*"] \\ V_k \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\ & H_0(\mathfrak{h} \ltimes L^{\mathrm{out}}\mathfrak{n}_+, V_k) & & H^0(S^{kN}X, \Omega^1_X(2NP_0)^{\boxtimes kN}_{(k+1)})^* . \arrow[ll, "\nu_N"'] \end{tikzcd} \tag{13}$$

Стрелка δ_* индуцирована диагональным вложением $\delta\colon S^N X \to S^{kN} X$.

Из коммутативности диаграммы следует основной результат этого параграфа:

Предложение 7. $(L^{\mathrm{out}}\mathfrak{g}^{(k)}) \cdot V_k \subset (\mathfrak{h} \ltimes L^{\mathrm{out}}\mathfrak{n}_+) \cdot V_k$.

§5. Окончание доказательства теоремы 1

Сначала завершим доказательство теоремы в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$. Нам осталось показать, что $(L^{\mathrm{out}}\mathfrak{n}_-) \cdot V_k \subset (\mathfrak{h} \ltimes L^{\mathrm{out}}\mathfrak{n}_+) \cdot V_k$. Предложение 7 дает

$$(L^{\mathrm{out}}\mathfrak{n}_-^k) \cdot V_k \subset (\mathfrak{h} \ltimes L^{\mathrm{out}}\mathfrak{n}_+) \cdot V_k .$$

Но элементы пространства $L\mathfrak{n}_-$ выражаются через $L\mathfrak{n}_-^k$ и $L\mathfrak{n}_+^{k-1}$ по формуле (в) из предложения 5. Мы уже встречались с похожей ситуацией в §4 (ср. (10)), когда выражали элементы однородной подалгебры Гейзенберга через $L\mathfrak{n}_\pm^k$. Рассмотрим отображение $\chi\colon \mathcal{F}_{2-k} \otimes \mathcal{F}_{1-k} \to U_k$,

$$\chi\colon \varphi(z_1, z_2)(dz_1)^{2-k}(dz_2)^{1-k} \mapsto \frac{1}{(2\pi i)^2} \int \varphi(z_1, z_2)[e(z_1)^{k-1}, f(z_2)^k]\, dz_1 dz_2 ,$$

и определим фильтрацию $G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \dots$ на $\mathcal{F}_{2-k} \otimes \mathcal{F}_{1-k}$ по порядку обращения в нуль на диагонали. Тогда из предложения 5(в) можно вывести, что $\chi|_{G_{2k-2}} = 0$, а $\chi(G_{2k-3}) = L\mathfrak{n}_-$:

$$\chi(\psi(z_1, z_2)(z_1 - z_2)^{2k-3}(dz_1)^{2-k}(dz_2)^{1-k}) = (k-1)!\, \psi(z, z) \otimes f .$$

Далее, ограничение отображения χ на подпространство тензорных полей, аналитически продолжающихся на $(X \setminus D)^2$, есть сюръекция

$$\overline{\chi}\colon H^0((X \setminus D)^2, (\Omega_X^{1\otimes(2-k)} \boxtimes \Omega_X^{1\otimes(1-k)}) \otimes \mathcal{O}(-(2k-3)\Delta_{X^2})) \to L^{\mathrm{out}}\mathfrak{n}_-$$

(Δ_{X^2} — диагональ в X^2), откуда ясно, что

$$(L^{\mathrm{out}}\mathfrak{n}_-) \cdot V_k \subset (L^{\mathrm{out}}\mathfrak{n}_+^{k-1} + L^{\mathrm{out}}\mathfrak{n}_-^k) \cdot V_k .$$

Наконец, включение

$$(L^{\mathrm{out}}\mathfrak{n}_+^{k-1}) \cdot V_k \subset (L^{\mathrm{out}}\mathfrak{n}_+) \cdot V_k$$

двойственно к ограничению на диагональ (ср. §4)

$$\varphi(z_1, \dots, z_{k-1})\, dz_1 \dots dz_{k-1} \mapsto \varphi(z, \dots, z)(dz)^{k-1}.$$

В итоге получаем $(L^{\mathrm{out}}\mathfrak{n}_-) \cdot V_k \subset (\mathfrak{h} \ltimes L^{\mathrm{out}}\mathfrak{n}_+) \cdot V_k$, что и требовалось.

Общий случай теоремы легко сводится к случаю $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$. Действительно, пусть $e_1, \dots, e_r, f_1, \dots, f_r, h_1, \dots, h_r$ — стандартные образующие полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$, и пусть $\mathfrak{sl}_2(i)$ — подалгебра с базисом $\{e_i, f_i, h_i\}$. Вакуумное представление V_k алгебры $\hat{\mathfrak{g}}$ при ограничении на $\widehat{\mathfrak{sl}}_2(i)$ распадается в прямую сумму неприводимых интегрируемых представлений алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ уровня $k_i = k \cdot \varepsilon_i$ (ср. с формулировкой теоремы 3, общий случай). Из теоремы 1 для алгебры $\mathfrak{sl}_2$ заключаем, что

$$(L^{\mathrm{out}}\mathfrak{sl}_2(i)) \cdot V_k \subset (\mathfrak{h} \ltimes L^{\mathrm{out}}\mathfrak{n}_+) \cdot V_k\,.$$

Теперь для доказательства теоремы достаточно заметить, что пространства $L^{\mathrm{out}}\mathfrak{sl}_2(i)$ порождают алгебру $L^{\mathrm{out}}\mathfrak{g}$.

Отметим, что точно такое же рассуждение доказывает и более сильную теорему:

Теорема 8. *Пусть $\mathfrak{n}$ — подалгебра в $\mathfrak{n}_+$, являющаяся суммой корневых подпространств алгебры $\mathfrak{g}$, и пусть $\mathfrak{n}^0 \subset \mathfrak{n}_-$ — противоположная подалгебра. Если пространство $\mathfrak{n} + \mathfrak{n}^0$ порождает алгебру $\mathfrak{g}$, то*

$$H_0(L^{\mathrm{out}}\mathfrak{g}, V_k) \cong H_0(\mathfrak{h} \ltimes L^{\mathrm{out}}\mathfrak{n}, V_k)\,.$$

Например, в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ минимальной подалгеброй $\mathfrak{n}$, удовлетворяющей условию теоремы 8, является алгебра матриц, у которых все столбцы, кроме последнего, нулевые.

Теорема 8 приводит к своей конструкции модулярного функтора для каждой алгебры $\mathfrak{n}$. Рассмотрим, как и в случае $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_+$, подпространство $W = U(\hat{\mathfrak{n}}) \cdot v \cong U(\hat{\mathfrak{n}})/I$ в вакуумном представлении. Из условия на алгебру $\mathfrak{n}$ следует, что $V_k = \bigcup_{\omega \in \check{T}} (\omega \cdot W)$. Остается найти образующие идеала I и предъявить описание пространства $(\omega \cdot W)^*$, аналогичное (1). Приведем ответ для «подалгебры последнего столбца» $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{sl}_n$. Пусть $e_{in} \in \mathfrak{n}$ — матрица с единственным ненулевым элементом в i-й строке, $i = 1, \ldots, n-1$; пусть $\alpha_{in} \in \mathfrak{h}^*$ — соответствующий корень, а $h_{in} \in \check{T} \subset \mathfrak{h}$ — кокорень.

Предложение 9. а) *Идеал I порожден пространством $L^{\mathrm{in}}\mathfrak{n}$ и выражениями вида*

$$e_{1n}(z)^{m_1} \ldots e_{n-1,n}(z)^{m_{n-1}}\,,$$

где $m_i \geqslant 0$, $\sum m_i = k + 1$.

б) *Пусть $\omega = -(N^{(1)} h_{1n} + \cdots + N^{(n-1)} h_{n-1,n}) \in \check{T}$. Тогда*

$$(\omega \cdot W)^{(0)*} \cong \Big\{ \varphi(z_i(\alpha_{jn})) \cdot \prod_{i,j} z_i(\alpha_{jn})^{-(N^{(j)} + \sum_s N^{(s)})} \prod_{i,j} dz_i(\alpha_{jn}) \Big\}, \qquad (14)$$

$\varphi(z_i(\alpha_{jn}))$ — функция от наборов «частиц» $z_i(\alpha_{jn}) \in D$ «цветов» α_{jn}, $j = 1, \ldots, n-1$, $i = 1, \ldots, kN^{(j)}$, симметричная по каждой из групп частиц одного цвета и обращающаяся в нуль, если $k+1$ частиц совпадают (независимо от цвета).

Предложение можно доказать, вычисляя характер пространства (14), переходя к пределу по ω и сравнивая с известной формулой характера для V_k [5, (1.1.4)] либо рассматривая стратификацию замыкания «полубесконечной клетки» в многообразии флагов алгебры $\hat{\mathfrak{g}}$ (ср. §II.5) аналогично п. 3.4 в [5].

В итоге получаем следующую конструкцию модулярного функтора:

Теорема 10. *Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ и $N^{(1)}, \ldots, N^{(n-1)}$ — достаточно большие числа. Тогда*

$$M(X) \cong H^0\Big(SX, \Big(\mathop{\boxtimes}_{j=1}^{n-1} L_j^{\boxtimes kN^{(j)}}\Big)_{(k+1)}\Big),$$

где $SX = S^{kN^{(1)}}X \times \cdots \times S^{kN^{(n-1)}}X$, $L_j = \Omega^1_X((N^{(j)} + \sum_{s=1}^{n-1} N^{(s)})P_0)$ — *линейное расслоение на* X *и индекс* $(k+1)$ *означает, что сечение должно обращаться в нуль на наборах* $(x_i(\alpha_{jn}))$ *точек* $x_i(\alpha_{jn}) \in X$, $k+1$ *из которых совпадают.*

В §II.5 мы свяжем этот результат с конструкцией геометрической аппроксимации многообразия модулей n-мерных расслоений.

Часть II

§1. Предварительные сведения

Напомним [6, разд. 8.11], что множество классов изоморфизма голоморфных G-расслоений на римановой поверхности X отождествляется с пространством двойных смежных классов $L^{\mathrm{out}}G \setminus LG/L^{\mathrm{in}}G$, где $L^{\mathrm{in}}G$ и $L^{\mathrm{out}}G$ — подгруппы в группе LG аналитических петель группы G, состоящие из петель $S^1 \to G$, продолжающихся до голоморфных отображений $D \to G$ и $X \setminus D \to G$ соответственно (здесь мы, как и в п. 0.1, отождествили окрестность отмеченной точки P_0 в X с единичным диском D). Множество двойных смежных классов с фактортопологией неотделимо, и чтобы придать ему структуру проективного многообразия, нужно исключить нестабильные расслоения и склеить эквивалентные полустабильные расслоения. Получающееся многообразие модулей G-расслоений (в смысле Мамфорда [11]) обозначим через $\mathcal{M}$. Пусть $\mathcal{P} = LG/L^{\mathrm{in}}G$, $p\colon \mathcal{P} \to \mathcal{M}$ — естественная проекция (определенная не во всех точках $\mathcal{P}$) и ξ — детерминантное линейное расслоение на $\mathcal{M}$. Расслоение $p^*\xi^{\otimes k}$ продолжается до линейного расслоения $\mathcal{L}_k$ на $\mathcal{P}$, допускающего согласованное проективное действие группы LG, и пространство $H^0(\mathcal{P}, \mathcal{L}_k)$ двойственно вакуумному неприводимому представлению V_k алгебры $\hat{\mathfrak{g}}$ уровня k. Можно предположить, что возникающее линейное отображение $(V_k/L^{\mathrm{out}}\mathfrak{g} \cdot V_k)^* \to H^0(\mathcal{M}, \xi^{\otimes k})$ является изоморфизмом [3]. Мы докажем это утверждение ниже в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$, а пока используем его для переформулировки теоремы 3 (случай $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$) из §I.2: пространство $H^0(\mathcal{M}, \xi^{\otimes k})$ изоморфно $H^0(S^{kN}X, L^{\boxtimes kN}_{(k+1)})$, где $L = \Omega^1_X(2NP_0)$. Задача, которой мы будем заниматься, состоит в том, чтобы построить этот изоморфизм чисто геометрически, не обращаясь к теории представлений. Для решения задачи мы введем некоторое промежуточное многообразие между $S^{kN}X$ и $\mathcal{M}$, которое впоследствии окажется тесно связано с геометрической аппроксимацией многообразия модулей, описываемой в работах [8–10].

Вплоть до §5 положим $G = SL(2, \mathbb{C})$; соответственно $\mathcal{M}$ — многообразие модулей векторных расслоений ранга 2 с тривиальным детерминантом.

§2. Геометрическая аппроксимация

Начнем с того, что сформулируем теорему 3.2.1 из [5] с двумя изменениями: 1) петли в LG не формальные, а аналитические; 2) вместо многообразия флагов $\mathcal{F} = LG/\mathbf{B}_+$ рассматривается многообразие $\mathcal{P} = LG/L^{\mathrm{in}}G$ ($\mathcal{F}$ проектируется на $\mathcal{P}$ со слоем $\mathbb{C}P^1$).

Вложение $W_{\mathrm{aff}} \subset \mathcal{F}$ индуцирует вложение $\mathbb{Z} = \{T_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathcal{P}$,

$$T_n = \begin{pmatrix} t^{-n} & 0 \\ 0 & t^n \end{pmatrix}$$

($t = e^{i\varphi}$ — параметр на единичной окружности). Пусть, как и в [5], $\mathbf{1} \in \mathcal{P}$ — единичный класс смежности, $\widehat{\mathcal{N}}_+ = L\mathcal{N}_+$ — группа петель со значениями в группе $\mathcal{N}_+$ верхнетреугольных матриц и $M = \overline{\widehat{\mathcal{N}}_+ \cdot \mathbf{1}} \subset \mathcal{P}$. Тогда подпространство $W \subset V_k$ двойственно к $H^0(M, \mathcal{L}_k)$.

Теорема 1. (i) *M неособо*;

(ii) $M \cap \mathbb{Z} = \{T_n, n \geqslant 0\}$;

(iii) *M стратифицировано: $M = \bigsqcup_{n\geqslant 0} Y_n$, Y_n — семейство орбит группы $\widehat{\mathcal{N}}_+$ коразмерности $2n$, параметризованное n-й симметрической степенью S^nD единичного диска; трансверсаль к семейству задается формулой*

$$S^nD \ni (z_1, \ldots, z_n) \mapsto \begin{pmatrix} \prod\limits_{i=1}^{n}(1 - z_i t^{-1})^{-1} & 0 \\ 0 & \prod\limits_{i=1}^{n}(1 - z_i t^{-1}) \end{pmatrix} \cdot T_n .$$

Рассмотрим теперь многообразие $M_{-N} = T_{-N} \cdot M$. Имеем

$$H^0(M_{-N}, \mathcal{L}_k) \cong W^*_{-N} .$$

Поэтому пространство $H_0(\mathfrak{h} \ltimes L^{\mathrm{out}}n_+, W_{-N})$ двойственно к пространству $\mathbb{C}^* \ltimes \widehat{\mathcal{N}}_+^{\mathrm{out}}$-инвариантных сечений расслоения $\mathcal{L}_k$ на многообразии M_{-N} (здесь определение группы $\widehat{\mathcal{N}}_+^{\mathrm{out}}$ очевидно, а $\mathbb{C}^*$ — тор с алгеброй Ли $\mathfrak{h}$). Мы должны, насколько это возможно, попытаться профакторизовать многообразие M_{-N} по действию группы $\mathbb{C}^* \ltimes \widehat{\mathcal{N}}_+^{\mathrm{out}}$. Приведем некоторые результаты в этом направлении. Пусть $U_N = T_{-N}(Y_0 \cup \ldots \cup Y_{N-1})$ — открытое подмножество в M_{-N}.

Предложение 2. (i) *Геометрический фактор $\mathcal{U}_N = \widehat{\mathcal{N}}_+^{\mathrm{out}} \setminus U_N$ является стратифицированным комплексно-аналитическим пространством:*

$$\mathcal{U}_N = \bigsqcup_{n=0}^{N-1} \mathcal{Y}_n ,$$

где $\mathcal{Y}_n = \widehat{\mathcal{N}}_+^{\mathrm{out}} \setminus (T_{-N}Y_n)$ — расслоение над S^nD, слой которого над точкой $(z_1, \ldots, z_n)$ изоморфен $H^1(X, \mathcal{O}(-2NP_0 + 2P_{z_1} + \ldots + 2P_{z_n}))$, $P_{z_i} \in X$ — точка с координатой z_i.

(ii) *$\mathcal{U}_N$ является открытым плотным подмножеством стратифицированного комплексно-аналитического пространства $\widetilde{\mathcal{U}}_N = \bigsqcup_{n=0}^{N-1} \widetilde{\mathcal{Y}}_n$, $\widetilde{\mathcal{Y}}_n$ изоморфно тотальному пространству расслоения над S^nX со слоем*

$$H^1(X, \mathcal{O}(-2NP_0 + 2x_1 + \ldots + 2x_n))$$

над точкой $(x_1, \ldots, x_n) \in S^nX$.

(iii) *Расслоение $\mathcal{L}_k$ спускается до линейного расслоения μ_k на пространстве $\widetilde{\mathcal{U}}_N$.*

Комментарии. 1) Стабилизатор точки

$$T_{-N}\begin{pmatrix} ((1-z_1t^{-1})\dots(1-z_nt^{-1}))^{-1} & 0 \\ 0 & (1-z_1t^{-1})\dots(1-z_nt^{-1}) \end{pmatrix}\cdot T_n$$
$$= \begin{pmatrix} t^N(t-z_1)^{-1}\dots(t-z_n)^{-1} & 0 \\ 0 & t^{-N}(t-z_1)\dots(t-z_n) \end{pmatrix}\cdot \mathbf{1}\in\mathcal{P} \quad (1)$$

в группе $\widehat{\mathcal{N}}_+$ совпадает с группой $\widehat{\mathcal{N}}_+^{\mathrm{in}}(N, z_1, \dots, z_n)$ петель $S^1\to\mathcal{N}_+$, продолжающихся до мероморфных отображений $D\to\mathcal{N}_+\cong\mathbb{C}$ с полюсами порядка не выше 2 в точках $z_1, \dots, z_n$ и нулем порядка не меньше $2N$ в точке 0. Поэтому факторпространство орбиты точки (1) по действию группы $\widehat{\mathcal{N}}_+^{\mathrm{out}}$ изоморфно

$$\widehat{\mathcal{N}}_+^{\mathrm{out}}\setminus\widehat{\mathcal{N}}_+/\widehat{\mathcal{N}}_+^{\mathrm{in}}(N, z_1, \dots, z_n)\cong H^1(X, \mathcal{O}(-2NP_0+2P_{z_1}+\dots+P_{z_n}))\,.$$

2) Опишем наглядно, как склеиваются страты $\widetilde{\mathcal{Y}}_n$ в пространстве $\widetilde{\mathcal{U}}_N$. Например, страт $\widetilde{\mathcal{Y}}_1$ приклеивается к $\mathcal{Y}_0\cong H^1(X, \mathcal{O}(-2NP_0))$ следующим образом. Точная последовательность пучков на X

$$0\to\mathcal{O}(-2NP_0)\to\mathcal{O}(-2NP_0+x)\to\mathcal{O}(-2NP_0+x)\otimes\mathcal{O}_x\to 0$$

индуцирует вложение одномерного пространства $H^0(X, \mathcal{O}(-2NP_0+x)\otimes\mathcal{O}_x)$ в пространство $H^1(X, \mathcal{O}(-2NP_0))$. Образ вложения есть прямая $l_x\subset\mathcal{Y}_0$. Если устремиться из точки $u\in\mathcal{Y}_0$ к бесконечности параллельно прямой l_x, то мы придем в точку

$$\varphi_{x*}(u)\in H^1(X, \mathcal{O}(-2NP_0+2x))\subset\widetilde{\mathcal{Y}}_1,$$

где отображение

$$\varphi_{x*}\colon H^1(X, \mathcal{O}(-2NP_0))\to H^1(X, \mathcal{O}(-2NP_0+2x))$$

индуцировано естественным морфизмом $\varphi_x\colon\mathcal{O}(-2NP_0)\to\mathcal{O}(-2NP_0+2x)$. Аналогично, если некоторая прямая $l\subset H^1(X, \mathcal{O}(-2NP_0))$ лежит в ядре естественного отображения

$$H^1(X, \mathcal{O}(-2NP_0))\to H^1(X, \mathcal{O}(-2NP_0+x_1+\dots+x_n)),$$

но не лежит в ядре отображения

$$H^1(X, \mathcal{O}(-2NP_0))\to H^1(X, \mathcal{O}(-2NP_0+y_1+\dots+y_m))$$

для $m<n$, то, устремляясь из точки $u\in\mathcal{Y}_0$ к бесконечности вдоль прямой l, мы приходим в точку

$$\varphi_{x_1, \dots, x_n*}(u)\in H^1(X, \mathcal{O}(-2NP_0+2x_1+\dots+2x_n))\subset\widetilde{\mathcal{Y}}_n,$$

где $\varphi_{x_1, \dots, x_n}\colon\mathcal{O}(-2NP_0)\to\mathcal{O}(-2NP_0+2x_1+\dots+2x_n)$ — естественный морфизм. Страты $\widetilde{\mathcal{Y}}_{n'}$ приклеиваются к $\widetilde{\mathcal{Y}}_n$, $n'>n>0$, послойно относительно $\widetilde{\mathcal{Y}}_n$, а внутри каждого слоя расслоения $\widetilde{\mathcal{Y}}_n$ — аналогично тому, как $\widetilde{\mathcal{Y}}_{n'-n}$ приклеивается к $\mathcal{Y}_0$. Эти утверждения доказываются в случае

$$x_1, \dots, x_n\in D$$

прямым вычислением в координатах на многообразии $\mathcal{P}$ (аналогично тому, как это делалось при доказательстве теоремы 3.2.1 в [5]), а для остальных $x_1, \dots, x_n$ аналитическим продолжением.

3) Мы не добавляем к открытому множеству U_N страт $T_{-N}Y_N$ по той причине, что факторпространство $\widehat{\mathcal{N}}_+^{\text{out}} \setminus (T_{-N}Y_N)$ не является расслоением: размерность пространства $H^1(X, \mathcal{O}(-2NP_0 + 2x_1 + \ldots + 2x_N))$ подскакивает при $x_1 = \ldots = x_N = P_0$.

Теперь заметим, что по теореме Хартогса пространство $\mathbb{C}^* \ltimes \widehat{\mathcal{N}}_+^{\text{out}}$-инвариантных сечений расслоения $\mathcal{L}_k$ над M_{-N} совпадает с пространством

$$H^0(T_{-N}(Y_0 \cup Y_1), \mathcal{L}_k)^{\mathbb{C}^* \ltimes \widehat{\mathcal{N}}_+^{\text{out}}} \cong H^0(\mathcal{Y}_0 \cup \mathcal{Y}_1, \mu_k)^{\mathbb{C}^*} \cong H^0(\mathcal{U}_N, \mu_k)^{\mathbb{C}^*}.$$

Поэтому остается профакторизовать пространство $\mathcal{U}_N$ по действию группы $\mathbb{C}^*$. Равенство

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \psi(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda^2\psi(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$$

показывает, что элемент $\lambda \in \mathbb{C}^*$ действует в каждом слое

$$H^1(X, \mathcal{O}(-2NP_0 + 2x_1 + \ldots + 2x_n)) \subset \mathcal{Y}_n$$

растяжением в λ^2 раз. Это действие, конечно, продолжается на $\widetilde{\mathcal{U}}_N$, и

$$H^0(\mathcal{U}_N, \mu_k)^{\mathbb{C}^*} \cong H^0(\mathcal{Y}_0 \cup \widetilde{\mathcal{Y}}_1, \mu_k)^{\mathbb{C}^*} \cong H^0(\widetilde{\mathcal{U}}_N, \mu_k)^{\mathbb{C}^*}$$

(поскольку $\mathcal{Y}_1$ — открытое подмножество дивизора $\widetilde{\mathcal{Y}}_1$). Фиксируем тривиализацию ограничения $\mathcal{L}_k|_{T_{-N}\cdot Y_0}$, совместимую с действием группы $\widehat{\mathcal{N}}_+$. Тогда сечения $s \in H^0(\mathcal{Y}_0, \mu_k)$ можно рассматривать как функции на $\mathcal{Y}_0$, и элемент $\lambda \in \mathbb{C}^*$ действует на них по формуле $(\lambda s)(u) = \lambda^{2kN} s(\lambda^{-2}u)$ (доказательство по $\widehat{\mathcal{N}}_+$-эквивариантности сводится к случаю $u = 0$). Отсюда

$$H^0(\mathcal{Y}_0, \mu_k)^{\mathbb{C}^*} \cong H^0(\mathbf{P}\mathcal{Y}_0, \mathcal{O}(kN)).$$

Аналогично,

$$H^0(\widetilde{\mathcal{Y}}_1, \mu_k)^{\mathbb{C}^*} \cong H^0(\mathbf{P}\widetilde{\mathcal{Y}}_1, \mathcal{O}(k(N-1)))$$

($\mathbf{P}\widetilde{\mathcal{Y}}_1$ — проективизация расслоения $\widetilde{\mathcal{Y}}_1$). Следовательно, сечение $s \in H^0(\mathcal{Y}_0, \mu_k)^{\mathbb{C}^*}$ продолжается на $\widetilde{\mathcal{Y}}_1$, если и только если оно обращается в нуль на множестве прямых l_x (см. замечание 2 после предложения 2), $x \in X$, с кратностью $k(N-1)$. Сформулируем этот факт несколько иначе. Кривая X вложена в проективное пространство $\mathbf{P}H^1(X, \mathcal{O}(-2NP_0)) \cong \mathbf{P}H^0(X, \Omega^1_X(2NP_0))^*$ с помощью линейного расслоения $\Omega^1_X(2NP_0)$. Проективизация слоя нормального расслоения к X в точке x естественно изоморфна

$$\mathbf{P}H^0(X, \Omega^1_X(2NP_0 - 2x))^* \cong \mathbf{P}H^1(X, \mathcal{O}(-2NP_0 + 2x)).$$

Поэтому факторпространством $(\mathcal{Y}_0 \cup \widetilde{\mathcal{Y}}_1)/\mathbb{C}^*$ следует считать раздутие $\mathrm{bl}_1(\mathbf{P}_L)$ проективного пространства $\mathbf{P}_L = \mathbf{P}H^0(X, L)^*$, где $L = \Omega^1_X(2NP_0)$, вдоль кривой X. Расслоение μ_k спускается до линейного расслоения

$$\mathcal{O}(kNH - k(N-1)E)$$

на $\mathrm{bl}_1(\mathbf{P}_L)$, где H — дивизор гиперплоскости, а E — исключительный дивизор.

Итак, нами доказана

Теорема 3. $H^0(M_{-N}, \mathcal{L}_k)^{\mathbb{C}^* \ltimes \widehat{\mathcal{N}}_+^{\mathrm{out}}} \cong H^0(\mathbf{P}_L, \mathcal{O}(kN) \otimes \mathcal{J}_X^{k(N-1)})$ ($\mathcal{J}_X$ — *пучок идеалов кривой* X).

Мы можем продолжить процедуру приклеивания к $\mathbf{P}_L$ стратов $\widetilde{\mathcal{Y}}_2/\mathbb{C}^*, \dots, \widetilde{\mathcal{Y}}_{N-1}/\mathbb{C}^*$. Согласно замечанию 2 после предложения 2, на втором шаге следует раздуть в $\mathrm{bl}_1(\mathbf{P}_L)$ собственный прообраз многообразия $\mathrm{Sec}^2 X \subset \mathbf{P}_L$, заметаемого 2-хордами кривой X, вклеивая вместо каждой 2-хорды $l_{x,y}$ проективное расслоение $l_{x,y} \times \mathbf{P}H^1(X, \mathcal{O}(-2NP_0 + 2x + 2y))$. Затем следует отождествить слои этого расслоения (т.е. стянуть каждую 2-хорду в точку), что дает неособое многообразие [9] $\mathrm{bl}_2(\mathbf{P}_L)$. Далее, на третьем шаге следует раздуть в $\mathrm{bl}_2(\mathbf{P}_L)$ собственный прообраз многообразия $\mathrm{Sec}^3 X$ 3-плоскостей кривой X и стянуть каждую 3-плоскость и т.д. В результате этой последовательности перестроек в коразмерности $\geqslant 2$ получается неособое многообразие $\widetilde{\mathbf{P}}_L = \mathrm{bl}_{N-1}(\mathbf{P}_L)$. Расслоение μ_k индуцирует на $\widetilde{\mathbf{P}}_L$ расслоение $\mathcal{O}(kNH - k(N-1)E)$.

§3. Морфизм в пространство модулей

Многообразие $\widetilde{\mathbf{P}}_L$, снабженное естественным отображением $\Phi_L \colon \widetilde{\mathbf{P}}_L \to \mathcal{M}$, есть в точности геометрическая аппроксимация многообразия модулей расслоений в смысле Таддеуша [9]. Геометрический смысл морфизма Φ_L ясен из нашего построения многообразия $\widetilde{\mathbf{P}}_L$. Напомним соответствующие результаты из [8, 9].

Отображение Φ_L переводит точку $\langle u \rangle \in \mathbf{P}_L$, $u \in H^1(X, \mathcal{O}(-2NP_0))$, в класс расслоения $\mathcal{E}$, заданного как расширение

$$0 \to \mathcal{O}(-NP_0) \to \mathcal{E} \to \mathcal{O}(NP_0) \to 0$$

с коциклом u. Для некоторых u расслоение $\mathcal{E}$ нестабильно. Тогда существует дестабилизирующее линейное подрасслоение $\mathcal{V} \subset \mathcal{E}$ положительной степени $d \leqslant N-1$. Самый вырожденный случай $d = N-1$ соответствует точкам $\langle u \rangle$, лежащим на кривой $X \subset \mathbf{P}_L$. Поэтому необходимо раздуть кривую X, вклеивая вместо точки $x \in X$ проективное пространство $\mathbf{P}H^1(X, \mathcal{O}(-2NP_0 + 2x))$. Точка $\langle u' \rangle \in \mathbf{P}H^1(X, \mathcal{O}(-2NP_0 + 2x))$ переводится морфизмом Φ_L в соответствующее расширение

$$0 \to \mathcal{O}(-NP_0 + x) \to \mathcal{E}' \to \mathcal{O}(NP_0 - x) \to 0.$$

Аналогично, случай $d = N-2$ соответствует точкам $\langle u \rangle \in \mathrm{Sec}^2 X \setminus X$, которые после раздутия и стягивания переходят в расширения

$$0 \to \mathcal{O}(-NP_0 + x + y) \to \mathcal{E}'' \to \mathcal{O}(NP_0 - x - y) \to 0,$$

и т.д. Случай $d = 0$ соответствует классам полустабильных расслоений; поэтому многообразие $\mathrm{Sec}^N X$ раздувать не нужно, и Φ_L является регулярным отображением.

В работе [9] доказано, что слои отображения Φ_L связны, а также что при $N \geqslant g$ (g — род кривой X) оно сюръективно. Отсюда следует, что при $N \geqslant g$

$$H^0(\mathcal{M}, \xi^{\otimes k}) \cong H^0(\widetilde{\mathbf{P}}_L, \Phi_L^* \xi^{\otimes k}).$$

Имеем $\Phi_L^*\xi^{\otimes k} \cong \mathcal{O}(kNH - k(N-1)E)$ (это по существу было установлено выше, строгое доказательство есть в [9]), и мы получаем следующий результат.

Теорема 4 [8, 9]. *Отображение* $\Phi_L\colon \widetilde{\mathbf{P}}_L \to \mathcal{M}$ *индуцирует изоморфизм* $H^0(\mathcal{M}, \xi^{\otimes k}) \cong H^0(\mathbf{P}_L, \mathcal{O}(kN) \otimes \mathcal{J}_X^{k(N-1)})$ *при* $N \geqslant g$.

§4. Связь с конструкциями ч. I

Для решения поставленной в §1 задачи нам остается явно предъявить изоморфизм

$$\beta\colon H^0(S^{kN}X, L_{(k+1)}^{\boxtimes kN}) \to H^0(\mathbf{P}_L, \mathcal{O}(kN) \otimes \mathcal{J}_X^{k(N-1)}).$$

Элемент $\varphi(z_1, \dots, z_{kN})\, dz_1 \dots dz_{kN} \in H^0(S^{kN}D, L_{(k+1)}^{\boxtimes kN})$ определяет функцию s степени однородности kN на пространстве $T_{-N}Y_0$ по формуле

$$\begin{aligned} &s\left(\begin{pmatrix} 1 & \psi(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} T_{-N}\right) \\ &\qquad = \left\langle \varphi(z_1, \dots, z_{kN})\, dz_1 \dots dz_{kN}, \begin{pmatrix} 1 & \psi(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot T_{-N}v \right\rangle \\ &\qquad = \langle \varphi(z_1, \dots, z_{kN})\, dz_1 \dots dz_{kN}, \exp(\psi(t) \otimes e) \cdot T_{-N}v \rangle \\ &\qquad = \frac{1}{(kN)!} \operatorname{Res}_{z_1 = \dots = z_{kN} = 0} (\varphi(z_1, \dots, z_{kN}) \psi(z_1) \dots \psi(z_{kN})\, dz_1 \wedge \dots \wedge dz_{kN}) \end{aligned}$$

(Res означает спаривание (2) из §I.2). Отсюда легко следует, что искомый изоморфизм является ограничением тавтологического изоморфизма

$$\widetilde{\beta}\colon H^0(\mathbf{P}_L, \mathcal{O}(kN)) \cong S^{kN}H^0(X, L) \cong H^0(S^{kN}X, L^{\boxtimes kN})$$

на подпространство сечений на $\mathbf{P}_L$, обращающихся в нуль на кривой X с кратностью $k(N-1)$. Нетрудно непосредственно убедиться в том, что такие сечения соответствуют при изоморфизме $\widetilde{\beta}$ сечениям на $S^{kN}X$, обращающимся в нуль на диагоналях коразмерности k.

Объединим все полученные результаты в коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd} H_0(L^{\mathrm{out}}\mathfrak{g}, V_k)^* \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[d, "\gamma_N"] & & H^0(\mathcal{M}, \xi^{\otimes k}) \arrow[d, "\Phi_L^*"] \\ H_0(\mathfrak{h} \ltimes L^{\mathrm{out}}\mathfrak{n}_+, W_{-N})^* \arrow[r, "\varepsilon"] & H^0(S^{kN}X, L_{(k+1)}^{\boxtimes kN}) \arrow[r, "\beta"] & H^0(\mathbb{P}_L, \mathcal{O}(kN) \otimes \mathcal{J}_X^{k(N-1)}). \end{tikzcd} \tag{2}$$

Мы доказали, что β и ε являются изоморфизмами при всех N, Φ_L^* — изоморфизм при $N \geqslant g$, а γ_N — изоморфизм при достаточно больших N. Следовательно, установлена

Теорема 5. *Естественное отображение*

$$\alpha\colon H_0(L^{\mathrm{out}}\mathfrak{g}, V_k)^* \to H^0(\mathcal{M}, \xi^{\otimes k})$$

является изоморфизмом. В частности, размерность пространства $H^0(\mathcal{M}, \xi^{\otimes k})$ *дается формулой Верлинде* [12, 4].

Кроме того, доказано утверждение о стабилизации, сформулированное в §I.2: γ_N — изоморфизм при $N \geqslant g$.

Диаграмму (2) можно еще дополнить коммутативным квадратом

$$\begin{array}{ccc} H^0(S^{kN}X, L^{\boxtimes kN}_{(k+1)}) & \overset{\sim}{\longleftarrow} & H^0(\mathcal{M}, \xi^{\otimes k}) \\ \big\downarrow \delta^* & & \big\downarrow i^* \\ H^0(S^N X, (L^{\otimes k})^{\boxtimes N} \otimes \mathcal{O}(-k\Delta)) & \overset{\varkappa_N^*}{\overset{\sim}{\longleftarrow}} & H^0(J, \mathcal{O}(2k\Theta)) \end{array}$$

(J — якобиан кривой X), см. диаграмму (13) в §I.4. Здесь $\delta\colon S^N X \to S^{kN}X$ — диагональное вложение; $\varkappa_N\colon S^N X \to J$ переводит $(x_1, \ldots, x_N)$ в $[x_1 + \ldots + x_N - NP_0]$; ι^* индуцировано вложением групп $L\mathbb{C}^* \to LG$, или, иначе говоря, морфизмом $\iota\colon J \to \mathcal{M}$, $\iota(\mathcal{V}) = \mathcal{V} \oplus \mathcal{V}^{-1}$, образ которого есть множество классов полустабильных расслоений. В случае $k = 1$ получается известная

Теорема 6. $\iota^*\colon H^0(\mathcal{M}, \xi) \to H^0(J, \mathcal{O}(2\Theta))$ — *изоморфизм.*

Морфизм ι не является вложением, $\iota(\mathcal{V}) = \iota(\mathcal{V}^{-1})$. Здесь нет противоречия с теоремой 6, так как тэта-функции второго порядка четны.

§5. Обобщения геометрической аппроксимации

а) *Параболические расслоения ранга* 2. Рассуждения §1–4 автоматически переносятся на многоточечный модулярный функтор. Параболическое расслоение (п.р.) на кривой — это векторное расслоение с жесткостью: в слоях над точками $P_1, \ldots, P_n$ фиксированы полные флаги. Для п.р. можно ввести понятие стабильности [10] и многообразие модулей, которое мы обозначим через $\mathcal{M}(P_1, \ldots, P_n)$. Набор целых чисел $(k; l_1, \ldots, l_n)$, $0 \leqslant l_i \leqslant k$, такой, что число $l = \sum l_i$ четно, задает линейное расслоение $\xi(k; l_1, \ldots, l_n)$ на многообразии $\mathcal{M}(P_1, \ldots, P_n)$, и

$$H^0(\mathcal{M}(P_1, \ldots, P_n), \xi(k; l_1, \ldots, l_n)) \cong M(X; P_1, \ldots, P_n; \pi_1, \ldots, \pi_n), \qquad (3)$$

где π_i — представление алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ со старшим весом $(0, l_i, k)$.

Сформулируем основной результат о геометрической аппроксимации. Рассмотрим рациональное отображение $\phi_L\colon \mathbf{P}_L \dashrightarrow \mathcal{M}(P_1, \ldots, P_n)$, переводящее точку $\langle u\rangle \in \mathbf{P}_L = \mathbf{P}H^1(X, \mathcal{O}(-2NP_0))$ в класс п.р. $\mathcal{E}$, заданного как расширение

$$0 \to \mathcal{O}(-NP_0) \to \mathcal{E} \to \mathcal{O}(NP_0) \to 0$$

с коциклом u и естественными флагами в точках $P_1, \ldots, P_n$. Пусть

$$p\colon \operatorname{bl}_1(\mathbf{P}_L) \to \mathbf{P}_L$$

— композиция раздутия точек $P_1, \ldots, P_n \in X$ в $\mathbf{P}_L$ и последующего раздутия собственного прообраза кривой X.

Теорема 4′ [10]. *Существует последовательность перестроек*

$$f\colon \operatorname{bl}_1(\mathbf{P}_L) \dashrightarrow \widetilde{\mathbf{P}}_L^{P_1, \ldots, P_n}$$

в коразмерности $\geqslant 2$, *разрешающая отображение* ϕ_L *в регулярное отображение*

$$\Phi_L = \phi_L \circ p \circ f^{-1}\colon \widetilde{\mathbf{P}}_L^{P_1, \ldots, P_n} \to \mathcal{M}(P_1, \ldots, P_n),$$

которое при достаточно больших N *индуцирует изоморфизм*

$$\Phi_L^*\colon H^0(\mathcal{M}(P_1, \ldots, P_n), \xi(k\,; l_1, \ldots, l_n)) \\ \xrightarrow{\approx} H^0\Bigl(\mathbf{P}_L, \mathcal{O}(kN - l/2) \otimes \Bigl(\mathcal{J}_X^{k(N-1)-l/2} \bigcap_i \mathcal{J}_{P_i}^{k(N-1)+l_i-l/2}\Bigr)\Bigr) \qquad (4)$$

($\mathcal{J}_{P_i}$ *— пучок идеалов точки* $P_i \in \mathbf{P}_L$).

Пространство (4) изоморфно пространству $H^0(S^{kN-l/2}X, L_{(k+1\,; l_1, \ldots, l_n)}^{\boxtimes(kN-l/2)})$ из теоремы $3'$ §I.2, ср. с началом §4. Отсюда следует аналог (3) теоремы 5.

В частности, при $n = 1$, $l = k$ теорема $4'$ дает описание пространства сечений линейного расслоения на многообразии модулей 2-расслоений с нечетным детерминантом [8, 9].

Подробную информацию о последовательности перестроек f легко получить аналогично §2; при этом вместо теоремы 1 используется теорема 3.2.1 из [5].

б) *Расслоения высшего ранга.* В случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ понятие геометрической аппроксимации можно истолковывать по-разному, в зависимости от выбора нильпотентной подалгебры $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{n}^+$ (см. §I.5). Например, выбор $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}^+$ означает, что рассматриваются расслоения ранга n с фильтрацией

$$0 = \mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{E}_{n-1} \subset \mathcal{E}_n = \mathcal{E},$$

такой, что присоединенные факторы $\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1}$ — фиксированные линейные расслоения. При попытке применить здесь процедуру §2 возникают трудности: многообразие $M = \overline{\widehat{\mathcal{N}}_+ \cdot \mathbf{1}} \subset \mathcal{P}$ при $n > 2$ устроено весьма сложно; см. [5, §4.3] в случае $n = 3$, а также теорему 3 из §I.2, где дано описание пространства $H^0(\mathcal{M}, \xi^{\otimes k})$ в общем случае.

Однако если $\mathfrak{n}$ — «подалгебра последнего столбца» (§I.5), то для нее удается полностью провести рассуждения §2–4. Сформулируем результат. Пусть (в обозначениях теоремы 10 §I.5) $\mathbf{P}_{L_j} = \mathbf{P}H^0(X, L_j)^*$ и рациональное отображение

$$\phi_{L_1, \ldots, L_{n-1}}\colon \mathbf{P}_{L_1} \times \ldots \times \mathbf{P}_{L_{n-1}} \dashrightarrow \mathcal{M}$$

переводит точку $\langle u_1, \ldots, u_{n-1}\rangle \in \mathbf{P}_{L_1} \times \ldots \times \mathbf{P}_{L_{n-1}}$, где

$$u_j \in H^0(X, L_j)^* \cong H^1\Bigl(X, \mathcal{O}\Bigl(\Bigl(-N^j - \sum N^{(s)}\Bigr)P_0\Bigr)\Bigr),$$

в класс расслоения $\mathcal{E}$, заданного как расширение

$$0 \to \mathcal{O}(-N^{(1)}P_0) \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}(-N^{(n-1)}P_0) \to \mathcal{E} \to \mathcal{O}((N^{(1)} + \ldots + N^{(n-1)})P_0) \to 0$$

с коциклом $u_1 + \ldots + u_{n-1}$. Пусть

$$q\colon \operatorname{bl}_1(\mathbf{P}_{L_1} \times \ldots \times \mathbf{P}_{L_{n-1}}) \to \mathbf{P}_{L_1} \times \ldots \times \mathbf{P}_{L_{n-1}}$$

— раздутие кривой X, вложенной диагонально.

Теорема 7. *Существует последовательность перестроек*

$$h\colon \operatorname{bl}_1(\mathbf{P}_{L_1} \times \ldots \times \mathbf{P}_{L_{n-1}}) \dashrightarrow (\mathbf{P}_{L_1} \times \ldots \times \mathbf{P}_{L_{n-1}})^{\sim}$$

в коразмерности $\geqslant 2$, *разрешающая отображение* $\phi_{L_1, \ldots, L_{n-1}}$, *так что композиция*

$$\Phi_{L_1, \ldots, L_{n-1}} = \phi_{L_1, \ldots, L_{n-1}} \circ q \circ h^{-1}\colon (\mathbf{P}_{L_1} \times \ldots \times \mathbf{P}_{L_{n-1}})^{\sim} \to \mathcal{M}$$

регулярна и индуцирует изоморфизм

$$\Phi^*_{L_1,\dots,L_{n-1}}\colon H^0(\mathcal{M},\xi^{\otimes k}) \xrightarrow{\approx} H^0\Bigl(\mathbf{P}_{L_1}\times\ldots\times\mathbf{P}_{L_{n-1}},\Bigl(\mathop{\boxtimes}_{j=1}^{n-1}\mathcal{O}(kN^{(j)})\Bigr)\otimes\mathcal{J}_X^{k(\sum N^{(j)}-1)}\Bigr)$$

($\mathcal{J}_X$ *— пучок идеалов диагонально вложенной кривой*).

Отсюда и из теоремы 10 §I.5 выводим аналог теоремы 5 для $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_n$.

Мы рассчитываем подробно описать последовательность перестроек h и морфизм $\Phi_{L_1,\dots,L_{n-1}}$ в отдельной работе.

Литература

1. *Segal G.* Conformal field theory. Oxford preprint (1988).
2. *Hitchin N. J.* Flat connections and geometric quantization. Comm. Math. Phys., **131**, 347–380 (1990).
3. *Kumar S., Narasimhan M. S., Ramanathan A.* Infinite grassmannians and moduli spaces of G-bundles. Preprint (1993).
4. *Beilinson A. A., Feigin B. L., Mazur B.* An introduction to algebraic field theories on curves. Preprint (1993).
5. *Стояновский А. В., Фейгин Б. Л.* Функциональные модели представлений алгебр токов и полубесконечные клетки Шуберта. Функц. анализ и его прил., **28**, вып. 1, 68–90 (1994).
6. *Прессли Э., Сигал Г.* Группы петель. Мир, М. (1990).
7. *Lepowsky J., Primc M.* Structure of the standard modules for the affine Lie algebra $A_1^{(1)}$. Contemp. Math., Vol. 45, AMS, Providence (1985).
8. *Bertram A.* Moduli of rank 2 vector bundles, theta-divisors, and the geometry of curves in projective space. J. Diff. Geom., **35**, 429–469 (1992).
9. *Thaddeus M.* Stable pairs, linear systems, and the Verlinde formula. Thesis, Oxford (1992).
10. *Bertram A.* Generalized $SU(2)$ theta functions. Invent. Math., **113**, 351–372 (1993).
11. *Mumford D., Fogarty J.* Geometric Invariant Theory (2nd edition). Springer–Verlag, New-York (1982).
12. *Verlinde E.* Fusion rules and modular transformations in $2D$ conformal field theory. Nuclear Phys. B, **300**, 360 (1988).

Независимый Московский университет
Московский Математический институт

Поступило в редакцию
17 января 1994 г.