



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

E. B. Soboleva, Method of numerical investigation of saline groundwater dynamics,
Mat. Model., 2014, Volume 26, Number 2, 50–64

<https://www.mathnet.ru/eng/mm3448>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.172

April 18, 2025, 10:14:25



УДК 532.546+519.63

МЕТОД ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИКИ СОЛЕНОЙ ВОДЫ В ПОЧВЕ

© 2014 г. *Е.Б. Соболева*

ФГБУН Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

soboleva@ipmnet.ru

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 12-01-00240)

Предложен метод численного решения нестационарных задач о движениях двухкомпонентной жидкости в пористой среде, моделирующих перенос соли, растворенной в грунтовых водах. Математическая модель включает уравнения неразрывности и Дарси с гравитационной силой, уравнение переноса соли с учетом диффузии, а также линейное уравнение состояния, связывающее плотность раствора с плотностью растворенной в нем соли. Численный код строится на основе конечно-разностного метода на разнесенной неравномерной сетке. Уравнения неразрывности и Дарси интегрируются по алгоритму типа SIMPLE, затем решается уравнение переноса соли. Выполняется тестирование созданного кода на трех задачах, описывающих диффузию соли, перенос соли восходящим потоком жидкости, концентрационную конвекцию.

Ключевые слова: вычислительная гидродинамика, течения в пористых средах, концентрационная конвекция, диффузия, алгоритм типа SIMPLE.

METHOD OF NUMERICAL INVESTIGATION OF SALINE GROUNDWATER DYNAMICS

E.B. Soboleva

Institute for Problems in Mechanics of the RAS

A numerical method for solving unsteady problems on two-component fluid dynamics in a porous medium that model transport of salt, dissolved in ground water, is developed. A mathematical model consists of the continuity equation, the Darcy's law with the gravity, the salt diffusivity equation and the linear equation of state relating the solution density to the salt density. The numerical code is based on the finite-difference method realized on a staggered nonuniform grid. The continuity and Darcy's equations are integrated with the use of the SIMPLE-type algorithm, then the salt transport equation is solved. The designed code is tested by solving three benchmark problems including diffusion of salt, transport of salt by the upflow and concentration convection.

Key words: numerical hydrodynamics, flows in porous media, concentration convection, diffusion, SIMPLE-type algorithm.

1. Введение

Движения грунтовой воды и перенос ею солей в почве Земли представляют интерес для различных областей человеческой деятельности, что приводит к развитию математического описания и аналитическим исследованиям [1], а также к построению алгоритмов численного решения задач [2] о течениях многокомпонентной жидкости в пористых средах. В [3] представлена одномерная математическая модель движения воды к поверхности, вызванного испарением. Вода, содержащая примесь, испаряется в почве, не доходя до поверхности Земли, что приводит к росту концентрации примеси вблизи фронта фазового перехода. Схема задачи приведена на рис.1. Хотя соль может диффундировать вниз в направлении, противоположном движению водного раствора, ее концентрация около границы фазового перехода может существенно возрастать, а плотность раствора заметно увеличиваться. В результате слой более соленой и тяжелой жидкости располагается над слоем легкой жидкости. В [3] в одномерном случае было показано, что такая конфигурация может приводить к возникновению неустойчивости. Следующим важным шагом является численное исследование двумерных задач развития неустойчивости и возникновения конвективных движений. Изучение процесса перемешивания загрязняющих примесей в почвенных и грунтовых водах представляет большой интерес для экологии.

Описание гидродинамических процессов в постановке, показанной на рис.1, строится на основе обобщения задачи Стефана [1, 4], в которой граница фазового перехода подвижна, а ее положение определяется при получении решения. Решению задач стефановского типа посвящена обширная литература, в частности, сведения о разработке и сравнении численных методов можно найти в [4, 5]. В настоящей работе, которая является первым этапом исследования, решается упрощенная задача. Считается, что наличие примеси слабо влияет на процесс испарения, поэтому граница фазового перехода неподвижна и не деформируется [3]. Рассматривается прямоугольная область: $x \in [0, H_x]$, $y \in [0, H_y]$, в которой находится вода в жидком состоянии, несущая растворенную соль.

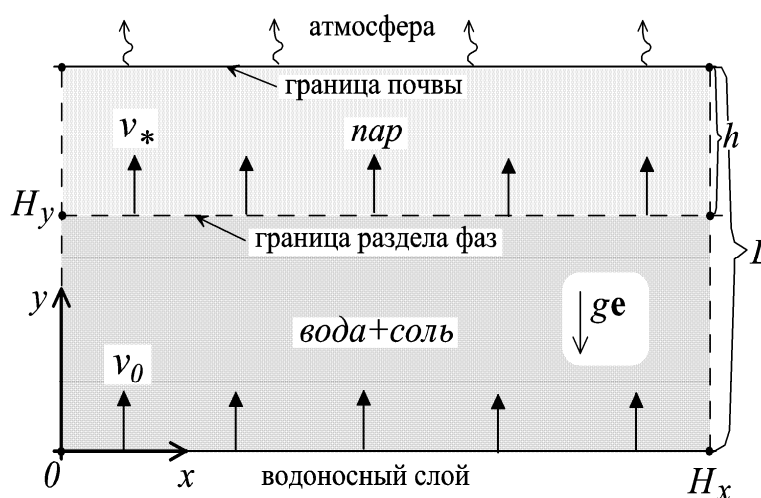


Рис.1. Схема задачи [3].

Разрабатывается новый двумерный численный код на основе математической модели [3], применимый к нестационарным задачам о концентрационной фильтрационной конвекции. Модель включает уравнения неразрывности и Дарси с гравитационной си-

лой, уравнение переноса соли с учетом диффузии. Замыкается система линейным уравнением состояния, связывающим плотность раствора с плотностью растворенной в нем соли; несущая жидкость (вода) считается несжимаемой. Исходные уравнения записываются в прямоугольной декартовой системе координат в эйлеровых переменных. Численный код строится на основе конечно-разностного метода на разнесенной неравномерной сетке. Уравнения неразрывности и Дарси интегрируются по алгоритму типа SIMPLE [6], затем решается уравнение переноса соли. Решение систем линейных алгебраических уравнений, полученных из разностного аналога исходных уравнений, производится методом прогонки. Выполняется тестирование нового кода.

При работе использовался опыт автора по построению и эксплуатации численных кодов с применением алгоритмов типа SIMPLE для задач о тепловой гравитационной конвекции в однокомпонентных и пористых средах [7-10]. В настоящей статье представлено расширение отработанной методики на новый класс задач в теории фильтрации грунтовых вод.

2. Постановка задачи

Система уравнений движения соленой воды в пористой среде в размерных переменных имеет вид [3]

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad (1)$$

$$\mathbf{V} = -\frac{K}{\phi \mu_s} (\nabla P - \rho_s g \mathbf{e}), \quad (2)$$

$$\phi \frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \phi \mathbf{V} \cdot \nabla \rho_s = \phi D_c \Delta \rho_s. \quad (3)$$

Здесь \mathbf{V} , ρ_s , P – скорость движения раствора в порах, его плотность и давление, t – время, K и ϕ – проницаемость и пористость твердой фазы, μ_s , D_c – динамическая вязкость раствора и коэффициент молекулярной диффузии соли в воде, g – величина ускорения силы тяжести, $\mathbf{e} = (0, -1)$ – единичный вектор.

При выводе уравнения (3) использовалось линейное уравнение состояния

$$\rho_s = \rho_0 + \alpha \rho_c, \quad (4)$$

связывающее плотность раствора ρ_s с плотностью растворенной соли ρ_c ; ρ_0 – плотность чистой воды, которая полагается постоянной, α – константа, для воды $\alpha \approx 0.64$ [3]. Массовая концентрация соли c определяется отношением: $c = \rho_c / \rho_s$.

Соленая вода входит в расчетную область при $y = 0$ с постоянной скоростью \mathbf{V}_0 , имеет плотность ρ_{s0} и давление P_0 (рис.1). При $y = H_y$ из расчетной области выходит чистая вода, а соль распространяется обратно вглубь раствора благодаря диффузии. При $y = H_y$ имеем скорость \mathbf{V}^* , давление P^* (равное атмосферному давлению P_a) и плот-

ность ρ_s^* , которая определяется из условия: сколько соли принес к границе поток воды, столько соли ушло от нее за счет диффузии. Боковые границы $x=0$, $x=H_x$ непроницаемы для воды и соли. Скорость \mathbf{V}^* на верхней границе можно найти из уравнения неразрывности (1), которое следует проинтегрировать по всему объему и заменить объемный интеграл поверхностным по формуле Гаусса-Остроградского: $\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{V} d\omega = \oint_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} d\phi = 0$. Здесь $d\omega$ – элемент объема, Ω – прямоугольная область $x \in [0, H_x]$, $y \in [0, H_y]$, $d\phi$ – элемент границы, Γ – граница области, \mathbf{n} – единичный вектор нормали к поверхности области. Если принять, что скорость на выходе \mathbf{V}^* постоянна по координате x , и учесть, что через боковые границы жидкость не протекает, то из последнего равенства получается: $\mathbf{V}^* = \mathbf{V}_0$. Таким образом, граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} y=0: \quad \mathbf{V} &= \mathbf{V}_0, \quad \rho_s = \rho_{s0}, \quad P = P_0, \\ y=H_y: \quad \mathbf{V} &= \mathbf{V}_0, \quad (\rho_s^* - \rho_0)\mathbf{V}_0 = D_c \nabla \rho_s^*, \quad P = P_a, \\ x=0, \quad x=H_x: \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} &= 0, \quad \mathbf{n} \cdot \nabla \rho_s = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \nabla P = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Считается, что в начальный момент концентрация соли мала ($c \ll 1$), поэтому можно полагать, что в почве происходит движение воды, соответствующее стационарному решению для чистой жидкости [3]: скорость постоянна, давление линейно увеличивается по направлению вниз (за счет веса жидкости). Начальные условия имеют вид

$$t=0: \quad \mathbf{V} = \mathbf{V}_0, \quad \rho_s = \rho_{s0}, \quad P = P_0 - (P_0 - P_a)y / H_y. \quad (6)$$

Исходные уравнения (1)-(3) можно преобразовать, используя вместо ρ_s , P переменные r , p , представляющие собой разность между текущим значением переменной и ее значением в чистой воде: (т.е. при $c=0$): $r = \rho_s - \rho_0$, $p = P - (P_0 - (P_0 - P_a)y / H_y)$. Затем уравнения преобразуются к безразмерному виду, в качестве масштабов выбираются высота H_y , скорость v_0 (вертикальная компонента скорости \mathbf{V}_0), время H_y / v_0 , плотность $\rho_s^{sat} - \rho_0$ (ρ_s^{sat} – плотность насыщенного раствора), давление $H_y g (\rho_s^{sat} - \rho_0)$. Возникают безразмерные переменные: \mathbf{W} – скорость, Π , S – отклонения давления и плотности от значений в чистой воде. Можно также определить безразмерную плотность соли в растворе s : $s = \rho_c / (\rho_s^{sat} - \rho_0)$. Используя (4), легко получить равенство $S = \alpha s$, которое показывает, что величина S с точностью до константы совпадает с плотностью соли s . Отношение сторон обозначается как $A = H_x / H_y$. Физические свойства жидкой фазы, пористость и проницаемость твердой фазы считаются постоянными. Получается безразмерная система уравнений

$$\nabla \cdot \mathbf{W} = 0, \quad (7)$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_0 - R_s (\nabla \Pi - S \mathbf{e}), \quad (8)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{W} \cdot \nabla S = R_v \Delta S, \quad (9)$$

которая включает масштабные комплексы

$$R_s = \frac{Kg(\rho_s^{sat} - \rho_0)}{\phi \mu_s v_0}, \quad R_v = \frac{D_c}{H_y v_0}. \quad (10)$$

Величина R_s представляет собой отношение скорости фильтрации $Kg(\rho_s^{sat} - \rho_0) / \phi \mu_s$ к скорости потока v_0 , а R_v – отношение характерной скорости диффузии D_c / H_y к v_0 .

Начальные и граничные условия принимают вид

$$\begin{aligned} t = 0: \quad \mathbf{W} &= \mathbf{W}_0, \quad S = S_0 \quad (S_0 \ll 1), \quad \Pi = 0, \\ y = 0: \quad \mathbf{W} &= \mathbf{W}_0, \quad S = S_0, \quad \Pi = 0, \\ y = 1: \quad \mathbf{W} &= \mathbf{W}_0, \quad S \mathbf{W}_0 - R_v \nabla S = 0, \quad \Pi = 0, \\ x = 0, \quad x = A: \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} &= 0, \quad \mathbf{n} \cdot \nabla S = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \nabla \Pi = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, решается начально-краевая задача (7)–(9), (11).

3. Алгоритм численного решения

Уравнения (7)–(9) записываются в прямоугольной декартовой системе координат, скорость имеет компоненты: $\mathbf{W} = (u, v)$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (12)$$

$$u = u_0 - R_s \frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad v = v_0 - R_s \left(\frac{\partial \Pi}{\partial y} + S \right), \quad (13)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} = R_v \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \right). \quad (14)$$

Дискретизация уравнений осуществляется конечно-разностным методом. Пространственная дискретизация производится на разнесенной неравномерной сетке с шагами Δx_i , Δy_j , по осям x , y количество узлов основной сетки n , m соответственно. Скалярные переменные определяются в центре ячейки основной сетки, компоненты скорости – на ее гранях (рис.2).

При переходе с k -го на $(k+1)$ -й временной слой на I этапе рассчитываются компо-

ненты скорости и давление Π по алгоритму типа SIMPLE [6]. На первом шаге находится предварительное значение скорости $\mathbf{W}^+ = (u^+, v^+)$ по разностным аналогам уравнений (13)

$$u_{i+1/2,j}^+ = u_0 - R_s \left(\frac{\Pi_{i+1,j}^k - \Pi_{i,j}^k}{\Delta x_{i+1/2}} \right), \quad (15)$$

$$v_{i,j+1/2}^+ = v_0 - R_s \left(\frac{\Pi_{i,j+1}^k - \Pi_{i,j}^k}{\Delta y_{j+1/2}} \right) - R_s S_{i,j+1/2}^k. \quad (16)$$

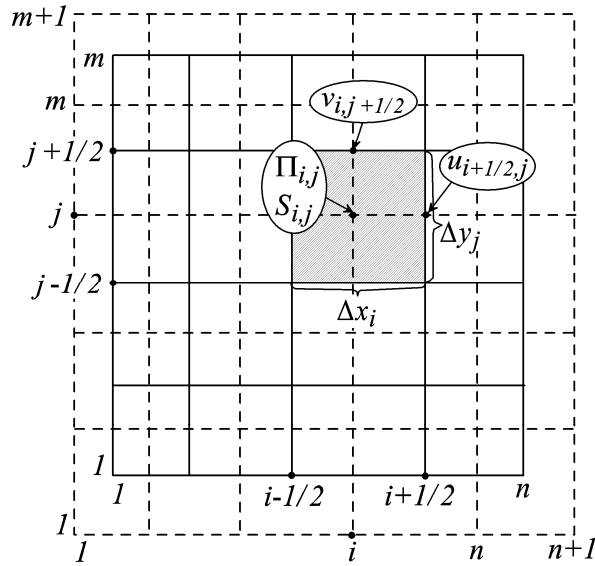


Рис.2. Пространственная сетка.

Плотность $S_{i,j+1/2}^k$ входит в (16) не в «своем» узле, поэтому определяется линейной интерполяцией по соседним значениям $S_{i,j}^k$ и $S_{i,j+1}^k$. На втором шаге давление и скорость корректируются. Для этого разностные аналоги уравнений (13) записываются для переменных u^{k+1} , v^{k+1} , Π^{k+1} на $(k+1)$ -м слое, переменная плотности S по-прежнему берется с k -го слоя. Затем из полученных уравнений вычитаются (15), (16), откуда следуют другие уравнения

$$\delta u_{i+1/2,j} = -R_s \left(\frac{\delta \Pi_{i+1,j} - \delta \Pi_{i,j}}{\Delta x_{i+1/2}} \right), \quad (17)$$

$$\delta v_{i,j+1/2} = -R_s \left(\frac{\delta \Pi_{i,j+1} - \delta \Pi_{i,j}}{\Delta y_{j+1/2}} \right). \quad (18)$$

В (18), (19) входят приращения δu , δv , $\delta \Pi$, по определению они представляют собой разность между значениями переменных на верхнем и нижнем временных слоях

$$\delta u = u^{k+1} - u^+, \quad \delta v = v^{k+1} - v^+, \quad \delta \Pi = \Pi^{k+1} - \Pi^k. \quad (19)$$

Значения на $(k+1)$ -м слое должны удовлетворять уравнению неразрывности. Последнее записывается в конечно-разностном виде, откуда следует равенство:

$$\frac{\delta u_{i+1/2,j} - \delta u_{i-1/2,j}}{\Delta x_i} + \frac{\delta v_{i,j+1/2} - \delta v_{i,j-1/2}}{\Delta y_j} = \frac{u_{i+1/2,j}^+ - u_{i-1/2,j}^+}{\Delta x_i} + \frac{v_{i,j+1/2}^+ - v_{i,j-1/2}^+}{\Delta y_j}. \quad (20)$$

Подставляя в (20) значения δu , δv из (17), (18), можно получить разностный аналог уравнения Пуассона для приращения давления $\delta \Pi$, затем преобразовать его к виду

$$a_p \delta \Pi_{i,j} = a_w \delta \Pi_{i-1,j} + a_e \delta \Pi_{i+1,j} + a_s \delta \Pi_{i,j-1} + a_n \delta \Pi_{i,j+1} + b. \quad (21)$$

В (21) a_p , a_w , a_e , a_s , a_n – коэффициенты, b – свободный член. Таким образом, получилась система линейных уравнений (21), которая решается методом прогонки.

Осуществляется горизонтальная и вертикальная прогонки из всех четырех углов прямоугольной области. В качестве примера кратко описывается алгоритм горизонтальной прогонки. Уравнение (21) можно представить следующим образом:

$$a_p \delta \Pi_{i,j} - a_w \delta \Pi_{i-1,j} - a_e \delta \Pi_{i+1,j} = c, \quad c = a_s \delta \Pi_{i,j-1} + a_n \delta \Pi_{i,j+1} + b. \quad (22)$$

Полагается, что искомые величины связаны рекуррентной зависимостью

$$\delta \Pi_{i,j} = e_i \delta \Pi_{i-1,j} + d_i, \quad (23)$$

которая переписывается для $(i+1)$ -го узла и подставляется в первое уравнение (22). Выполняя преобразования, можно получить равенство

$$\delta \Pi_{i,j} = \frac{a_w}{a_p - a_e e_{i+1}} \delta \Pi_{i-1,j} + \frac{c + a_e d_{i+1}}{a_p - a_e e_{i+1}}. \quad (24)$$

Из сравнения (23) и (24) находятся выражения для прогоночных коэффициентов

$$e_i = \frac{a_w}{a_p - a_e e_{i+1}}, \quad d_i = \frac{c + a_e d_{i+1}}{a_p - a_e e_{i+1}}. \quad (25)$$

Таким образом, сначала выполняется обратная прогонка для определения коэффициентов e_i , d_i по (25), затем прямая прогонка для нахождения искомых значений $\delta \Pi_{i,j}$ по (23). Процедура дополняется граничными условиями для e_{n+1} , d_{n+1} справа и для $\delta \Pi_{1,j}$ слева. В описанном алгоритме переменные $\delta \Pi_{i,j}$, $\delta \Pi_{i-1,j}$, $\delta \Pi_{i+1,j}$, $\delta \Pi_{i,j-1}$ в (22) задаются неявно и только $\delta \Pi_{i,j+1}$ – явно (соответствует «старому» значению).

После вычисления $\delta \Pi$ рассчитываются приращения скорости δu и δv по (17), (18), а затем и сами переменные u^{k+1} , v^{k+1} , Π^{k+1} .

На *II этапе* перехода на $(k+1)$ -й временной слой вычисляется плотность S^{k+1} . Для этого (14) приводится к консервативному виду – уравнение неразрывности умножается на S и складывается с (14). Получается

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial uS}{\partial x} + \frac{\partial vS}{\partial y} = R_v \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \right). \quad (26)$$

Уравнение (26) записывается в конечно-разностной форме в (i, j) -м узле сетки. Для временной производной используется двухслойная разностная аппроксимация с постоянным шагом τ . Пространственные производные аппроксимируются неявно центральными разностями; для первой производной используется двухточечный шаблон, для второй – трехточечный шаблон. В результате вместо (26) получается система линейных алгебраических уравнений

$$a_p S_{i,j} = a_w S_{i-1,j} + a_e S_{i+1,j} + a_s S_{i,j-1} + a_n S_{i,j+1} + b, \quad (27)$$

которая по виду совпадает с (21); коэффициенты a_p, \dots, a_n и член b в (21) и (27) различны. Решение строится аналогично методом прогонок.

Следует заметить, что уравнение неразрывности (12) имеет такой же вид, как в несжимаемой среде, для которой алгоритмы расчета поля течения с помощью процедуры SIMPLE представляются весьма эффективными. Кроме того, сама процедура определения поля скорости совместно с полем давления оказывается полностью неявной, поскольку, как видно из уравнений (15), (16), значение скорости в каком-либо узле сетки не зависит от значений скорости в соседних узлах. В результате поправка давления ведет к корректировке скорости именно в этом узле и не меняет значения скорости в соседних точках, которые могли бы приводить к коррекции скорости в рассматриваемом узле.

Плотность S входит в (13) как источниковый член, поэтому при необходимости после определения S на верхнем временном слое выполняется *III этап*: производятся итерации для уточнения всех переменных u, v, Π, S . На этом этапе попеременно решаются уравнения (21), (17), (18), (27), причем (21) и (27) решаются явно:

$$\delta \Pi_{i,j} = \frac{a_w}{a_p} \delta \Pi_{i-1,j} + \frac{a_e}{a_p} \delta \Pi_{i+1,j} + \frac{a_s}{a_p} \delta \Pi_{i,j-1} + \frac{a_n}{a_p} \delta \Pi_{i,j+1} + \frac{b}{a_p}, \quad (28)$$

$$S_{i,j} = \frac{a_w}{a_p} S_{i-1,j} + \frac{a_e}{a_p} S_{i+1,j} + \frac{a_s}{a_p} S_{i,j-1} + \frac{a_n}{a_p} S_{i,j+1} + \frac{b}{a_p}. \quad (29)$$

Значения коэффициентов и свободные члены в (28), (29) на каждом итерационном шаге пересчитываются заново. Для расчета переменной давления применяется метод нижней релаксации, способствующий устойчивости численного решения: $\Pi^{k+1} = \Pi^k + \alpha_{\Pi} \delta \Pi$, где $\alpha_{\Pi} < 1$; принималось $\alpha_{\Pi} = 0.5$.

Итерации выполняются до достижения заданной точности, которая определяется по локальному балансу массы соли. Для этого уравнение (26) интегрируется по прост-

ранству, что равнозначно в дискретном виде суммированию конечно-разностного аналога уравнения (26) по пространственной сетке. Сделав преобразования и упрощения, можно получить балансовое соотношение, определяющее скорость увеличения массы соли в единице объема на текущем временном слое (см. рис.2)

$$\begin{aligned} \mu_1 = \mu_3 + \mu_4, \quad \mu_1 &= \frac{\phi}{A\tau} \sum_{j=2,m} \sum_{i=2,n} (S_{i,j}^{k+1} - S_{i,j}^k) \Delta x_i \Delta y_j, \\ \mu_3 &= \frac{\phi}{A} \sum_{i=2,n} S_0 v_0 \Delta x_i, \quad \mu_4 = -R_v \frac{\phi}{A} \sum_{i=2,n} \frac{S_{i,2} - S_{i,1}}{\Delta y_1} \Delta x_i. \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь μ_1 – скорость увеличения массы соли, μ_3 и μ_4 – потоки соли через нижнюю границу, обусловлены движением жидкости и диффузией; τ – временной шаг. Боковые и верхняя границы для соли непроницаемы. Определяется погрешность выполнения первого равенства (30)

$$\Delta\mu = 2 \left| \frac{\mu_1 - \mu_3 - \mu_4}{\mu_1 + \mu_3 + \mu_4} \right|. \quad (31)$$

Итерации прекращаются, если $\Delta\mu$ оказывается меньше некоторой заданной величины.

Для контроля за точностью численного решения определяется также интегральный баланс массы, который получается при интегрировании первого уравнения (30) по времени и описывает изменение массы соли в единице объема за все время процесса (от 0 до t). В разностном виде эта процедура соответствует суммированию всех временных слоев с первого до $(k+1)$ -го (умноженных на τ).

$$\begin{aligned} M_1 = M_3 + M_4, \quad M_1 &= \frac{\phi}{A} \sum_{j=2,m} \sum_{i=2,n} S_{i,j}^{k+1} \Delta x_i \Delta y_j - \frac{\phi}{A} \sum_{j=2,m} \sum_{i=2,n} S_{i,j}^0 \Delta x_i \Delta y_j, \\ M_3 &= \sum_{l=1,k+1} \mu_3^l \tau, \quad M_4 = \sum_{l=1,k+1} \mu_4^l \tau. \end{aligned} \quad (32)$$

Здесь M_1 – прирост массы соли, M_3 и M_4 – количество соли, поступившее через нижнюю границу с движущейся жидкостью и за счет диффузии. Погрешность в расчете массы определяется величиной

$$\Delta M = 2 \left| \frac{M_1 - M_3 - M_4}{M_1 + M_3 + M_4} \right|. \quad (33)$$

Следует иметь в виду, что величины μ_1 , μ_3 , μ_4 , M_1 , M_3 , M_4 описывают динамику соли с точностью до константы α , поскольку, как говорилось выше, плотность соли s связана с присутствующей в балансовых соотношениях величиной S равенством $S = \alpha s$.

Шаг интегрирования по времени τ находится по характерной скорости входного

потока жидкости и выражается как $\tau = \text{Ku} \Delta y_{\min}$, где Ku – число Куранта, Δy_{\min} – минимальный по вертикали пространственный шаг.

4. Тестирование численного кода

В качестве тестов решены три задачи, описывающие основные процессы в двух-компонентной жидкости. В первой из них имеется диффузия соли в растворе, во второй – перенос соли вертикальным потоком воды и диффузией, в третьей – концентрационная конвекция.

4.1. Диффузия. Рассматривается квадратная область с раствором соли. В начальный момент соль находится только в нижней половине ($0 \leq y \leq 0.5$), где плотность раствора $S = S_0$. В верхней половине ($0.5 < y \leq 1$) соли нет, содержится чистая вода, $S = 0$ (рис.3, кривая 1). Жидкость неподвижна, со временем происходит сглаживание «ступени» плотности за счет диффузии. Задача заключается в расчете профилей плотности и проверке моделирования процесса диффузии.

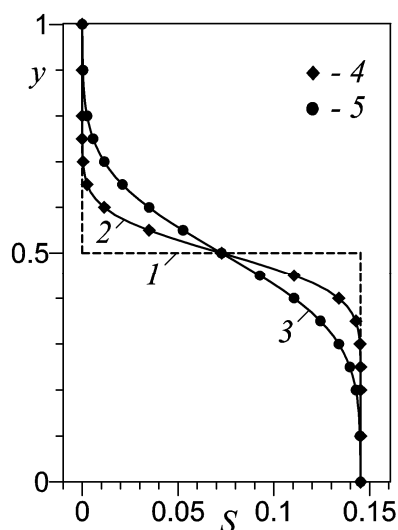


Рис.3. Начальное распределение плотности S по вертикали (1), численное решение при $t=0.25$ (2), 1.0 (3), аналитическое решение при $t=0.25$ (4), 1.0 (5).

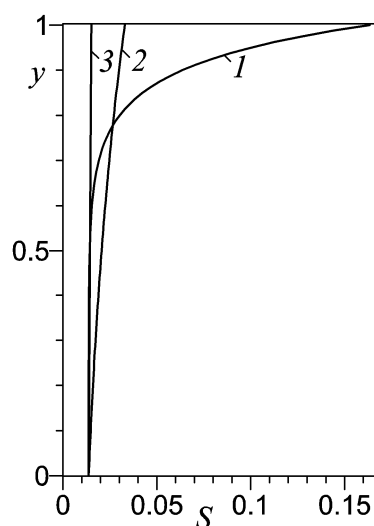


Рис.4. Распределение плотности S по вертикали при $R_v=0.1$ (1), 1 (2), 10 (3) в момент времени $t=1.0$.

Задача решена численно при $R_s = 10^{-6}$, $R_v = 10^{-2}$, $\mathbf{W}_0 = 0$, $S_0 = 0.1453$ (соответствует концентрации соли $c_0 = 0.1$). Интегрирование проведено на равномерной пространственной сетке 61×61 с временным шагом $\tau = 1.667 \cdot 10^{-3}$ (соответствует числу Куранта $\text{Ku} = 0.1$), итерации на третьем этапе не делались. На рис.3 нанесены кривые, представляющие собой вертикальные профили плотности S при $x = 0.5$ в различные моменты времени. Погрешность расчета массы $\Delta M = 4.89 \cdot 10^{-6}$ (2), $2.00 \cdot 10^{-5}$ (3). В течение всего процесса $M_3 = 0$, так как нет потока жидкости через нижнюю границу.

При выбранных параметрах $R_s / R_v \ll 1$, поэтому роль силы тяжести пренебрежимо мала, в системе наблюдается лишь диффузия соли и задача сводится к решению уравнения диффузии $\partial S / \partial t = R_v \Delta S$ в одномерном приближении. При начальном рас-

пределении переменной S в форме «ступени» уравнение диффузии имеет аналитическое решение, совпадающее с решением уравнения теплопроводности [11]:

$$S(y, t) = \frac{S_0}{2} \left(1 - \operatorname{erf} \left(\frac{y - 0.5}{2\sqrt{R_v t}} \right) \right). \quad (34)$$

Функция $\operatorname{erf}(z)$ – интеграл ошибок – определяется как $\operatorname{erf}(z) = 2/\sqrt{\pi} \int_0^z e^{-\xi^2} d\xi$. На рис.3

маркерами показана зависимость (34) при двух различных t , таких же как в численном решении. Видно, что маркеры попадают на кривые с высокой точностью, что демонстрирует правильность моделирования процесса диффузии.

4.2. Вертикальный поток и диффузия. В квадратной области в начальный момент соль распределена равномерно, плотность раствора S_0 . Раствор втекает в расчетную область через нижнюю границу и движется вверх с постоянной скоростью \mathbf{W}_0 , через верхнюю границу вытекает чистая вода. Со временем у верхней границы накапливается соль, она распространяется вниз посредством диффузии. Задача заключается в определении профилей плотности раствора и проверке моделирования динамики соли у верхней границы области.

Таблица 1. Составляющие баланса массы M_1, M_3, M_4 , плотность на верхней границе S^* при вариации сетки; число Куранта $Ku = 10^{-3}$.

Сетка	M_1	M_3	M_4	S^*
21×21	$3.342 \cdot 10^{-3}$	$5.475 \cdot 10^{-3}$	$-2.133 \cdot 10^{-3}$	$3.271 \cdot 10^{-2}$
41×41	$3.238 \cdot 10^{-3}$	$5.475 \cdot 10^{-3}$	$-2.237 \cdot 10^{-3}$	$3.287 \cdot 10^{-2}$
81×81	$3.186 \cdot 10^{-3}$	$5.475 \cdot 10^{-3}$	$-2.289 \cdot 10^{-3}$	$3.295 \cdot 10^{-2}$
161×161	$3.160 \cdot 10^{-3}$	$5.475 \cdot 10^{-3}$	$-2.315 \cdot 10^{-3}$	$3.299 \cdot 10^{-2}$
321×321	$3.147 \cdot 10^{-3}$	$5.475 \cdot 10^{-3}$	$-2.328 \cdot 10^{-3}$	$3.301 \cdot 10^{-2}$

Задача решена при $R_s = 10^{-6}$, $R_v = 1.0$, $\mathbf{W}_0 = (0, 1)$, $S_0 = 1.369 \cdot 10^{-2}$ (соответствует концентрации соли $c_0 = 1.0 \cdot 10^{-2}$). Поскольку $R_s / R_v \ll 1$, то влияние силы тяжести пренебрежимо мало. Численное интегрирование выполнено на равномерной пространственной сетке, количество узлов сетки и временной шаг варьировались. В табл.1 в момент времени $t=1.0$ показаны данные, полученные на разных сетках при числе Куранта $Ku=10^{-3}$. В табл.2 в тот же момент времени представлены данные при вариации числа Ku ; сетка 81×81. Итерации на третьем этапе проводились до достижения условия $\Delta m < 10^{-6}$, количество итерационных шагов k_{it} составляло: $k_{it} = 1 \div 9$ (для данных из табл.1), $227 \div 1$ (для данных из табл.2). В табл.1 видно, что при уменьшении шага сетки решение стремится к конечному пределу. Если при переходе от сетки 21×21 к 41×41 ве-

личина M_1 меняется на 3.2%, M_4 – на 4.9%, S^* – на 0.49%, то при переходе от сетки 161×161 к 321×321 те же величины меняются гораздо меньше: M_1 – на 0.41%, M_4 – на 0.56%, S^* – на 0.06%. Число Куранта Ku на решение практически не влияет, при $Ku \leq 10^{-2}$ показанные в табл.2 величины совпадают, по крайней мере, в четырех знаках.

Таблица 2. Составляющие баланса массы M_1, M_3, M_4 , плотность на верхней границе S^* при вариации числа Куранта Ku ; сетка 81×81 .

Число Ku	M_1	M_3	M_4	S^*
$1.0 \cdot 10^{-1}$	$3.185 \cdot 10^{-3}$	$5.475 \cdot 10^{-3}$	$-2.290 \cdot 10^{-3}$	$3.294 \cdot 10^{-2}$
$1.0 \cdot 10^{-2}, 1.0 \cdot 10^{-3}, 1.0 \cdot 10^{-4}$	$3.186 \cdot 10^{-3}$	$5.475 \cdot 10^{-3}$	$-2.289 \cdot 10^{-3}$	$3.295 \cdot 10^{-2}$

Проведены расчеты при различных значениях параметра R_v , который характеризует отношение скорости диффузии к скорости потока жидкости на входе. Взято $R_v = 0.1, 1, 10$, сетка 81×81 , $Ku = 10^{-3}$, прочие параметры прежние. На рис.4, где приведены вертикальные профили плотности S при $x = 0.5$, показано, что, согласно ожиданиям, при возрастании R_v распределение плотности становится более равномерным, величина S^* у верхней границы уменьшается, поскольку диффузия усиливается и уносит вниз все больше соли, которая затем выходит из расчетной области через нижнюю границу. Численное моделирование дает качественно верную картину.

4.3. Концентрационная конвекция. В квадратной области соль распределена изначально так, что ее концентрация возрастает линейно слева направо. В этой задаче изменены граничные условия: на боковых границах поддерживается постоянная плотность раствора (справа S_0 , слева S^* , $S^* < S_0$), – так что за счет диффузии соль через правую границу поступает в расчетную область, а через левую выходит из нее. Жидкость не может втекать и вытекать из области (нормальная компонента скорости на границах равна нулю). На систему действует сила тяжести, приводящая к развитию концентрационной конвекции: у правой границы раствор, будучи более тяжелым, опускается вниз, у левой границы он легче, поэтому поднимается вверх. Задача заключается в определении полей плотности, скорости и проверке моделирования концентрационной конвекции.

Чтобы решить сформулированную задачу, произведены следующие изменения:

- 1) сила тяжести ориентируется вдоль оси x : $\mathbf{e} = (-1, 0)$;
- 2) при $y = 1$ задается постоянная плотность S^* ;
- 3) при $y = 0, y = 1$ задается $\partial u / \partial y = 0, v = 0$. Схема задачи показана на рис.5.

Задача решена при $R_s = 1, R_v = 1.0 \cdot 10^{-2}, \mathbf{W}_0 = 0, S_0 = 3.119 \cdot 10^{-1}$ (соответствует концентрации соли $c_0 = 2.0 \cdot 10^{-1}$), $S^* = 0$ ($c^* = 0$). Чтобы влияние силы тяжести было существенным, параметры выбраны так, что $R_s \gg R_v$. Численное интегрирование выполнено на различных пространственных сетках, временной шаг варьировался, итерации не делались. Вычисления продолжались до момента времени $t=200$, когда установился стационарный режим.

Конвективное течение усиливает массообмен на боковых границах (по сравнению с чистой диффузией), что характеризуется концентрационным числом Нуссельта, которое на правой границе обозначено как Nu_0 , на левой – Nu^* . По определению, в конечно-разностном виде

$$Nu_0 = -\frac{1}{A(S_0 - S^*)} \sum_{i=2,n} \frac{S_{i,2} - S_{i,1}}{\Delta y_1} \Delta x_i, \quad Nu^* = -\frac{1}{A(S_0 - S^*)} \sum_{i=2,n} \frac{S_{i,m+1} - S_{i,m}}{\Delta y_m} \Delta x_i. \quad (35)$$

В стационарном режиме справедливо равенство $Nu_0 = Nu^*$, по выполнению которого можно судить о точности численного интегрирования. При отсутствии конвекции $Nu=1$, поэтому целесообразней рассматривать величину $Nu-1$, отвечающую только за конвективный массообмен. Интенсивность течения характеризуется максимальной скоростью движения $|\mathbf{W}|_{\max}$ и кинетической энергией раствора в единице объема K :

$$K = 0.5 \frac{\phi}{A} \sum_{j=2,m} \sum_{i=2,n} S_{i,j} \sqrt{u_{i,j}^2 + v_{i,j}^2} \Delta x_i \Delta y_j. \quad (36)$$

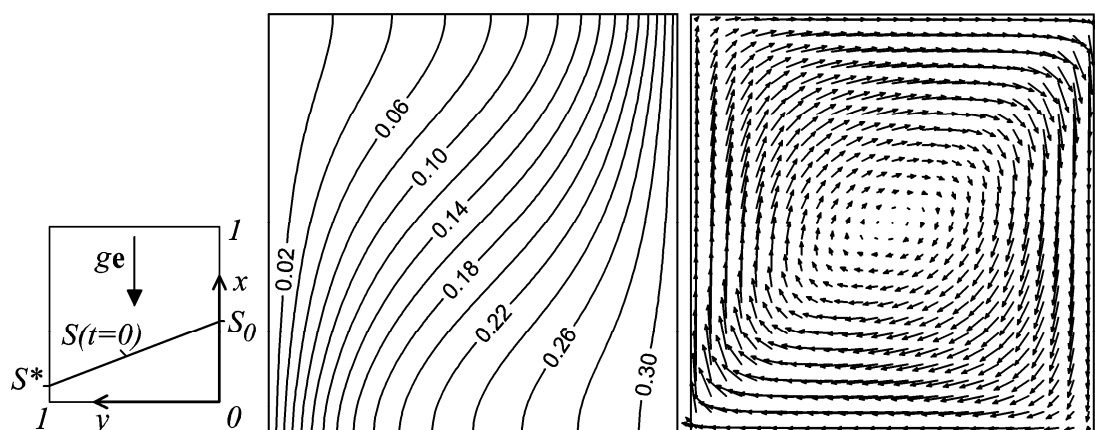


Рис.5. Схема задачи (слева), изолинии плотности S (в центре), поле скоростей (справа).

Компоненты скорости u , v в (36) должны соответствовать центру ячейки основной сетки, они находятся линейной интерполяцией известных значений на ее гранях. В табл.3 показаны данные, полученные на различных сетках при $Ku=0.1$. Во всех вариантах имеется совпадение Nu_0-1 и Nu^*-1 не менее чем в пяти знаках. Решение, полученное на равномерных сетках, стремится к конечному пределу – при возрастании количества узлов сетки представленные величины меняются все меньше. При переходе от сетки 21×21 к 41×41 значение Nu_0-1 возрастает на 0.88%, $|\mathbf{W}|_{\max}$ – на 7.3%, K – на 0.72%, однако при переходе от сетки 81×81 к 161×161 изменения составляют для Nu_0-1 всего 0.055%, $|\mathbf{W}|_{\max}$ – 1.7%, K – 0.046%. При расчетах на сетке 81×81 число Ku варьировалось от 0.01 до 1.0, решение при этом оставалось постоянным. При $Ku \geq 10$ решение начинает меняться, что указывает на низкую точность численного интегрирования при таких значениях Ku .

На рис.5 показаны найденные поля плотности и скорости ($Ku=0.1$, сетка 161×161). Как и предполагалось, в области формируется вихревое движение, направленное вниз у правой границы и вверх – у левой. Благодаря движению изолинии плотности искривляются, массообмен на границах усиливается.

Таблица 3. Минимальные шаги сетки Δx_{\min} и Δy_{\min} , коэффициенты сгущения C_x и C_y по осям x и y , отклонение числа Нуссельта от единицы Nu_0-1 и Nu^*-1 на правой и левой границах, максимальная скорость $|\mathbf{W}|_{\max}$, кинетическая энергия K при вариации сетки.

Сетка	$\Delta x_{\min}, C_x$	$\Delta y_{\min}, C_y$	Nu_0-1	Nu^*-1	$ \mathbf{W} _{\max}$	K
Равномерные сетки						
21×21	$5.0 \cdot 10^{-2}, 1$	$5.0 \cdot 10^{-2}, 1$	0.52187	0.52187	0.10958	$1.5107 \cdot 10^{-3}$
41×41	$2.5 \cdot 10^{-2}, 1$	$2.5 \cdot 10^{-2}, 1$	0.52648	0.52648	0.11754	$1.5216 \cdot 10^{-3}$
81×81	$1.25 \cdot 10^{-2}, 1$	$1.25 \cdot 10^{-2}, 1$	0.52763	0.52763	0.12163	$1.5244 \cdot 10^{-3}$
161×161	$6.25 \cdot 10^{-3}, 1$	$6.25 \cdot 10^{-3}, 1$	0.52792	0.52792	0.12370	$1.5251 \cdot 10^{-3}$
Неравномерные сетки						
41×161	$7.576 \cdot 10^{-3}, 5$	$6.25 \cdot 10^{-3}, 1$	0.52747	0.52747	0.12350	$1.5240 \cdot 10^{-3}$
41×41	$7.576 \cdot 10^{-3}, 5$	$7.576 \cdot 10^{-3}, 5$	0.52613	0.52613	0.12315	$1.5224 \cdot 10^{-3}$

Были также использованы неравномерные симметричные сетки с линейным уменьшением шага по направлению к границам области. Сгущение сетки по осям x и y определяется коэффициентами $C_x = \Delta x_{\max} / \Delta x_{\min}$, $C_y = \Delta y_{\max} / \Delta y_{\min}$, где индексы «max» и «min» соответствуют максимальному и минимальному шагам. В табл.3 показано, что в одном варианте бралась сетка, неравномерная только по оси x , во втором – по x и y ; $Ku=1.0$. Видно, что данные, полученные на неравномерных и равномерных сетках, близки.

Все вычисления проводились на персональном компьютере Intel Pentium M, процессор 1.8 ГГц. Один вариант требовал от нескольких секунд до нескольких часов машинного времени.

5. Заключение

Разработан метод численного решения задач о динамике двухкомпонентной жидкости в пористой среде, основанный на математической модели [3]. Тестирование показано эффективность численного кода, который в дальнейшем планируется применить к задаче, сформулированной в [3], об устойчивости слоя жидкости с повышенным содержанием соли около верхней границы области и о развитии концентрационной конвекции.

Автор благодарит Г.Г. Цыпкина за постановку задачи и ценные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Цыпкин Г.Г. Течения с фазовыми переходами в пористых средах. – М.: Физматлит, 2009, 232 с.

2. *Вабищевич П.Н.* Явно-неявные алгоритмы для задач многофазной фильтрации // Математическое моделирование, 2010, т.22, №4, с.118-128.
3. *P'ichev A.T., Tsyupkin G.G., Pritchard D., Richardson Ch.N.* Instability of the salinity profile during the evaporation of saline groundwater // J. Fluid Mech., 2008, v.614, p.87-104.
4. *Васильев В.И., Максимов А.М., Петров Е.Е., Цыпкин Г.Г.* Тепломассообмен в промерзающих и протаивающих грунтах. – М.: Физматлит, 1996, 224 с.
5. *Вабищевич П.Н.* Численные методы решения задач со свободной границей. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987, 164 с.
6. *Патанкар С.* Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. – М.: Энергоиздат, 1984, 152с.
7. *Соболева Е.Б., Крюков И.А.* Тепломассообмен в околоскритической жидкости с уравнением состояния в приближении среднего поля // Математическое моделирование, 2000, т.12, №7, с.87-96.
8. *Соболева Е.Б., Крюков И.А.* Тепло- и массообмен в околоскритической среде при малых числах Маха // Математическое моделирование, 2000, т.12, №10, с.31-45.
9. *Полежаев В.И., Соболева Е.Б.* Конвекция Рэлея-Бенара в околоскритической жидкости вблизи порога устойчивости // Изв. РАН. Механика жидкости и газа, 2005, №2, с.48-61.
10. *Soboleva E.B.* Adiabatic heating and convection in a porous medium filled with a near-critical fluid // Annals of the New York Academy of Sciences, 2009, v.1161, p.117-134.
11. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. – М.: Наука, 1986, 736 с.

Поступила в редакцию 11.10.12