V. G. Bardakov, Linear representations of the group of conjugating automorphisms and the braid groups of some manifolds, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2005, Volume 46, Number 1, 17–31

Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2005. Том 46, № 1

УДК 512.54

ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ СОПРЯГАЮЩИХ АВТОМОРФИЗМОВ И ГРУПП КОС НЕКОТОРЫХ МНОГООБРАЗИЙ

В. Г. Бардаков

Аннотация: Построено продолжение представления Бурау на группу сопрягающих автоморфизмов C_n. Установлено, что точное линейное представление Лоуренс — Крамера группы кос B_3 продолжается на группу C_3, а при $n \geq 4$ построено продолжение этого представления при некоторых дополнительных ограничениях на параметры представления. Доказано, что группа кос $B_n(S^2)$ сферы, а также группа классов отображений $M(0,n)$ сферы с n выколотыми точками являются линейными при всех $n \geq 2$. Группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(F_n)$ не линейна при $n \geq 3$, а группа $\mathrm{Aut}(F_2)$ линейна тогда и только тогда, когда линейна группа кос B_4. С учетом представления Лоуренс — Крамера построено точное линейное представление группы $\mathrm{Aut}(F_2)$.

Ключевые слова: группа кос Артина, группы кос многообразий, автоморфизм свободной группы, сопрягающие автоморфизмы, точное линейное представление.

Классическая группа кос Артина B_n, $n \geq 2$, на n нитях (см. [1]) задается порождающими $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ и соотношениями

$$\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \quad \text{при } i = 1, 2, \dots, n-2, \tag{1}$$

$$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \quad \text{при } |i-j| \geq 2. \tag{2}$$

Вопрос о линейности (т. е. о точной представимости конечномерными матрицами над полем) групп кос сформулировал Бурау [2] в 1936 г. Отметим, что группа B_2 бесконечная циклическая, а потому является линейной. Линейность B_3 доказал Магнус (см. [1, теорема 3.15]). Вопрос о линейности групп B_n при $n \geq 4$ почти 65 лет оставался открытым. Долгое время существовала гипотеза о том, что представление Бурау является точным. В 1991 г. Муди [3] опроверг эту гипотезу, построив нетривиальный элемент, лежащий в ядре представления Бурау группы B_n при $n \geq 9$. Позднее Лонг и Патон [4] показали, что представление Бурау не является точным уже при $n \geq 6$, а Бигелоу [5] снизил эту границу до 5. Вопрос о точности представления Бурау группы B_4 до сих пор остается открытым.

Лоуренс [6] построила новые представления группы кос B_n, а в работах Крамера [7] и Бигелоу [8] показано, что одно из этих представлений является точным. Следовательно, группы кос являются линейными.

Как установил Артин (см. [1, теорема 1.9]), группа кос B_n вкладывается в группу автоморфизмов $\mathrm{Aut}(F_n)$ свободной группы F_n со свободными порождающими $x_1, x_2, \dots, x_n$. При этом известно [9], что сама группа $\mathrm{Aut}(F_n)$ не является линейной при $n \geq 3$. Возникает естественный

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02–01–01118).

Вопрос 1. *Найти максимальную по включению линейную подгруппу группы автоморфизмов* $\mathrm{Aut}(F_n)$, $n \geq 3$, *содержащую группу кос* B_n.

По упоминавшейся теореме Артина [1, теорема 1.9] автоморфизм β из $\mathrm{Aut}(F_n)$ принадлежит группе кос B_n тогда и только тогда, когда β удовлетворяет следующим двум условиям:

1) $\beta(x_i) = f_i^{-1} x_{\pi(i)} f_i$, $1 \leq i \leq n$,

2) $\beta(x_1 x_2 \ldots x_n) = x_1 x_2 \ldots x_n$,

где $f_i \in F_n$, а π — некоторая перестановка множества индексов $\{1, 2, \ldots, n\}$. Автоморфизмы, удовлетворяющие условию 1, называются *сопрягающими автоморфизмами.* Очевидно, множество сопрягающих автоморфизмов образует группу, которая называется *группой сопрягающих автоморфизмов* и обозначается символом C_n. Группа кос B_n является подгруппой группы C_n. Строение группы C_n похоже на строение группы B_n [10]. Поэтому можно сформулировать вопрос (см. [11, вопрос 15.9]) о линейности группы C_n при $n \geq 3$ ($C_2 \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$, а потому группа C_2 линейна). Один из возможных подходов к решению этого вопроса состоит в продолжении известных линейных представлений группы кос B_n на группу C_n.

В предлагаемой работе мы построим продолжение представления Бурау на группу C_n, а также покажем, что точное линейное представление Лоуренс — Крамера группы B_3 продолжается на группу C_3, а при $n \geq 4$ будет построено продолжение этого представления при некоторых дополнительных ограничениях на параметры представления.

Группу кос B_n можно рассматривать как частный случай общей конструкции группы кос $B_n(M)$ на n нитях многообразия M (точное определение см. в § 2).

Возникает следующий

Вопрос 2. *Для каких многообразий* M *и для каких значений* n *группа кос* $B_n(M)$ *является линейной?*

Наибольший интерес представляют двумерные связные многообразия. Так как все компактные связные двумерные многообразия классифицированы, естественно начать исследовать группы кос этих многообразий. При этом особую роль играют группы кос $B_n(S^2)$ сферы S^2 и $B_n(P^2)$ проективной плоскости P^2, поскольку группы кос только этих многообразий имеют кручение.

В работе мы докажем, что группа кос $B_n(S^2)$ сферы является линейной при всех $n \geq 2$. С группой $B_n(S^2)$ тесно связана группа классов отображений $M(0, n)$ сферы с n выколотыми точками. Мы докажем, что группа $M(0, n)$ является линейной для всякого $n \geq 2$.

Как отмечалось выше, группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(F_n)$ не линейна при $n \geq 3$. В [12] установлено, что группа $\mathrm{Aut}(F_2)$ линейна тогда и только тогда, когда линейна группа кос B_4. В последнем параграфе, используя представление Лоуренс — Крамера, укажем в явном виде точное линейное представление группы $\mathrm{Aut}(F_2)$.

Автор благодарит участников семинара «Эварист Галуа» за полезные обсуждения, а также А. А. Коробова, прочитавшего рукопись и внесшего ряд полезных предложений.

Результат о линейности группы кос сферы анонсирован в [13]. Пока работа готовилась к печати, мне стало известно, что Бигелоу и Будней [14] независимо доказали линейность группы кос сферы и группы классов отображений сферы с n выколотыми точками.

§ 1. Продолжение линейных представлений группы кос на группу сопрягающих автоморфизмов

Напомним, что представление Бурау $\psi : B_n \to \mathrm{GL}(W_n)$ отображает группу кос B_n в группу автоморфизмов $\mathrm{GL}(W_n)$ свободного n-мерного модуля W_n над кольцом лорановских многочленов $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$. Если $w_1, w_2, \ldots, w_n$ — базис модуля W_n, то элементы $\psi(\sigma_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, действуют на базисных элементах по правилу (условимся писать вместо $\psi(\sigma_i)(w_j)$ или $w_j^{\psi(\sigma_i)}$ просто $\sigma_i(w_j)$ или $w_j^{\sigma_i}$ соответственно):

$$\begin{aligned}
&\sigma_i(w_i) = (1-q)w_i + qw_{i+1},\\
&\sigma_i(w_{i+1}) = w_i,\\
&\sigma_i(w_l) = w_l \quad \text{при } l \neq i, i+1.
\end{aligned}$$

При этом мы рассматриваем правое действие. Как установила А. Г. Савушкина [15], группа сопрягающих автоморфизмов C_n порождается автоморфизмами $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ свободной группы F_n. Эти автоморфизмы действуют на свободных порождающих по правилу

$$\sigma_i : \begin{cases} x_i \mapsto x_i x_{i+1} x_i^{-1},\\ x_{i+1} \mapsto x_i,\\ x_l \mapsto x_l \quad \text{при } l \neq i, i+1. \end{cases}$$

$$\alpha_i : \begin{cases} x_i \mapsto x_{i+1},\\ x_{i+1} \mapsto x_i,\\ x_l \mapsto x_l \quad \text{при } l \neq i, i+1. \end{cases}$$

При этом автоморфизмы $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$ порождают группу кос B_n и удовлетворяют соотношениям (1), (2). Автоморфизмы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ порождают группу подстановок S_n, которая задается соотношениями

$$\alpha_i^2 = 1 \quad \text{при } i = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{3}$$

$$\alpha_i \alpha_{i+1} \alpha_i = \alpha_{i+1} \alpha_i \alpha_{i+1} \quad \text{при } i = 1, 2, \ldots, n-2, \tag{4}$$

$$\alpha_i \alpha_j = \alpha_j \alpha_i \quad \text{при } |i-j| \geq 2. \tag{5}$$

Система определяющих соотношений группы C_n помимо соотношений (1)–(5) содержит соотношения

$$\alpha_i \sigma_j = \sigma_j \alpha_i \quad \text{при } |i-j| \geq 2, \tag{6}$$

$$\sigma_i \alpha_{i+1} \alpha_i = \alpha_{i+1} \alpha_i \sigma_{i+1} \quad \text{при } i = 1, 2, \ldots, n-2, \tag{7}$$

$$\sigma_{i+1} \sigma_i \alpha_{i+1} = \alpha_i \sigma_{i+1} \sigma_i \quad \text{при } i = 1, 2, \ldots, n-2. \tag{8}$$

Справедливо

Предложение 1. *Существует линейное представление $\tilde{\psi} : C_n \to \mathrm{GL}(W_n)$, являющееся продолжением представления Бурау $\psi : B_n \to \mathrm{GL}(W_n)$.*

Доказательство. Для порождающих группы кос положим $\tilde{\psi}(\sigma_i) = \psi(\sigma_i)$, а действие автоморфизмов $\tilde{\psi}(\alpha_i)$ определим на базисных элементах модуля W_n равенствами

$$\begin{aligned}
&\alpha_i(w_i) = w_{i+1},\\
&\alpha_i(w_{i+1}) = w_i,\\
&\alpha_i(w_l) = w_l \quad \text{при } l \neq i, i+1.
\end{aligned}$$

Так как всякий элемент группы C_n является словом от порождающих $\sigma_1^{\pm 1}, \sigma_2^{\pm 1}, \ldots, \sigma_{n-1}^{\pm 1}$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$, тем самым мы определяем отображение $\tilde{\psi} : C_n \to \mathrm{GL}(W_n)$. Покажем, что это отображение является гомоморфизмом. Для этого достаточно проверить, что все соотношения, выполненные в группе C_n, имеют место и в группе $\tilde{\psi}(C_n)$. Для соотношений (1)–(5) это очевидно. Проверим, что в группе $\tilde{\psi}(C_n)$ выполняется образ соотношения (7), т. е. справедливо равенство

$$\tilde{\psi}(\sigma_i)\tilde{\psi}(\alpha_{i+1})\tilde{\psi}(\alpha_i) = \tilde{\psi}(\alpha_{i+1})\tilde{\psi}(\alpha_i)\tilde{\psi}(\sigma_{i+1}). \tag{9}$$

Для этого надо проверить, что для всякого вектора $v \in W_n$ его образ под действием автоморфизма, стоящего в левой части равенства (9), совпадает с образом этого вектора под действием правой части равенства (9). Так как v является линейной комбинацией базисных векторов, требуемое равенство достаточно проверить только для них. Действуя левой частью, получим

$$\begin{aligned}
w_i^{\sigma_i\alpha_{i+1}\alpha_i} &= (1-q)w_{i+1} + qw_{i+2},\\
w_{i+1}^{\sigma_i\alpha_{i+1}\alpha_i} &= w_{i+1},\\
w_{i+2}^{\sigma_i\alpha_{i+1}\alpha_i} &= w_i,\\
w_l^{\sigma_i\alpha_{i+1}\alpha_i} &= w_l \quad \text{при } l \neq i, i+1, i+2.
\end{aligned}$$

Аналогичным образом, действуя правой частью соотношения (9), приходим к равенствам

$$\begin{aligned}
w_i^{\alpha_{i+1}\alpha_i\sigma_{i+1}} &= (1-q)w_{i+1} + qw_{i+2},\\
w_{i+1}^{\alpha_{i+1}\alpha_i\sigma_{i+1}} &= w_{i+1},\\
w_{i+2}^{\alpha_{i+1}\alpha_i\sigma_{i+1}} &= w_i,\\
w_l^{\alpha_{i+1}\alpha_i\sigma_{i+1}} &= w_l \quad \text{при } l \neq i, i+1, i+2.
\end{aligned}$$

Следовательно, соотношение (9) выполняется. Аналогично проверяется, что сохраняются и соотношения (5) и (8). Предложение доказано.

Напомним [6–8] определение точного линейного представления Лоуренс — Крамера. Пусть V_n — свободный модуль размерности $m = n(n-1)/2$ с базисом v_{ij}, $1 \leq i < j \leq n$, над кольцом лорановских многочленов $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}, q^{\pm 1}]$. Тогда представление $\rho : B_n \to \mathrm{GL}(V_n)$ определяется действием порождающих σ_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, на базисе модуля V_n равенствами

$$\begin{aligned}
&\sigma_i(v_{k,i}) = (1-q)v_{k,i} + qv_{k,i+1} + q(q-1)v_{i,i+1},\\
&\sigma_i(v_{k,i+1}) = v_{k,i} \quad \text{при } k < i,\\
&\sigma_i(v_{i,i+1}) = tq^2 v_{i,i+1},\\
&\sigma_i(v_{i,l}) = tq(q-1)v_{i,i+1} + (1-q)v_{i,l} + qv_{i+1,l} \quad \text{при } i+1 < l,\\
&\sigma_i(v_{i+1,l}) = v_{i,l},\\
&\sigma_i(v_{k,l}) = v_{k,l} \quad \text{при } \{k,l\} \cap \{i, i+1\} = \varnothing.
\end{aligned}$$

Из этих формул нетрудно получить формулы действия элемента σ_i^{-1}:

$$\begin{aligned}
&\sigma_i^{-1}(v_{k,i}) = v_{k,i+1},\\
&\sigma_i^{-1}(v_{k,i+1}) = q^{-1}v_{k,i} + q^{-1}(q-1)v_{k,i+1} - t^{-1}q^{-2}(q-1)v_{i,i+1} \quad \text{при } k<i,\\
&\sigma_i^{-1}(v_{i,i+1}) = t^{-1}q^{-2}v_{i,i+1},\\
&\sigma_i^{-1}(v_{i,l}) = v_{i+1,l} \quad \text{при } i+1<l,\\
&\sigma_i^{-1}(v_{i+1,l}) = -q^{-2}(q-1)v_{i,i+1} + q^{-1}v_{i,l} + q^{-1}(q-1)v_{i+1,l},\\
&\sigma_i^{-1}(v_{k,l}) = v_{k,l} \quad \text{при } \{k,l\}\cap\{i,i+1\}=\varnothing.
\end{aligned}$$

Группа крашеных кос P_n порождается элементами

$$a_{i,i+1} = \sigma_i^2, \quad a_{i,j} = \sigma_{j-1}\dots\sigma_{i+1}\sigma_i^2\sigma_{i+1}^{-1}\dots\sigma_{j-1}^{-1}, \quad 1\le i<j-1\le n-1.$$

Выпишем действие порождающих $a_{i,i+1}$, $i=1,2,\dots,n-1$, на базисе модуля V_n:

$$\begin{aligned}
&a_{i,i+1}(v_{k,i}) = (q^2-q+1)v_{k,i} + q(1-q)v_{k,i+1} + q(q-1)(tq^2-q+1)v_{i,i+1},\\
&a_{i,i+1}(v_{k,i+1}) = (1-q)v_{k,i} + qv_{k,i+1} + q(q-1)v_{i,i+1} \quad \text{при } k<i,\\
&a_{i,i+1}(v_{i,i+1}) = t^2q^4v_{i,i+1},\\
&a_{i,i+1}(v_{i,l}) = tq(q-1)(tq^2-q+1)v_{i,i+1} + (q^2-q+1)v_{i,l} + q(1-q)v_{i+1,l} \quad \text{при } i+1<l,\\
&a_{i,i+1}(v_{i+1,l}) = tq(q-1)v_{i,i+1} + (1-q)v_{i,l} + qv_{i+1,l},\\
&a_{i,i+1}(v_{k,l}) = v_{k,l} \quad \text{при } \{k,l\}\cap\{i,i+1\}=\varnothing.
\end{aligned}$$

Можно дать геометрическую интерпретацию порождающих модуля V_n. Пусть $D=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|<1\}$ — единичный диск. Зафиксируем множество $n\ge 1$ различных точек $Y=\{y_1,y_2,\dots,y_n\}$, лежащих внутри диска на вещественной оси, и $y_1<y_2<\dots<y_n$. Положим $D_n = D\setminus Y$. Тогда группа гомеоморфизмов $\mathrm{Homeo}(D_n)$ изоморфна B_n. При этом элементами $\mathrm{Homeo}(D_n)$ являются изотопные классы гомеоморфизмов $D_n\to D_n$, оставляющие неподвижной каждую точку границы $\partial D_n=\partial D=S^1$. Каждый такой гомеоморфизм единственным образом продолжается до гомеоморфизма всего диска D, переставляющего точки $y_1,y_2,\dots,y_n$. *Вилкой* в D_n называется дерево F, вложенное в D, имеющее три ребра и четыре различные вершины d, y_i, y_j, z такие, что $F\cap\partial D=d=\sqrt{-1}$, $F\cap Y=\{y_i,y_j\}$ и z — общая вершина всех трех ребер. Ребро H, соединяющее d с z, называется *ручкой* вилки F. Обозначим через T дугу, являющуюся объединением двух других ребер. Тогда $\partial T=\{y_i,y_j\}$. Эта дуга называется *зубьями* вилки. Вилка называется *стандартной*, если все ее точки имеют неотрицательную мнимую часть. Стандартная вилка задается с точностью до изотопии парой точек $\partial T=\{y_i,y_j\}$. Сопоставим этой стандартной вилке базисный элемент v_{ij} модуля V_n. При этом мы считаем $v_{ij}=v_{ji}$ при $i>j$.

Чтобы продолжить представление Лоуренс — Крамера на группу C_n, мы должны определить действие группы S_n на базисных элементах модуля V_n. Пусть группа S_n действует на множестве Y перестановками. Это действие индуцирует действие на множестве стандартных вилок v_{ij}, $1\le i<j\le n$, а потому и на всем модуле V_n. Если π — подстановка из S_n, действующая на множестве $\{1,2,\dots,n\}$, то положим $\pi(v_{ij})=v_{\pi(i),\pi(j)}$. Тогда автоморфизмы α_i будут дей-

ствовать на базисе модуля V_n по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
&\alpha_i(v_{k,i}) = v_{k,i+1},\\
&\alpha_i(v_{k,i+1}) = v_{k,i} \quad \text{при } k < i,\\
&\alpha_i(v_{i,i+1}) = v_{i,i+1},\\
&\alpha_i(v_{i,l}) = v_{i+1,l} \quad \text{при } i+1 < l,\\
&\alpha_i(v_{i+1,l}) = v_{i,l},\\
&\alpha_i(v_{k,l}) = v_{k,l} \quad \text{при } \{k,l\} \cap \{i, i+1\} = \varnothing.
\end{aligned}$$

Чтобы проверить, что так определенное действие задает гомоморфизм группы S_n в группу $\mathrm{GL}(V_n)$, достаточно проверить, что образы автоморфизмов α_i удовлетворяют соотношениям группы S_n. Для этого заметим, что формулы действия элементов α_i на базисе модуля V_n получаются из соответствующих формул действия порождающих σ_i, если положить $q = t = 1$. Следовательно, при нашем представлении сохраняются соотношения (4), (5). То, что соотношение $\alpha_i^2 = 1$ сохраняется, легко следует из формул действия элемента $a_{i,i+1} = \sigma_i^2$ на базисе модуля V_n. Таким образом, мы построили линейное представление группы S_n. Так как при $n \geq 5$ группа S_n содержит простую группу A_n индекса 2, легко заметить, что построенное представление является точным. Тем самым установлена

Лемма 1. *Построенное представление $S_n \to \mathrm{GL}(V_n)$ является точным линейным представлением группы S_n.*

Следовательно, мы имеем отображение группы C_n в группу $\mathrm{GL}(V_n)$, заданное на порождающих $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$, $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$. При этом отображении будут сохраняться все соотношения, связывающие порождающие α_i, а также соотношения, связывающие порождающие σ_i. Проверим теперь, будут ли сохраняться соотношения, содержащие одновременно порождающие α_i и σ_i.

Каждому автоморфизму φ модуля V_n сопоставим его носитель

$$\mathrm{supp}(\varphi) = \{v_{i,j} \mid \varphi(v_{i,j}) \neq \lambda v_{i,j} \text{ ни для какого } \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

Иными словами, носитель автоморфизма φ состоит из таких базисных векторов, которые не являются собственными для φ. Легко проверить, что

$$\mathrm{supp}(\alpha_i) = \mathrm{supp}(\sigma_i) = \{v_{k,i}, v_{k,i+1} (1 \leq k < i \leq n); v_{i,l}, v_{i+1,l} (2 \leq i+1 < l \leq n)\}.$$

Непосредственно проверяется

Лемма 2. *Пусть натуральные числа i и j таковы, что $1 \leq i < j-1 \leq n-1$. Тогда справедливо равенство*

$$\mathrm{supp}(\beta_i) \cap \mathrm{supp}(\beta_j) = \{v_{i,j}, v_{i,j+1}, v_{i+1,j}, v_{i+1,j+1}\},$$

где $\beta_i \in \{\alpha_i, \sigma_i\}$, $\beta_j \in \{\alpha_j, \sigma_j\}$.

Покажем теперь, что определенное выше действие порождающих σ_i и α_i на модуле V_n определяет гомоморфизм $\rho : C_n \to \mathrm{GL}(V_n)$. Для этого надо проверить, что при гомоморфизме ρ сохраняются соотношения группы C_n.

Рассмотрим соотношения $\alpha_i \sigma_j = \sigma_j \alpha_i$ при $|i - j| \geq 2$. Нам надо показать, что для любого базисного вектора $v_{k,l}$ справедливо равенство $v_{k,l}^{\alpha_i \sigma_j} = v_{k,l}^{\sigma_j \alpha_i}$. Зафиксируем индексы i и j. Не уменьшая общности, можно считать, что $1 \leq i < j-1 \leq n-1$. Если $v_{k,l} \notin \mathrm{supp}(\alpha_i) \cap \mathrm{supp}(\sigma_j)$, то, очевидно, требуемое равенство выполняется. Рассмотрим теперь базисные векторы из пересечения $\mathrm{supp}(\alpha_i) \cap \mathrm{supp}(\sigma_j) = \{v_{i,j}, v_{i,j+1}, v_{i+1,j}, v_{i+1,j+1}\}$. Действуя на них произведением $\alpha_i\sigma_j$, получим

$$\begin{aligned}
&v_{i,j}^{\alpha_i\sigma_j} = (1-q)v_{i+1,j} + qv_{i+1,j+1} + q(q-1)v_{j,j+1},\\
&v_{i,j+1}^{\alpha_i\sigma_j} = v_{i+1,j},\\
&v_{i+1,j}^{\alpha_i\sigma_j} = (1-q)v_{i,j} + qv_{i,j+1} + q(q-1)v_{j,j+1},\\
&v_{i+1,j+1}^{\alpha_i\sigma_j} = v_{i,j}.
\end{aligned}$$

Подействуем теперь на эти векторы произведением $\sigma_j\alpha_i$. Имеем

$$\begin{aligned}
&v_{i,j}^{\sigma_j\alpha_i} = (1-q)v_{i+1,j} + qv_{i+1,j+1} + q(q-1)v_{j,j+1},\\
&v_{i,j+1}^{\sigma_j\alpha_i} = v_{i+1,j},\\
&v_{i+1,j}^{\sigma_j\alpha_i} = (1-q)v_{i,j} + qv_{i,j+1} + q(q-1)v_{j,j+1},\\
&v_{i+1,j+1}^{\sigma_j\alpha_i} = v_{i,j}.
\end{aligned}$$

Сравнивая полученные равенства с предыдущими, видим, что соотношение $\alpha_i\sigma_j = \sigma_j\alpha_i$ при $|i-j| \geq 2$ действительно сохраняется.

Рассмотрим соотношение $\sigma_i\alpha_{i+1}\alpha_i = \alpha_{i+1}\alpha_i\sigma_{i+1}$. Действуя его левой частью на базисные элементы, приходим к равенствам

$$\begin{aligned}
&v_{k,i}^{\sigma_i\alpha_{i+1}\alpha_i} = (1-q)v_{k,i+1} + qv_{k,i+2} + q(q-1)v_{i+1,i+2},\\
&v_{k,i+1}^{\sigma_i\alpha_{i+1}\alpha_i} = v_{k,i+1} \quad \text{при } k < i,\\
&v_{i,i+1}^{\sigma_i\alpha_{i+1}\alpha_i} = tq^2 v_{i+1,i+2},\\
&v_{i,l}^{\sigma_i\alpha_{i+1}\alpha_i} = tq(q-1)v_{i+1,i+2} + (1-q)v_{i+1,l} + qv_{i+2,l} \quad \text{при } i+2 < l,\\
&v_{i,i+2}^{\sigma_i\alpha_{i+1}\alpha_i} = tq(q-1)v_{i+1,i+2} + (1-q)v_{i,i+1} + qv_{i,i+2},\\
&v_{i+1,l}^{\sigma_i\alpha_{i+1}\alpha_i} = v_{i+1,l} \quad \text{при } l > i+2,\\
&v_{i+1,i+2}^{\sigma_i\alpha_{i+1}\alpha_i} = v_{i,i+1},\\
&v_{k,l}^{\sigma_i\alpha_{i+1}\alpha_i} = v_{k,l} \quad \text{при } \{k,l\} \cap \{i, i+1, i+2\} = \varnothing,\\
&v_{k,i+2}^{\sigma_i\alpha_{i+1}\alpha_i} = v_{k,i} \quad \text{при } k < i,\\
&v_{i+2,l}^{\sigma_i\alpha_{i+1}\alpha_i} = v_{i,l}.
\end{aligned}$$

Действуя правой частью, получим

$$\begin{aligned}
&v_{k,i}^{\alpha_{i+1}\alpha_i\sigma_{i+1}} = (1-q)v_{k,i+1} + qv_{k,i+2} + q(q-1)v_{i+1,i+2},\\
&v_{k,i+1}^{\alpha_{i+1}\alpha_i\sigma_{i+1}} = v_{k,i+1} \quad \text{при } k < i,\\
&v_{i,i+1}^{\alpha_{i+1}\alpha_i\sigma_{i+1}} = tq^2 v_{i+1,i+2},\\
&v_{i,l}^{\alpha_{i+1}\alpha_i\sigma_{i+1}} = tq(q-1)v_{i+1,i+2} + (1-q)v_{i+1,l} + qv_{i+2,l} \quad \text{при } i+2 < l,\\
&v_{i,i+2}^{\alpha_{i+1}\alpha_i\sigma_{i+1}} = (1-q)v_{i,i+1} + qv_{i,i+2} + q(q-1)v_{i+1,i+2},\\
&v_{i+1,l}^{\alpha_{i+1}\alpha_i\sigma_{i+1}} = v_{i+1,l} \quad \text{при } l > i+2,\\
&v_{i+1,i+2}^{\alpha_{i+1}\alpha_i\sigma_{i+1}} = v_{i,i+1},\\
&v_{k,l}^{\alpha_{i+1}\alpha_i\sigma_{i+1}} = v_{k,l} \quad \text{при } \{k,l\} \cap \{i, i+1, i+2\} = \varnothing,\\
&v_{k,i+2}^{\alpha_{i+1}\alpha_i\sigma_{i+1}} = v_{k,i} \quad \text{при } k < i,\\
&v_{i+2,l}^{\alpha_{i+1}\alpha_i\sigma_{i+1}} = v_{i,l}.
\end{aligned}$$

Сравнивая действие автоморфизмов $\sigma_i\alpha_{i+1}\alpha_i$ и $\alpha_{i+1}\alpha_i\sigma_{i+1}$ на элементе $v_{i,i+2}$, видим, что они совпадают тогда и только тогда, когда $t = 1$.

Аналогичным образом проверяется, что при гомоморфизме ρ сохраняются соотношения $\sigma_{i+1}\sigma_i\alpha_{i+1} = \alpha_i\sigma_{i+1}\sigma_i$ при любых значениях t и q. Тем самым установлено

Предложение 2. *Определенное выше действием на порождающих отображение $\rho : C_n \to \mathrm{GL}(V_n)$ является линейным представлением тогда и только тогда, когда $t = 1$.*

При $t = 1$ модуль V_n является симметрическим квадратом модуля W_n, на котором определено представление Бурау. Следовательно, построенное нами представление $\rho : C_n \to \mathrm{GL}(V_n)$ не является точным при $n \geq 5$. В случае $n = 3, 4$ вопрос о точности представления ρ остается открытым.

Как мы заметили выше, для построенного отображения ρ перестает выполняться образ соотношения $\sigma_i\alpha_{i+1}\alpha_i = \alpha_{i+1}\alpha_i\sigma_{i+1}$ на элементе $v_{i,i+2}$. Можно попробовать определить действие элементов α_i на базисе модуля V_n по-другому, чтобы соотношение $\sigma_i\alpha_{i+1}\alpha_i = \alpha_{i+1}\alpha_i\sigma_{i+1}$ сохранялось. Справедлива следующая легко проверяемая

Лемма 3. *Для всякого элемента $x \in \mathbb{R}$ отображение $\rho_1 : S_n \to \mathrm{GL}(V_n)$, заданное действием порождающих α_i на базисе модуля V_n равенствами*

$$
\begin{aligned}
&\alpha_i(v_{k,i}) = xv_{k,i+1},\\
&\alpha_i(v_{k,i+1}) = x^{-1}v_{k,i} \quad \text{при } k < i,\\
&\alpha_i(v_{i,i+1}) = v_{i,i+1},\\
&\alpha_i(v_{i,l}) = xv_{i+1,l} \quad \text{при } i + 1 < l,\\
&\alpha_i(v_{i+1,l}) = x^{-1}v_{i,l},\\
&\alpha_i(v_{k,l}) = v_{k,l} \quad \text{при } \{k, l\} \cap \{i, i + 1\} = \varnothing,
\end{aligned}
$$

является точным.

Если продолжить отображение ρ_1 на всю группу C_n, полагая $\rho_1(\sigma_i) = \rho(\sigma_i)$, то получим отображение $\rho_1 : C_n \to \mathrm{GL}(V_n)$. Проверяя соотношения группы C_n на образах порождающих, заметим, что если положить $x = t^{-1/3}$, то нетрудно проверить, что соотношения

$$\sigma_i\alpha_{i+1}\alpha_i = \alpha_{i+1}\alpha_i\sigma_{i+1}, \quad \sigma_{i+1}\sigma_i\alpha_{i+1} = \alpha_i\sigma_{i+1}\sigma_i$$

будут сохраняться. Но в этом случае не сохраняется соотношение $\alpha_i\sigma_j = \sigma_j\alpha_i$. Действительно, так как

$$v_{i,j}^{\alpha_i\sigma_j} = x(1 - q)v_{i+1,j} + xqv_{i+1,j+1} + xq(q - 1)v_{j.j+1},$$

$$v_{i,j}^{\sigma_j\alpha_i} = x(1 - q)v_{i+1,j} + xqv_{i+1,j+1} + q(q - 1)v_{j.j+1},$$

для выполнения равенства $v_{i,j}^{\alpha_i\sigma_j} = v_{i,j}^{\sigma_j\alpha_i}$ мы должны положить $x = 1$. С другой стороны, группа C_3 не содержит соотношений вида $\alpha_i\sigma_j = \sigma_j\alpha_i$. Следовательно, справедливо

Предложение 3. *Линейное представление $\rho_1 : C_3 \to \mathrm{GL}(V_3)$ является продолжением представления Лоуренс — Крамера на группу C_3.*

§ 2. Линейные представления групп кос некоторых многообразий

Напомним вначале определение группы кос многообразия (см. [1, п. 1.1]). Пусть M — связное многообразие размерности ≥ 2. *Конфигурационным пространством* $F_n(M)$, $n \in \mathbb{N}$, многообразия M называется множество

$$F_n(M) = \{(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in M^n \mid z_i \neq z_j \text{ при } i \neq j\}$$

упорядоченных наборов n различных точек из M. Его фундаментальная группа $\pi_1(F_n(M))$ называется *n-нитиевой группой крашеных кос многообразия M* и обозначается через $P_n(M)$. Симметрическая группа S_n действует на пространстве $F_n(M)$ перестановкой координат. Известно, что это действие свободно и индуцирует регулярное накрытие пространства орбит $F_n(M)/S_n$ пространством $F_n(M)$. Фундаментальная группа $B_n(M) = \pi_1(F_n(M)/S_n)$ называется *n-нитиевой группой кос многообразия M*. Накрывающее отображение $F_n(M) \to F_n(M)/S_n$ индуцирует короткую точную последовательность

$$1 \longrightarrow P_n(M) \longrightarrow B_n(M) \longrightarrow S_n \longrightarrow 1.$$

Если M — замкнутое гладкое многообразие, то отображение $F_n(M) \to M^n$ индуцирует эпиморфизм $P_n(M) \to \pi_1(M) \times \cdots \times \pi_1(M)$ группы крашеных кос $P_n(M)$ на прямое произведение n экземпляров фундаментальной группы $\pi_1(M)$. Более того, если размерность многообразия M больше двух, то этот эпиморфизм является инъективным. Поэтому наибольший интерес представляют группы кос двумерных многообразий.

Среди замкнутых двумерных многообразий особую роль играют сфера S^2 и проективная плоскость P^2, так как группы кос только этих поверхностей имеют кручение. Если же M — замкнутая поверхность, отличная от S^2 и P^2, то в последовательности

$$1 \longrightarrow P_n(E^2) \longrightarrow P_n(M) \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} \pi_1(M) \longrightarrow 1$$

ядро каждого гомоморфизма совпадает с нормальным замыканием образа предыдущего гомоморфизма. Здесь E^2 — евклидова плоскость, а $\prod\limits_{i=1}^{n} \pi_1(M)$ — прямое произведение n экземпляров группы $\pi_1(M)$.

Классическая группа кос B_n, введенная Артином, является группой кос евклидовой плоскости, т. е. $B_n = B_n(E^2)$. В дальнейшем будем называть ее просто *группой кос*.

Как установили Фадель и Ван Бускирк (см. [1, теорема 1.11; 16]), группа кос $B_n(S^2)$ двумерной сферы S^2 порождается элементами $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{n-1}$ и определяется соотношениями

$$\delta_i \delta_{i+1} \delta_i = \delta_{i+1} \delta_i \delta_{i+1} \quad \text{при } i = 1, 2, \ldots, n-2,$$

$$\delta_i \delta_j = \delta_j \delta_i \quad \text{при } |i-j| \geq 2,$$

$$\delta_1 \delta_2 \ldots \delta_{n-2} \delta_{n-1}^2 \delta_{n-2} \ldots \delta_2 \delta_1 = 1.$$

Отсюда видно, что группа $B_n(S^2)$ является гомоморфным образом группы B_n. В частности, группа $B_2(S^2)$ — циклическая группа порядка 2, а $B_3(S^2)$ — метациклическая группа порядка 12. Поэтому далее будем считать, что $n > 3$.

Строение группы $B_n(S^2)$ исследовалось в работе Жилета и Ван Бускирка [17]. Напомним полученные там результаты. Определим элементы

$$a_{i,i} = 1, \quad a_{i,j} = \delta_i^{-1}\delta_{i+1}^{-1}\dots\delta_{j-2}^{-1}\delta_{j-1}^{2}\delta_{j-2}\dots\delta_{i+1}\delta_i, \quad 1 \leq i < j \leq n. \qquad (1)$$

Легко проверить, что они лежат в группе $P_n(S^2)$, которая является ядром гомоморфизма $\nu : B_n(S^2) \to S_n$, переводящего порождающий δ_i в транспозицию $(i, i+1)$, $1 \leq i \leq n-1$. Более того, $P_n(S^2)$ порождается элементами (1). Для каждого $i = 1, 2, \dots, n-1$ определим подгруппу A_{n-i+1}, порожденную элементами $a_{i,i+1}, a_{i,i+2}, \dots, a_{i,n}$. Группа A_n нормальна в $P_n(S^2)$, и мы можем рассмотреть короткую точную последовательность

$$1 \longrightarrow A_n \longrightarrow P_n(S^2) \longrightarrow P_{n-1}(S^2) \longrightarrow 1.$$

При этом $P_n(S^2)$ является полупрямым произведением: $P_n(S^2) = A_n \leftthreetimes P_{n-1}(S^2)$, а в группе A_n порождающие связаны соотношением

$$a_{1,2}a_{1,3}\dots a_{1,n} = 1.$$

Кроме того, в группе $P_n(S^2)$ выполнены соотношения

$$a_{i,i+1}a_{i,i+2}\dots a_{i,i+n-1} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

где мы полагаем $a_{j,i} = a_{i,j}$ при $j > i$ и все индексы берутся по модулю n. Из этих соотношений получаются следующие равенства:

$$a_{i,n} = a_{i,n-1}^{-1}\dots a_{i,i+1}^{-1}a_{i-1,i}^{-1}\dots a_{1,i}^{-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Используя эти равенства, мы можем исключить $a_{1,n}, a_{2,n}, \dots, a_{n-1,n}$ из системы порождающих группы $P_n(S^2)$. Подгруппа A_{n-i+1} свободно порождается элементами $a_{i,i+1}, a_{i,i+2}, \dots, a_{i,n-1}$.

Центр группы $B_n(S^2)$ порождается элементом

$$\Delta_n = (\delta_1\delta_2\dots\delta_{n-2})^{n-1} = (a_{1,2}a_{1,3}\dots a_{1,n-1})(a_{2,3}a_{2,4}\dots a_{2,n-1})\dots(a_{n-2,n-1})$$

и имеет порядок 2.

Группа $P_n(S^2)$ распадается в полупрямое произведение

$$P_n(S^2) = A_n \leftthreetimes (A_{n-1} \leftthreetimes (\dots \leftthreetimes A_3)\dots).$$

Обозначим $L_n = A_n \leftthreetimes (A_{n-1} \leftthreetimes (\dots \leftthreetimes A_4)\dots)$. Так как A_3 — циклическая подгруппа с порождающим $a_{n-2,n-1}$, можно заметить, что $P_n(S^2) = L_n \times \langle \Delta_n \rangle \simeq L_n \times \mathbb{Z}_2$. Далее, группа L_n изоморфна группе $U_n \leftthreetimes (U_{n-1} \leftthreetimes (\dots \leftthreetimes U_4)\dots) \leq P_n$.

С группой кос сферы тесно связана группа классов отображений сферы с n выколотыми точками, которую мы обозначим через $M(0, n)$. Группа $M(0, n)$ является фактор-группой группы $B_n(S^2)$ по центру [1, теорема 4.5], т. е. генетический код группы $M(0, n)$ получается из генетического кода группы $B_n(S^2)$ введением дополнительного соотношения $\Delta_n = (\delta_1\delta_2\dots\delta_{n-2})^{n-1} = 1$. Поэтому существует эпиморфизм из $B_n(S^2)$ на $M(0, n)$, ядро которого совпадает с центром группы $B_n(S^2)$. Можно сказать, что $M(0, n)$ — это фактор-группа группы сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов сферы S^2 с n выколотыми точками по нормальной подгруппе, состоящей из гомеоморфизмов, изотопных тождественному.

Для группы $M(0, n)$ существует короткая точная последовательность

$$1 \longrightarrow L_n \longrightarrow M(0, n) \longrightarrow S_n \longrightarrow 1,$$

где подгруппа L_n является ядром эпиморфизма $\nu : M(0,n) \to S_n$, посылающего порождающий δ_i в транспозицию $(i, i+1)$, $i = 1, 2, \ldots, n-2$.

В работе А. И. Мальцева [18, лемма 1; 19, § 12] установлено, что если подгруппа H конечного индекса группы G является линейной, то и сама группа G является линейной. Пусть $|G : H| = m$ и $\psi : H \to \mathrm{GL}_l(F)$ — точное представление группы H матрицами порядка l над полем F. Группа G является объединением правых смежных классов:

$$G = He \cup Hg_2 \cup \cdots \cup Hg_m.$$

Произведение $g_i g$, где g — произвольный элемент из G, можно единственным образом записать в виде $h_i g_{n_i}$, $h_i \in H$. Таким образом, каждому элементу g соответствуют последовательность элементов $h_1, h_2, \ldots, h_m$ из H и последовательность чисел $n_1, n_2, \ldots, n_m$. Последовательности $\{n_i\}$ поставим в соответствие матрицу $D(n_i)$, определенную следующим образом:

$$D(n_i) = \| d_{j,k} \| \in M_{lm}(\mathbb{Z}), \quad d_{j,n_j} = E_l, \quad d_{j,k} = 0, \text{ если } k \neq n_j,$$

E_l — единичная матрица порядка l. Тогда элементу $g \in G$ поставим в соответствие матрицу

$$\mathrm{diag}(\psi(h_1), \psi(h_2), \ldots, \psi(h_m)) D(n_i).$$

Тем самым определено линейное представление группы G в группу $\mathrm{GL}_{lm}(F)$. Это представление является точным.

Теорема 1. *Группы $M(0,n)$ и $B_n(S^2)$ являются линейными для любого $n \geq 2$.*

Доказательство. Как было отмечено выше, при $n = 2, 3$ группы $M(0,n)$ и $B_n(S^2)$ конечны, а потому являются линейными. Пусть $R = \mathbb{Z}[t^{\pm 1}, q^{\pm 1}]$ — кольцо лорановских многочленов. Так как группа L_n изоморфно вкладывается в группу кос B_n, существует точное линейное представление $\rho : L_n \to \mathrm{GL}_l(R)$, где $l = (n-1)(n-2)/2$, индуцированное представлением Лоуренс — Крамера.

Чтобы построить представление группы $M(0,n)$, воспользуемся описанной выше конструкцией.

Пусть $m_1, m_2, \ldots, m_{n!}$ — представители правых смежных классов группы $M(0,n)$ по подгруппе L_n. Так как группа $M(0,n)$ порождается элементами $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{n-1}$, достаточно сопоставить матрицы этим порождающим. Каждый порождающий δ_k действует на множестве правых смежных классов перестановками. Найдем

$$m_i \delta_k = h_i^k m_{\pi_k(i)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n!, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

где символ k, стоящий вверху, означает индекс, а не показатель степени. Это соглашение будет действовать до конца доказательства теоремы. Сопоставим порождающему δ_k матрицу

$$\varphi(\delta_k) = \mathrm{diag}\big(\rho\big(h_1^k\big), \rho\big(h_2^k\big), \ldots, \rho\big(h_{n!}^k\big)\big)\pi(\delta_k) \in \mathrm{GL}_m(R),$$

где $\mathrm{diag}\big(\rho\big(h_1^k\big), \rho\big(h_2^k\big), \ldots, \rho\big(h_{n!}^k\big)\big)$ — блочно-диагональная матрица, а $\pi(\delta_k)$ — блочно-мономиальная матрица, у которой блок, стоящий на месте $(j, \pi(j))$, является единичной матрицей порядка l, а блок, стоящий на месте (j, s) при $s \neq \pi(j)$, — нулевой матрицей порядка l. Определенное таким образом представление φ является точным линейным представлением группы $M(0,n)$.

Рассмотрим теперь группу $B_n(S^2)$. Она содержит линейную подгруппу L_n индекса $2n!$. В качестве представителей правых смежных классов группы $B_n(S^2)$ по подгруппе L_n можно выбрать элементы

$$m_i\Delta_n^{\epsilon}, \quad i = 1, 2, \dots, n!,\ \epsilon = 0, 1,$$

где Δ_n — порождающий центра группы $B_n(S^2)$. Так как группа $B_n(S^2)$ порождается элементами $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}$, достаточно определить представление φ_1 на этих элементах. Упорядочим представители смежных классов $m_i\Delta_n^{\epsilon}$ и обозначим их символами $n_1, n_2, \dots, n_{2n!}$. Каждый порождающий δ_k группы $B_n(S^2)$ действует на этих представителях по формуле

$$n_j\delta_k = g_j^k n_{\pi_k(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, 2n!,\ k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Сопоставим порождающему δ_k матрицу

$$\varphi_1(\delta_k) = \operatorname{diag}\bigl(\rho\bigl(g_1^k\bigr), \rho\bigl(g_2^k\bigr), \dots, \rho\bigl(g_{2n!}^k\bigr)\bigr)\pi(\delta_k) \in \mathrm{GL}_{2m}(R),$$

где $\operatorname{diag}\bigl(\rho\bigl(g_1^k\bigr), \rho\bigl(g_2^k\bigr), \dots, \rho\bigl(g_{2n!}^k\bigr)\bigr)$ — блочно-диагональная матрица, а $\pi(\delta_k)$ — блочно-мономиальная матрица, у которой блок, стоящий на месте $(j, \pi(j))$, является единичной матрицей порядка l, а блок, стоящий на месте (j, s) при $s \neq \pi(j)$, — нулевой матрицей порядка l. Построенное представление φ_1 — точное линейное представление группы $B_n(S^2)$ над кольцом R. Так как кольцо R вложимо в поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ (достаточно в качестве t и q взять обратимые трансцендентные над $\mathbb{Q}$ комплексные числа), получаем требуемое утверждение.

§ 3. Точное линейное представления группы $\mathbf{Aut}(\boldsymbol{F_2})$

Известно [9], что группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(F_n)$ свободной группы F_n не является линейной при $n \geq 3$. С другой стороны, как установлено в работе [12], группа $\mathrm{Aut}(F_2)$ линейна тогда и только тогда, когда линейна группа кос на четырех нитях B_4. Так как последняя является линейной, можно построить в явном виде точное линейное представление группы $\mathrm{Aut}(F_2)$. Для этого нам потребуются некоторые результаты из работы [12]. Напомним их.

Обозначим $B_4^* = B_4/Z(B_4)$, где $Z(B_4)$ — центр группы B_4. Как отмечено выше, $Z(B_4)$ — бесконечная циклическая группа, порожденная элементом $\Delta_4 = (\sigma_1\sigma_2\sigma_3)^4$. Группа B_4^* изоморфна группе $\mathrm{Aut}^+(F_2)$, которая является прообразом подгруппы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ при гомоморфизме $\xi : \mathrm{Aut}(F_2) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$, переводящем автоморфизм группы F_2 в автоморфизм свободной абелевой группы ранга 2. При этом $\mathrm{Aut}^+(F_2)$ является подгруппой индекса 2 группы $\mathrm{Aut}(F_2)$.

Пусть $\rho : B_4 \to \mathrm{GL}_6(\mathbb{C})$ — точное представление Лоуренс — Крамера, которое, как заметил Зино [20], является неприводимым.

Символом F обозначим подгруппу группы B_4, порожденную элементами $x = \sigma_1\sigma_3^{-1}$, $y = \sigma_2\sigma_1\sigma_3^{-1}\sigma_2^{-1}$. Эта группа является свободной группой со свободными порождающими x и y, и, кроме того, F нормальна в B_4. Внутренние автоморфизмы группы B_4 индуцируют автоморфизмы группы F, т. е. существует эпиморфизм $h : B_4 \to \mathrm{Aut}^+(F_2)$. Ядро этого эпиморфизма совпадает с центром группы B_4, а образы порождающих σ_1, σ_2, σ_3 определяют автоморфизмы

$$h(\sigma_1) = \alpha_1 : \begin{cases} x \mapsto x, \\ y \mapsto yx^{-1}, \end{cases}$$

$$h(\sigma_2) = \alpha_2 : \begin{cases} x \mapsto y, \\ y \mapsto yx^{-1}y, \end{cases}$$

$$h(\sigma_3) = \alpha_3 : \begin{cases} x \mapsto x, \\ y \mapsto x^{-1}y. \end{cases}$$

Вся группа $\mathrm{Aut}(F_2)$ порождается автоморфизмами

$$P : \begin{cases} x \mapsto y, \\ y \mapsto x, \end{cases} \quad \omega : \begin{cases} x \mapsto x^{-1}, \\ y \mapsto y, \end{cases} \quad U : \begin{cases} x \mapsto xy, \\ y \mapsto y \end{cases}$$

и определяется соотношениями

$$P^2 = \omega^2 = (\omega P)^4 = (P\omega PU)^2 = (UP\omega)^3 = [\omega, \omega U\omega] = 1.$$

При этом справедливы равенства

$$\alpha_1 = PU^{-1}P, \quad \alpha_2 = PU\omega U^{-1}, \quad \alpha_3 = P\omega U\omega P.$$

Воспользуемся представлением Лоуренс — Крамера $\rho : B_4 \to \mathrm{GL}_6(\mathbb{C})$ и найдем образы порождающих группы B_4:

$$\rho_1 = \rho(\sigma_1) = \begin{pmatrix} tq^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ tq(q-1) & 1-q & 0 & q & 0 & 0 \\ tq(q-1) & 0 & 1-q & 0 & q & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\rho_2 = \rho(\sigma_2) = \begin{pmatrix} 1-q & q & 0 & q(q-1) & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & tq^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & tq(q-1) & 1-q & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\rho_3 = \rho(\sigma_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-q & q & 0 & 0 & q(q-1) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-q & q & q(q-1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & tq^2 \end{pmatrix}.$$

Непосредственно проверяется, что $(\rho_1\rho_2\rho_3)^4 = t^2q^8E_6$ — образ центра группы B_4. Положим $\mu = 1/\sqrt[12]{t^2q^8}$ и $\bar{\rho}(\sigma_i) = \mu\rho(\sigma_i) = \mu\rho_i$. Тогда $\bar{\rho}$ индуцирует точное представление группы $B_4^* \simeq \mathrm{Aut}^+ F_2$. Построим теперь точное линейное представление группы $\mathrm{Aut}\, F_2$.

Подгруппа $\mathrm{Aut}^+ F_2$ имеет индекс 2 в группе $\mathrm{Aut}\, F_2$, и в качестве представителей правых смежных классов можно взять элементы e и ω. Справедлива следующая легко проверяемая

Лемма 4. *В группе* $\mathrm{Aut}\, F_2$ *справедливы равенства*
1) $\omega\alpha_1 = \alpha_1^{-1}\omega$,
2) $\omega\alpha_2 = \alpha_3\alpha_1\alpha_2^{-1}\alpha_1^{-1}\alpha_3^{-1}\omega$,

3) $\omega\alpha_3 = \alpha_3^{-1}\omega$.

Так как группа $\operatorname{Aut} F_2$ порождается автоморфизмами α_1, α_2, α_3, ω, действуя на смежные классы группы $\operatorname{Aut} F_2$ по подгруппе $\operatorname{Aut}^+ F_2$, находим соответствующие диагональные и мономиальные матрицы. Положим

$$\psi(\alpha_1) = \operatorname{diag}(\bar\rho_1, (\overline{\rho}_1)^{-1}), \quad \psi(\alpha_2) = \operatorname{diag}(\bar\rho_2, \bar\rho_3\bar\rho_1(\bar\rho_2)^{-1}(\bar\rho_1)^{-1}(\bar\rho_3)^{-1}),$$

$$\psi(\alpha_3) = \operatorname{diag}(\bar\rho_3, (\overline{\rho}_3)^{-1}), \quad \psi(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & E_6 \\ E_6 & 0 \end{pmatrix},$$

где E_6 — единичная матрица порядка 6, а матрицы $\bar\rho_i$ определены выше. Сопрягая это представление матрицей $c = \operatorname{diag}(E_6, \bar\rho_3\bar\rho_1)$, получим новое представление:

$$\begin{gathered}\bar\psi(\alpha_i) = c^{-1}\psi(\alpha_i)c = \begin{pmatrix} \bar\rho_i & 0 \\ 0 & \bar\rho_i^{-1} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3; \\ \bar\psi(\omega) = c^{-1}\psi(\omega)c = \begin{pmatrix} 0 & \bar\rho_3\bar\rho_1 \\ (\bar\rho_3\bar\rho_1)^{-1} & 0 \end{pmatrix}.\end{gathered} \tag{1}$$

Тогда справедлива

Теорема 2. *Отображение* $\bar\psi : \operatorname{Aut} F_2 \to \mathrm{GL}_{12}(\mathbb{Z}[t^{\pm1}, q^{\pm1}])$, *заданное на порождающих равенствами* (1) *определяет точное линейное представление группы* $\operatorname{Aut} F_2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Birman J. S.* Braids, links and mapping class groups. Princeton; Tokyo: Princeton Univ. Press, 1974.
2. *Burau W.* Uber Zopfgruppen und gleichsinnig verdrillte Verkettungen // Abh. Math. Semin. Hamburg Univ. 1936. V. 11. P. 179–186.
3. *Moody J. A.* The Burau representation of the braid group B_n is unfaithful for large n // Bull. Amer. Math. Soc. 1991. V. 25, N 2. P. 379–384.
4. *Long D. D., Paton M.* The Burau representation is not faithful for $n \geq 5$ // Topology. 1993. V. 32, N 2. P. 439–447.
5. *Bigelow S.* The Burau representation is not faithful for $n \geq 6$ // Geom. Topology. 1999. V. 3. P. 397–404.
6. *Lawrence R. J.* Homological representation of the Hecke algebra // Comm. Math. Phys. 1990. V. 135, N 1. P. 141–191.
7. *Krammer D.* Braid groups are linear // Ann. of Math. (2). 2002. V. 155, N 1. P. 131–156.
8. *Bigelow S.* Braid groups are linear // J. Amer. Math. Soc. 2001. V. 14. P. 471–486.
9. *Formanek E., Procesi C.* The automorphism groups of a free group is not linear // J. Algebra. 1992. V. 149, N 2. P. 494–499.
10. *Бардаков В. Г.* Строение группы сопрягающих автоморфизмов // Алгебра и логика. 2003. Т. 42, № 5. С. 515–541.
11. *Коуровская тетрадь.* Нерешенные вопросы теории групп. 15-е изд. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2002.
12. *Dyer J. L., Formanek E., Grossman E. K.* On the linearity of automorphism groups of free groups // Arch. Math. 1982. V. 38, N 5. P. 404–409.
13. *Бардаков В. Г., Нещадим М. В.* Некоторые свойства групп кос компактных ориентируемых 2-многообразий // IV Междунар. алгебр. конф., посвященная 60-летию профессора Ю. И. Мерзлякова. Новосибирск, 2000. P. 9–13.
14. *Bigelow S. J., Budney R. D.* The mapping class group of a genus two surface is linear // Algebr. Geom. Topoljgy. 2001. V. 1. P. 699–708.
15. *Савушкина А. Г.* О группе сопрягающих автоморфизмов свободной группы // Мат. заметки. 1996. Т. 60, № 1. С. 92–108.
16. *Fadell E., Van Buskirk J.* The braid groups of E^2 and S^2 // Duke. Math. J. 1962. V. 29, N 2. P. 243–258.

17. *Gillette R., Van Buskirk J.* The word problem and consequences for the braid groups and mapping class groups of the 2-sphere // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. V. 131, N 2. P. 277–296.

18. *Мальцев А. И.* Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами // Мат. сб. 1940. Т. 8, № 3. С. 405–422.

19. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. 4-е изд. М.: Наука, 1996.

20. *Zinno M. G.* On Krammer's representation of the braid group // Math. Ann. 2000. V. 321, N 1. P. 197–211.

Статья поступила 14 июля 2004 г.

Бардаков Валерий Георгиевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
bardakov@math.nsc.ru