Функциональный анализ и его приложения,
т. 11, вып. 3, 1977, 74—75.

УДК 513.60

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ГЛОБАЛЬНОЙ ГИПОТЕЗЫ ЛЕНГЛЕНДСА ДЛЯ GL(2) НАД ФУНКЦИОНАЛЬНЫМ ПОЛЕМ

В. Г. Дринфельд

1. Пусть k — глобальное поле характеристики p, $\mathfrak{A}$ — кольцо аделей поля k, W — группа Вейля поля k. Пусть E — конечное расширение $\mathbf{Q}$. Введем обозначения: $\Sigma_1(E)$ — множество строго согласованных систем неприводимых двумерных представлений W над $\bar{E}_\lambda$, где λ пробегает множество точек E, не делящих p и ∞; $\Sigma_2(E)$ — множество абсолютно неприводимых допустимых представлений $\mathrm{GL}(2, \mathfrak{A})$ над E, входящих в пространство параболических форм; Γ_E — множество пар $(\rho, \pi) \in \Sigma_1(E) \times \Sigma_2(E)$ таких, что для всех точек v поля k, кроме конечного числа, $Z_v(s, \rho) = L(s - \frac{1}{2}, \pi_v)$ (где Z-функция понимается в смысле [3], а L-функция—в смысле [1]).

Теорема 1. *Γ_E является графиком биекции $\Sigma_1(E) \xrightarrow{\sim} \Sigma_2(E)$.*

Хорошо известно, что проекции $\Gamma_E \to \Sigma_i(E)$ инъективны. Сюръективность проекции $\Gamma_E \to \Sigma_1(E)$ следует из функционального уравнения для элементов $\Sigma_1(E)$ (см. [3]) и основной теоремы из [1]. Остается доказать сюръективность проекции $\Gamma_E \to \Sigma_2(E)$.

2. Пусть q — порядок поля констант k. Под схемой в дальнейшем понимается схема над $\mathbf{F}_q$; через Fr_S будет обозначаться эндоморфизмом Фробениуса схемы S (относительно $\mathbf{F}_q$). Введем обозначения: X — гладкая проективная кривая, у которой k — поле рациональных функций; $\Lambda \subset X \times X$-дополнение до диагонали и ее сдвигов относительно морфизмов вида $\mathrm{Fr}_X^n \times \mathrm{id}_X$ и $\mathrm{id}_X \times \mathrm{Fr}_X^n$. Мы построим проективную систему схем M_D над Λ, на которую действует $\mathrm{GL}(2, \mathfrak{A})$ (D пробегает множество конечных подсхем X). Схемы M_D будут снабжены эндоморфизмами F_1 и F_2 такими, что: 1) F_1 и F_2 согласованы между собой при разных D и коммутируют с действием $\mathrm{GL}(2, \mathfrak{A})$, 2) $F_1F_2 = F_2F_1 = \mathrm{Fr}_{M_D}$, 3) F_1 и F_2 согласованы с эндоморфизмами $\mathrm{Fr}_X \times \mathrm{id}_X$ и $\mathrm{id}_X \times \mathrm{Fr}_X$ схемы $X \times X$. Пусть K — поле рациональных функций на $X \times X$. Положим $V_l = \varinjlim_D H^2(M_D \times_\Lambda \bar{K}, \mathbf{Q}_l)$, где $l \neq p$ — простое число. На V_l действуют $\mathrm{GL}(2, \mathfrak{A})$, $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$, F_1^* и F_2^*. Действие $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$, F_1^* и F_2^* можно заменить действием G, где G — фактор-группа автоморфизмов $\bar{K}$, индуцирующих на $k \otimes 1$ и $1 \otimes k$ некоторые степени морфизмов Фробениуса, по подгруппе, порожденной $\mathrm{Fr}_{\bar{K}}$. Имеется естественный гомоморфизм $G \to \mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \times \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$, образ которого состоит из элементов, у которых две проекции в $\hat{\mathbf{Z}}$ отличаются на целое число.

Теорема 2. *Пусть $\pi \in \Sigma_2(E)$, λ — точка E, делящая l. Тогда действие G на $\mathrm{Hom}(\pi \otimes_E \bar{E}_\lambda, V_l \otimes_{\mathbf{Q}_l} \bar{E}_\lambda)$ пропускается через образ G в $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \times \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$, и возникающее таким образом представление $W \times W$ изоморфно $\hat{\rho}_\lambda \otimes \rho_\lambda$, где ρ_λ и $\hat{\rho}_\lambda$ — неприводимые двумерные представления W над $\bar{E}_\lambda$. Системы $\rho = \{\rho_\lambda\}$ и $\hat{\rho} = \{\hat{\rho}_\lambda\}$ строго согласованы, причем $(\rho, \pi) \in \Gamma_E$, $(\hat{\rho}, \hat{\pi}) \in \Gamma_E$ (где $\hat{\pi}$ — представление, контраградиентное к π).*

Сюръективность проекции $\Gamma_E \to \Sigma_2(E)$ следует из теоремы 2.

3. Перейдем к построению схемы M_D. Обозначим через G_D следующий функтор из категории схем в категорию множеств: $G_D(S)$ — это, по определению, множество классов изоморфизма наборов {1) морфизмы $\alpha, \beta : S \to X - D$, 2) двумерный локально свободный пучок $O_{X \times S}$-модулей L, 3) эпиморфизм $\gamma: L \to O_{D \times S}^2$, 4) морфизм $\varphi: (\mathrm{id}_X \times \mathrm{Fr}_S)^* L \to L(\beta)$} таких, что: а) образ (α, β) в $X \times X$ содержится в Λ, б) $\mathrm{Coker}\,\varphi$—обратимый пучок на объединении графиков α и β, в) $\gamma \circ \varphi = (\mathrm{id}_X \times \mathrm{Fr}_S)^* \varphi$. Пусть $m, n \in \mathbf{Z}$. Обозначим через $G_D^{m,n}$ открытый подфунктор G_D, заданный условием: для любого $s \in S$ $\deg L_s = m + n$, а степень одномерных подпучков L_s не превосходит m.

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука»,
«Функциональный анализ и его приложения», 1977

Предложение. *Если m — n фиксировано, а* $\deg D$ *достаточно велико, то* $G_D^{m,n}$ *представим схемой* $M_D^{m,n}$, *квазипроективной и гладкой над* Λ, *имеющей относительную размерность* 2.

Отсюда легко вывести, что если D любое, то для $G_D^{m,n}$ существует грубая схема модулей, поэтому и для G_D существует грубая схема модулей; обозначим эти схемы через $M_D^{m,n}$ и M_D. Морфизмы F_i: $M_D \to M_D$ происходят из следующих морфизмов $F_i : G_D \to G_D : F_1(\alpha, \beta, L, \gamma, \varphi) = (\mathrm{Fr}(\alpha), \beta, L \cap \mathrm{Im}\,\varphi, \gamma', \varphi')$, $F_2(\alpha, \beta, L\ \gamma, \varphi) = (\alpha, \mathrm{Fr}(\beta), L + \mathrm{Im}\,\varphi, \gamma'', \varphi'')$, где $\varphi', \gamma', \varphi'', \gamma''$ определяются естественным образом. Пусть $g \in \mathrm{GL}(2, \mathfrak{A})$, $gK_Dg^{-1} \subset K_{D'}$, где $K_D \in \mathrm{GL}(2, \mathfrak{A})$ — конгруэнц-подгруппа уровня D; определим морфизм g: $G_D \to G_{D'}$. Пусть $g = t \cdot h^{-1}$, где $t \in \mathfrak{A}^*$, все компоненты h — операторы с нормой 1. h индуцирует морфизм h_*: $O_D^2 \to O_D^2$ и эпиморфизм ψ: $\mathrm{Im}\,h_* \to O_{D'}^2$, а t определяет обратимый пучок $\mathcal{M}$ на X вместе с эпиморфизмом δ: $\mathcal{M} \to O_{D'}$. Положим

$$g(\alpha, \beta, L, \gamma, \varphi) = (\alpha, \beta, \mathcal{M} \otimes \gamma^{-1}(\mathrm{Im}\,h_* \otimes O_S), \delta \widetilde{\otimes} \psi\gamma, \varphi),$$

где $\widetilde{\varphi}$ определяется естественным образом. Проверяется, что это определение корректно и что оно задает дайствие $\mathrm{GL}(2, \mathfrak{A})$.

4. Теорема 2 доказывается методом Ихары — Ленглендса (см. [4]): характер представления $G \times \mathrm{GL}(2, \mathfrak{A})$ на эйлеровой характеристике $\varprojlim M_D \otimes_\Lambda \overline{K}$ считается по теореме Лефшеца о неподвижных точках, и результат сравнивается с предполагаемым ответом, который вычисляется по формуле следа Сельберга. Необходимое для применения этого метода описание множества $\overline{\mathrm{F}}_q$-точек M_D, лежащих над заданной $\overline{\mathrm{F}}_q$-точкой $X \times X$, получается без труда; оно аналогично [4]. Трудности возникают из-за того, что морфизм $M_D \to \Lambda$ не собственный и даже не квазикомпактный. Схемы $M_D^{m,n} \otimes_\Lambda K$ уже квазикомпактны; если $m \geqslant n$, то можно построить компактификации $C_D^{m,n} \supset M_D^{m,n} \otimes_\Lambda \otimes_\Lambda K$ так, что: а) $C_D^{m,n}$ нормальна и слои разрешения особенностей $C_D^{m,n} \otimes \overline{K}$ — деревья из рациональных кривых, б) $\Gamma_D^{m,n} \overset{\mathrm{def}}{=} C_D^{m,n} - M_D^{m,n} \otimes_\Lambda K$ может быть описана явно; эта кривая естественным образом отображается в $X \otimes K$ (и, следовательно, в $X \times X \times X$), в) бирациональный изоморфизм $M_D^{m+1,\,n-1} \otimes_\Lambda K \to M_D^{m,n} \otimes_\Lambda K$ продолжается до морфизма $C_D^{m+1,\,n-1} \to C_D^{m,n}$, причем морфизм $\Gamma_D^{m+1,\,n-1} \to \Gamma_D^{m,n}$ радикален, г) рациональные морфизмы $C_D^{m,n} \to C_D^{m',n'}$, возникающие из действия $\mathrm{GL}(2, \mathfrak{A})$, F_1 и F_2, становятся регулярными после композиции с некоторым морфизмом $C_D^{m+j,\,n-j} \to C_D^{m,n}$. Нам надо описать представление $G \times \mathrm{GL}(2, \mathfrak{A})$ на $W_l^i \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_{r} \varprojlim_{m,\,D} H^i(C_D^{m,\,r-m} \otimes \overline{K}, \mathrm{Q}_l)$. Это удается сделать с помощью формулы Лефшеца для числа неподвижных точек соответствия (ее применение требует осторожности, так как гладкость $C_D^{m,n}$ не доказана), а также следующих дополнительных соображений: 1) W_l^0 и W_l^4 легко вычисляются, 2) $\mathrm{GL}(2, \mathfrak{A})$-сдвиги кривых, стягиваемых при морфизмах $C_D^{m+,\,n-1} \to C_D^{m,n}$, всюду плотны, поэтому многообразие Альбанезе $C_D^{m,n}$ тривиально и $W_l^1 = W_l^3 = 0$, 3) матрицу пересечений этих кривых можно вычислить, что дает оценку снизу для W_l^2.

Замечание. Аналог теорем 1 и 2 для одномерных пучков доказан в [2].

Московский государственный университет

Поступило в редакцию 12 января 1977 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Жаке Э., Ленглендс Р., Автоморфные формы на GL (2), М., «Мир», 1973. 2. Серр. Ж.-П., Алгебраические группы и поля классов, М., «Мир». 1968. 3. Deligne P., Les constantes des equations fonctionnelles des fonctions L, Lecture Notes in Math, 349, Springer-Verlag, Berlin, 1973, 501—597. 4. Langlands R. P., Modular forms amd l-adic representations, Lecture Notes in Math. 349, Springer-Verlag, Berlin, 1973, 361—500.