



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

Ya. V. Kurylev, On the scattering on the line.
I. Existence of wave operators and asymptotic
completeness in periodic case, *Zap. Nauchn. Sem.*
LOMI, 1990, Volume 186, 136–141

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that
you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.85

January 18, 2025, 11:23:29



О РАССЕЯНИИ НА КРИВОЙ. I. СУЩЕСТВОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ОПЕРАТОРОВ И АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ПОЛНОТА В ПЕРИОДИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

I. Введение. Проблема изучения операторов Шредингера с потенциалами, сосредоточенными на множестве нулевой меры (т.н. δ -образные потенциалы, потенциалы нулевого радиуса) волновала физиков с 30-х годов (см., напр. [1, 2]). Что же касается математически строгих результатов, то, по-видимому, первый результат такого рода, относящийся к случаю точечного потенциала, был получен в 1961 г. Л. Д. Фаддеевым и Ф. А. Березиным [3]. Дальнейшее развитие метод потенциалов нулевого радиуса получил в 70-80 гг. (см. [4-8] и литературу, цитированную в указанных работах). В настоящей заметке мы будем рассматривать задачу рассеяния на кривой в \mathbb{R}^3 , где z - расстояние вдоль кривой с соответствующим знаком. При этом соответствующий самосопряженный оператор, который мы будем обозначать $-\Delta_H$ задается с помощью граничного условия на кривой ℓ :

$$u - \rho \left(\ln \rho + H(z) \right) \frac{\partial u}{\partial \rho} \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0. \quad (1)$$

Здесь ρ - расстояние до ℓ , а $H(z)$ - вещественнозначная функция (см. [5]). Относительно кривой ℓ мы будем предполагать выполненными те же условия регулярности, что и в [5]. Что же касается H , то мы будем полагать $H(z) \in L_\infty(\mathbb{R}^1)$.

ЗАМЕЧАНИЕ I. В [5] на $H(z)$ налагаются более жесткие условия; $H, H' \in L_\infty$. Однако условие $H' \in L_\infty(\mathbb{R}^1)$ можно снять, если при исследовании самосопряженности возникающих операторов использовать теорию квадратичных форм и КЛМН теорему, а не теорию возмущений самосопряженных операторов и теорему Като-Реллиха, как это делается в [4, 5].

Весьма полезной для изучения спектра оператора $-\Delta_H$ и теории рассеяния для пары $(-\Delta_H, -\Delta)$ оказывается формула для резольвенты $R_H(\lambda)$ оператора $-\Delta_H$ (также полученная в [5]):

$$R_H(\lambda) - R(\lambda) = \tilde{R}(\lambda) \left(1 + d/dz \right) A_H^{-1}(\lambda) \left(1 - d/dz \right) P_\ell R(\lambda). \quad (2)$$

Поясним входящие в формулу (2) обозначения. $R(\lambda)$ - резольвента оператора Лапласа $-\Delta$; $\tilde{R}(\lambda)$ - это по-существу та же резольвента $R(\lambda)$, но рассматриваемая как ограниченный оператор из

$H_{-1}(\ell) \in L_2(R^3)$ (т.е. действующая на функциях вида $u(z)\delta(\lambda - \chi(z))$), где $u(z) \in H_{-1}(R^1)$. P_ℓ - оператор вложения из $H_2(R^3)$ в $H_1(\ell)$. Наконец, внутренний оператор $A_H(\lambda)$, рассматриваемый как оператор в $L_2(\ell)$, представим в виде

$$A_H(\lambda)u = T(\lambda)u + \left(1 - \frac{d}{dz}\right)N(z)\left(1 + \frac{d}{dz}\right)u + V_\ell(\lambda)u. \quad (3)$$

Для пояснения входящих в (3) членов удобно использовать преобразование Фурье $\tilde{u}(k)$ функции u . Тогда

$$\widetilde{T(\lambda)u}(k) = [\ln(k^2 - \lambda) - \alpha](1 + k^2)\tilde{u}(k). \quad (4)$$

Оператор $V_\ell(\lambda)$ - это оператор, связанный с геометрией кривой ℓ ; в частности, в случае, когда ℓ - прямая $V_\ell(\lambda) = 0$. Оператор $A_H(\lambda)$ рассматривается на естественной (с точки зрения теории квадратичных форм) области определения, причем операторы $\left(1 - \frac{d}{dz}\right)N(z)\left(1 + \frac{d}{dz}\right)$ и $V_\ell(\lambda)$ представляют собой возмущения оператора $T(\lambda)$. Как показано в [5], при достаточно больших отрицательных λ и при $\text{Im } \lambda \neq 0$ оператор $A_H^{-1}(\lambda)$ существует и ограничен в $L_2(\ell)$, а вместе с ним существует и $R_H(\lambda)$ вида (2).

2. Теория рассеяния для потенциалов нулевого радиуса построена в основном для случая точечного взаимодействия и аналогичных моделей, при которых возмущение резольвенты оказывается конечномерным [6, 8] (ср., однако, близкую к настоящей заметке статью [9]). В недавней работе [10] изучается спектр и теория рассеяния для потенциала, также сосредоточенного на кривой в R^3 . Однако в отличие от рассматриваемой задачи, кривая ℓ в [10] предполагается замкнутой и конечной. Анализируя (2), можно видеть, что разность резольвент в этом случае будет являться ядренным оператором, так что применима теорема Вирмана-Като и справедливы все вытекающие из нее утверждения о спектре возмущенного оператора $-\Delta_H$ и о теории рассеяния для пары $(-\Delta_H, -\Delta)$. В случае же бесконечной кривой возмущение резольвенты уже не является ядренным и картина рассеяния более замысловата. Для того, чтобы прояснить ситуацию, рассмотрим простейший пример.

Пример I. Рассеяние на прямой с постоянным граничным условием ($N(z) = h$, кривая ℓ - это ось $e_z \cdot z$). В этом случае возникают собственные функции непрерывного спектра волноводного типа, сосредоточенные вблизи оси $e_z \cdot z$:

$$\Psi_h(\rho, z; k) = \frac{e^{(\alpha+h)/2}}{\sqrt{2\pi}} e^{ikz} K_0 \left\{ \rho e^{\alpha+h} \right\}, \quad (5)$$

где $K_0(\omega)$ - функция Макдональда, а α - также константа, что и в определении $T(\lambda)$ (4). Функции $\Psi_h(\cdot, k)$ удовлетворяют уравнению

$$-\Delta_h \Psi_h(k) = [-e^{-2(\alpha+h)} + k^2] \Psi_h(k)$$

так что $b_{ac}(-\Delta_h) = [-e^{-2(\alpha+h)}, \infty)$. Отсюда очевидно следует отсутствие унитарной эквивалентности $-\Delta_h$ и $-\Delta$ (заметим, что оба эти оператора абсолютно непрерывны).

Итак, пример I показывает, что полноты волновых операторов $W_{\pm}(-\Delta_h, -\Delta)$ в общем случае ожидать не приходится. Тем не менее, существование их можно оправдать при достаточно слабых предположениях о кривой l .

Введем множество предельных направлений C_l кривой l .

$$C_l = \bigcap_{M>0} \left\{ e \in S_1 : e = \frac{x(z)}{|x(z)|}, |x(z)| \geq M \right\}.$$

ЛЕММА I. Пусть $mes_2 C_l = 0$. Тогда волновые операторы

$$W_{\pm}(-\Delta_h, -\Delta) = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \mp \infty} e^{-it\Delta_h} e^{it\Delta}$$
 существуют.

Доказательство основано на методе Кука (точнее, на варианте Купша-Санласа метода Кука). В качестве пробных функций мы будем брать функции f такие, что $\hat{f}(\xi)$ - трехмерное преобразование Фурье $f(x)$, принадлежат $C_{0,0}(\mathbb{R}^3)$ и обращаются в ноль при $|\xi|/|\xi|$, лежащих в некоторой окрестности множества $C_l \cup (-C_l)$. Поскольку $mes_2 C_l = 0$ множество таких функций плотно в $L_2(\mathbb{R}^3)$. Для исследования $\lim_{t \rightarrow \mp \infty} e^{-it\Delta_h} e^{it\Delta} f$ мы будем использовать

следующие срезающие функции.

Пусть $\chi(e) \in C^\infty(S_1)$, равна 1 в некоторой окрестности C_l множества $C_l \cup (-C_l)$ и обращается в 0 на носителе $\hat{f}(\xi)$. При $|x(z)| \geq M_0 = M_0(\chi)$ кривая l лежит в конусе $C_l \times [M_0, \infty)$. Пусть теперь $\chi_0(x)$ - обычная срезающая функция, равная 1 при $|x| \leq M_0$ и 0 при $|x| \geq 2M_0$. Введем $\varphi(x) = \chi_0(x) + [1 - \chi_0(x)] \chi(\hat{x})$, $\hat{x} = x/|x|$, $\varphi(x) \equiv 1$ в некоторой окрестности l . Разобьем

$$e^{-it\Delta_h} e^{it\Delta} f \text{ на 2 части}$$

$$e^{-it\Delta_h} e^{it\Delta} f = e^{-it\Delta_h} \varphi e^{it\Delta} f + e^{-it\Delta_h} [1 - \varphi] e^{it\Delta} f = J_1(t) + J_2(t). \quad (6)$$

Применяя метод стационарной фазы к интегралу

$$J_1(x, t) = e^{it\Delta} f = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \exp\{-i\xi^2 t - i\langle \xi, x \rangle\} \hat{u}(\xi) d\xi$$

и учитывая, что $\hat{f}(\xi) = 0$ при $|\xi|/|\xi| \in \text{supp} \chi(\epsilon)$, получаем, что

$$f(x, t) = 0 \left[(|t| + |x|)^{-N} \right], \quad x \in \text{supp} \varphi; \quad \forall N > 0$$

откуда следует, что $\|J_1(t)\| = O(t^{-N}), \forall N > 0$.

Рассмотрим теперь $J_2'(t)$:

$$\begin{aligned} J_2'(t) &= e^{-it\Delta_H} \{ (1-\varphi)\Delta - \Delta(1-\varphi) \} f(x, t) = \\ &= e^{-it\Delta_H} \Delta \varphi f(x, t) + 2e^{-it\Delta_H} \langle \nabla \varphi, \nabla f(x, t) \rangle. \end{aligned} \quad (7)$$

(При выводе равенства (7) мы учитывали, что $(1-\varphi)f(x, t)$ обращается в 0 вблизи l , так, что оператор $-\Delta_H$ на таких функциях совпадает с $-\Delta$. Оба члена, стоящие в правой части (7), аналогичны $J_1(t)$, так что для $J_2'(t)$ справедлива оценка

$$\|J_2'(t)\| = O(|t|^{-N}), \quad \forall N > 0.$$

откуда немедленно вытекает существование $\lim_{t \rightarrow \mp\infty} J_2(t) = \lim_{t \rightarrow \mp\infty} e^{-it\Delta_H} e^{it\Delta} f$.

3. Перейдем к рассеянию на прямой $e_z \cdot z$ с периодической функцией $H(z)$ (мы полагаем $H(z + 2\mathcal{J}) = H(z)$). Как показывает пример I, условие полноты волновых операторов $W_{\pm}(-\Delta_H, -\Delta)$ в этом случае нарушается. Тем не менее имеет место

ЛЕММА 2. Пусть $-\Delta_H$ - оператор Шредингера с потенциалом, сосредоточенным на оси $e_z \cdot z = \{ (x, z) : x_1 = x_2 = 0, z \in \mathbb{R}^1 \}$; причем $H(z + 2\mathcal{J}) = H(z)$. Тогда существуют и асимптотически полны волновые операторы $W_{\pm}(-\Delta_H, -\Delta)$, и оператор рассеяния $S = W_-^* W_+$ унитарен.

Доказательство основано на традиционном для периодических задач методе разложения в прямой интеграл (см., напр. [II]).

Рассмотрим отображение $\mathcal{J} : L_2(\mathbb{R}^3) \rightarrow \int_0^1 \oplus \mathcal{H}_{\chi} d\chi$, где $\mathcal{H}_{\chi} = \mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^2 \times [0, 2\mathcal{J}])$. При $f \in S(\mathbb{R}^3)$

$$(\mathcal{J}f)_{\chi}(x_1, x_2; z) = (2\mathcal{J})^{-1/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i(n+\chi)z} \tilde{f}(x_1, x_2, n+\chi), \quad z \in [0, 2\mathcal{J}], \quad (8)$$

где \tilde{f} - преобразование Фурье f по переменной z . Отображение \mathcal{J} осуществляет унитарное отображение $L_2(\mathbb{R}^3)$ на $\int_0^1 \oplus \mathcal{H}_{\chi} d\chi$, которое разлагает как оператор Лапласа $-\Delta$, так и оператор Лапласа с периодическим потенциалом на оси $-\Delta_H$. При этом $\mathcal{J} \Delta \mathcal{J}^{-1} = \int_0^1 \oplus \Delta(\chi) d\chi$,

где Δ_{χ} - оператор Лапласа в слое $L_2(\mathbb{R}^2 \times [0, 2\mathfrak{I}])$ с крайними условиями

$$\Psi(x_1, x_2, 2\mathfrak{I}) = e^{2\mathfrak{I}i\chi} \Psi(x_1, x_2, 0), \Psi_z(x_1, x_2, 2\mathfrak{I}) = e^{2\mathfrak{I}i\chi} \Psi_z(x_1, x_2, 0) \quad (9)$$

Аналогичным образом разлагается и оператор $-\Delta_H$:

$$\mathfrak{I} \Delta_H \mathfrak{I}^{-1} = \int_0^1 \Theta \Delta_H(\chi) d\chi,$$

который совпадает с $-\Delta$, задаваемым на функциях, удовлетворяющих крайним условиям (9) и условию при $x_1 = x_2 = 0$ вида (1).

Имеет место аналог равенства (2) для резольвент операторов $-\Delta_H(\chi)$ и $-\Delta(\chi)$

$$r_H(\chi, \lambda) - r(\chi, \lambda) = \tilde{r}(\chi, \lambda) (1 + d/dz) a_H^{-1}(\chi, \lambda) (1 - d/dz) p_e r(\chi, \lambda). \quad (10)$$

Здесь символ $r(\chi, \lambda)$ соответствует $R(\lambda)$, $a_H(\chi, \lambda) - A_H(\lambda)$, $p_e - p_e$ с естественными заменами. Так

$$a_H(\chi, \lambda) f = t(\chi, \lambda) f + (1 - d/dz) H(z) (1 + d/dz) f$$

где

$$\tilde{t}_n(\chi, \lambda) = [\ln((n + \chi)^2 - \lambda) - \alpha] (1 + (n + \chi)^2) \quad (II)$$

и т.п. При $H(z) \in L_{\infty}(0, 2\mathfrak{I})$ и достаточно больших отрицательных

$$a_H^{-1}(\chi, \lambda) = t^{-1/2}(\chi, \lambda) [E + t^{1/2}(\chi, \lambda) (1 - d/dz) H(1 + d/dz) t^{-1/2}] t^{-1/2}. \quad (12)$$

Из явного вида коэффициентов Фурье $\tilde{t}_n(\chi, \lambda)$ (см. (II)), следует, что при достаточно больших отрицательных λ оператор $t^{-1/2}(\chi, \lambda)$ это оператор Гильберта-Шмидта в $L_2(0, 2\mathfrak{I})$. Как показано в [5] оператор $(E + t^{1/2}(1 - d/dz) H(1 + d/dz) t^{-1/2})$ ограничен при больших отрицательных λ или $\Im \lambda \neq 0$. Далее операторы

$(1 - d/dz) p_e r(\chi, \lambda)$ и $\tilde{r}(\chi, \lambda) (1 + d/dz)$ ограничены как операторы из $L_2(\mathbb{R}^2 \times [0, 2\mathfrak{I}])$ в $L_2(0, 2\mathfrak{I})$ и из $L_2(0, 2\mathfrak{I})$ в $L_2(\mathbb{R}^2 \times [0, 2\mathfrak{I}])$ соответственно. Таким образом, из (10) следует, что $r_H(\chi, \lambda) - r(\chi, \lambda)$ - ядерный при всех $\chi \in [0, 1]$. В силу теоремы Бирмана-Като отсюда следует существование и полнота волновых операторов $W_{\pm}(-\Delta_H(\chi), -\Delta(\chi))$ и унитарность операторов рассеяния $S(\chi) = W_{-}^*(\chi) W_{+}(\chi)$. Пользуясь с помощью \mathfrak{I}^{-1} этот результат в $L_2(\mathbb{R}^3)$, мы получаем унитарность S и асимптотическую полноту $W_{\pm} : W_{-}(-\Delta_H, -\Delta) L_2(\mathbb{R}^3) = W_{+}(-\Delta_H, -\Delta) L_2(\mathbb{R}^3)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из показательства леммы 2 следует, что $L_2(\mathbb{R}^2 \times [0, 2\pi]) \ominus W_{\pm}(-\Delta_H(\delta), -\Delta(\delta))L_2(\mathbb{R}^2 \times [0, 2\pi])$ — это подпространство, натянутое на собственные функции оператора $-\Delta_H(\delta)$, сосредоточенные вблизи отрезка $\chi_1 = \chi_2 = 0$, $z \in [0, 2\pi]$. Поэтому $L_2(\mathbb{R}^3) \ominus W_{\pm}L_2(\mathbb{R}^3)$ оказывается натянутым на решения волнового типа, сосредоточенные вблизи оси $\chi_1 = \chi_2 = 0$. Таким образом, в задаче с потенциалом, сосредоточенным на оси, появляется новый канал рассеяния, что роднит эту задачу с многочастичной задачей рассеяния. Более подробное описание волноводных решений и соответствующего подпространства будет проведено в следующей работе.

Литература

1. B e t h e H., P e i e r l s R. Quantum theory of the dipole. Proc.Roy.Soc., 1935, v.148 A, p.146-156.
2. K r o n i g R.L., P e n n e y W.G. Quantum mechanics of electron in crystal lattices. Proc.Roy.Soc., 1931, v.130A, p.499-513.
3. Б е р е з и н Ф.А., Ф а л п е е в Л.Д. Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом. Докл. АН СССР, 1961, т.137, № 5, с.1011-1014.
4. Б л а г о в е щ е н с к и й А.С., Л а в р е н т ь е в К.К. Трехмерный оператор Лапласа с граничным условием на оси. Вестник ЛГУ, 1977, № 1, с.9-16.
5. К у р ы л е в Я.В. О граничных условиях на кривой для трехмерного оператора Лапласа. В кн.: Математические вопросы теории распростр. волн. 9. Зап. научн. семина. ЛОМИ, 1978, т.78, с.112-127.
6. П а в л о в Б.С. Теория расширений и явно решаемые модели. УМН, 1987, т.42, № 6, с.99-132.
7. C h e r e m s h a n t s e v S.E. Hamiltonians with zero-range interactions supported on a Brownian path. LOMI - Preprints E-12-89, L., 1989.
8. A l b e v e r i o S., F e n s t a d J.E., H o e g h - K r o h n R., L i n d s t r o m T. Non Standard Methods in Stochastic Analysis and Mathematical Physics. Acad.Press., N-Y-London, 1986.
9. Y a f a e v D.R. On the Break-down of Completeness of Wave Operators in Potential Scattering. Comm.Math.Phys., 1979, v.65, N 2, p.167-180.
10. T e t a A. Singular Perturbations of the Laplacian and Connections with Models of Random Media. Preprint. Bohum Univ.1989.
- II. Р и л М., С а й м о н Б. Методы современной математической физики, т.4. Анализ операторов. М., 1982.