О. И. Богоявленский, С. П. Новиков, О связи гамильтоновых формализмов стационарных и нестационарных задач,

Функц. анализ и его прил., 1976, том 10, выпуск 1, 9–13

https://www.mathnet.ru/faa2123

Функциональный анализ и его приложения,
т. 10, вып. 1, 1976, 9—13.

О СВЯЗИ ГАМИЛЬТОНОВЫХ ФОРМАЛИЗМОВ СТАЦИОНАРНЫХ И НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ

О. И. Богоявленский, С. П. Новиков

Формально гамильтоновы системы (потоки) на функциональных пространствах $u(x)$ имеют, согласно Гарднеру, вид (см. [2])

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \dot{u} = \frac{d}{dx}\,\frac{\delta I}{\delta u(x)},$$

где $I = \int L\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right) dx$, $\frac{\delta I}{\delta u(x)} = \frac{\partial L}{\partial u} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k}\,\frac{\partial L}{\partial u^{(k)}}$. Действительно, эти системы гамильтоновы на любом классе функций, где I имеет смысл, так как скобка Пуассона имеет вид $[I, I_1] = \int \frac{\delta I}{\delta u}\frac{d}{dx}\frac{\delta I_1}{\delta u} dx$.

В работе [1] один из авторов, рассматривая уравнение Кортевега — де Фриза (КдФ) и его высшие аналоги $\dot{u} = \frac{d}{dx}\,\frac{\delta I_n}{\delta u(x)}$, решал стационарную задачу $\frac{\delta I_n}{\delta u(x)} = \mathrm{const}$. Последние уравнения также гамильтоновы. В [1] было высказано утверждение о связи гамильтонова формализма стационарной и нестационарной задачи, но оно точно даже не было сформулировано. В данной работе мы формулируем и доказываем общую теорему о такой связи.

Рассмотрим два формально гамильтоновых потока в произвольном классе гладких функций на оси x:

$$\dot{u} = \frac{d}{dx}\,\frac{\delta I}{\delta u}(X), \quad I = \int L dx; \quad \dot{u} = \frac{d}{dx}\,\frac{\delta I_1}{\delta u}(X_1), \quad I_1 = \int L_1 dx,$$

где лагранжианы $L = L(u, u^{(1)}, \ldots, u^{(n)})$, $L_1 = L_1(u, u^{(1)}, \ldots, u^{(k)})$ не зависят явно от x; $u^{(s)} = \frac{\partial^s u}{\partial x^s}$. Для простоты предположим, что $k < n$. Пусть $I_0 = \int \frac{u^2}{2} dx$, $L_0 = \frac{u^2}{2}$, а соответствующий поток, коммутирующий с X и X_1, обозначим через X_0. Это — сдвиг по x. Известно, что коммутативность потоков равносильна тождеству (см. [2])

$$\frac{\delta I}{\delta u}\,\frac{d}{dx}\,\frac{\delta I_1}{\delta u} \equiv \frac{d}{dx} Q(u, u^{(1)}, \ldots, u^{(2n-1)}), \qquad [I, I_1] = 0. \tag{1}$$

Из коммутативности потоков X и X_1 следует, что неподвижные точки потока X, т. е. решения уравнения

$$\frac{\delta I}{\delta u} = \frac{\partial L}{\partial u} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k}\,\frac{\partial L}{\partial u^{(k)}} = -h, \qquad h = \mathrm{const}, \tag{2}$$

образуют инвариантное множество для потоков X_0, X_1. Уравнение (2) имеет вид $\frac{\delta I_h}{\delta u(x)}=0$, $L_h=L+hu$. Из (1) следует, что $Q_h=Q+ +h\frac{\delta I_1}{\delta u(x)}$ является интегралом уравнения (2) $\frac{\delta I_h}{\delta u(x)}=0$.

В теории КдФ эта конструкция интегралов стационарной задачи для высших КдФ предлагалась в работах [3], [4]; она отличается от конструкции интегралов в [1].

Уравнение (2) определяет гамильтонову систему в соответствующем $2n$-мерном фазовом пространстве T; каждое решение уравнения (2) определяется своей начальной точкой на этом фазовом пространстве при некотором $x=x_0$. Следовательно, поток X_1, действующий на решениях уравнения (2), определяет зависящее от h однопараметрическое семейство потоков $\varphi_h(X, X_1)$ на конечномерном фазовом пространстве T. Если $X_1=X_0$, то поток $\varphi_h(X, X_0)$ есть, очевидно, сдвиг по x вдоль траектории гамильтонова потока (2), а соответствующий интеграл — Q_h является энергией. Имеет место общая

Теорема 1. *Поток $\varphi_h(X, X_1)$ на фазовом пространстве T является гамильтоновым с гамильтонианом* $(-Q_h)$ (мы предполагаем, конечно, что переход к каноническим переменным (p_i, q_i) взаимно однозначен и $\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^2}\neq 0$) *).

Замечание 1. Следует иметь в виду, что все решения стационарного уравнения (2) могут оказаться, например, растущими функциями. Поэтому ограничение симплектической структуры на множество неподвижных точек потока X не имеет смысла, исключая особый случай вполне интегрируемых систем (например, высших КдФ), где целая область решений уравнения (2) заполнена периодическими и почти периодическими функциями. Именно такая ситуация возникала в работе [1].

Переходя к доказательству, опишем фазовое пространство T. В этом пространстве введены следующие координаты и импульсы:

$$q_i=u^{(i-1)},\qquad p_i=\frac{\partial L_h}{\partial u^{(i)}}+\sum_{s=1}^{n-i}(-1)^s\frac{d^s}{dx^s}\,\frac{\partial L_h}{\partial u^{(i+s)}},\quad 1\leqslant i\leqslant n. \tag{3}$$

Каноническая структура на T имеет стандартный вид $\omega^2=\sum_{i=1}^{n}dp_i\wedge dq_i$.

Гамильтонов поток, определенный уравнением (2), совпадает с $\varphi_h(X, X_0)$ и имеет гамильтониан

$$H=\sum_{i=1}^{n}p_iu^{(i)}-L_h=\sum_{i=1}^{n-1}p_iq_{i+1}+p_nq_n'-L_h(q_1,\ldots,q_n,q_n')=$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}p_iq_{i+1}+\Phi(q_1, q_2,\ldots,q_n,p_n), \tag{4}$$

где, согласно (3), $p_n=\frac{\partial L_h}{\partial q_n'}$ (штрих означает производную по x).

---

*) Примечание. Теорема 1 справедлива также и для других канонических структур (скобок Пуассона) в пространстве функций $u(x)$, например, если $\{I, I_1\}=\int\left(\frac{\delta L}{\delta u}\cdot A_{2n+1}\frac{\delta L_1}{\delta u}\right)dx$, где $A_{2n+1}=\sum_{i=0}^{n}c_i\frac{\partial^{2i+1}}{\partial x^{2i+1}}$, а также если скобки Пуассона в пространстве вектор-функций $(p(x), q(x))$ имеют вид

$$\{I, I_1\}=\int\left(\frac{\delta L}{\delta p}\,\frac{\delta L_1}{\delta q}-\frac{\delta L}{\delta q}\,\frac{\delta L_1}{\delta p}\right)dx.$$

Отметим, что справедливо тождество

$$-p_1' - \frac{\partial H}{\partial q_1} \equiv \frac{\delta I_h}{\delta u}. \tag{5}$$

Все уравнения $p_i' + \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0$, $q_i' - \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0$, кроме уравнения $p_1' + \frac{\partial H}{\partial q_1} = 0$, эквивалентны условиям (3) и позволяют выразить производные $u^{(1)}, \ldots$ $\ldots, u^{(2n-1)}$ через фазовые координаты p_i, q_i.

Тождество (1) в фазовых координатах, в силу (5), имеет вид:

$$\left(-\frac{\partial H}{\partial q_1} - p_1'\right)\left(\frac{d}{dx}\frac{\delta I_1}{\delta u}\right) \equiv \frac{\partial Q_h}{\partial p_1} p_1' - \sum_{i=2}^{n} \frac{\partial Q_h}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial Q_h}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}. \tag{6}$$

Отметим, что по условию тождество (1) справедливо для любой функции $u(x)$, поэтому в тождестве (6) p_1' может быть любым числом независимо от p_i, q_i. Следовательно,

$$\frac{d}{dx}\frac{\delta I_1}{\delta u} \equiv -\frac{\partial Q_h}{\partial p_1}. \tag{7}$$

Подставляя это выражение в (6), получаем

$$\frac{\partial H}{\partial q_1}\frac{\partial Q_h}{\partial p_1} + \sum_{i=2}^{n}\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial Q_h}{\partial p_i} - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial Q_h}{\partial q_i} = \{Q_h, H\} = 0. \tag{8}$$

Рассмотрим поток $\varphi_h(X, X_1)$ в фазовом пространстве. Производные вдоль этого потока будем обозначать точкой. Из определения этого потока $\dot u = \frac{d}{dx}\frac{\delta I_1}{\delta u(x)}$ и (7) следует, что $\dot q_1 = -\frac{\partial Q_h}{\partial p_1}$. По индукции допустим, что справедливо уравнение $\dot q_i = -\frac{\partial Q_h}{\partial p_i}$ $(1 \leqslant i < n)$, тогда, в силу тождества Якоби для скобки Пуассона $\{\ ,\ \}$, имеем

$$\dot q_{i+1} = \dot q_i' = -\frac{d}{dx}\frac{\partial Q_h}{\partial p_i} = -\{H, \{Q_h, q_i\}\} = \{Q_h, \{q_i, H\}\} + \{q_i, \{H, Q_h\}\}.$$

Согласно (4), $\{q_i, H\} = -\frac{\partial H}{\partial p_i} = -q_{i+1}$; согласно (8), $\{H, Q_h\} = 0$. Поэтому $\dot q_{i+1} = -\{Q_h, q_{i+1}\} = -\frac{\partial Q_h}{\partial p_{i+1}}$. Следовательно, для всех i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ справедливы уравнения

$$\dot q_i = -\frac{\partial Q_h}{\partial p_i}. \tag{9}$$

Продифференцируем уравнение $q_n' = \frac{\partial H}{\partial p_n}$ вдоль потока $\varphi_h(X, X_1)$, а уравнение $\dot q_n = -\frac{\partial Q_h}{\partial p_n}$ — вдоль потока $\varphi_h(X, X_0)$. Получим:

$$(q_n')^{\cdot} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 H}{\partial p_n \partial q_i}\dot q_i + \frac{\partial^2 H}{\partial p_n^2}\dot p_n = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 H}{\partial p_n \partial q_i}\frac{\partial Q_h}{\partial p_i} + \frac{\partial^2 H}{\partial p_n^2}\dot p_n,$$

$$(\dot q_n)' = -\left\{H, \frac{\partial Q_h}{\partial p_n}\right\} = -\{H, \{Q_h, q_n\}\} = \{Q_h, \{q_n, H\}\} + \{q_n, \{H, Q_h\}\} =$$

$$= -\left\{Q_h, \frac{\partial H}{\partial p_n}\right\} = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 H}{\partial p_n \partial q_i}\frac{\partial Q_h}{\partial p_i} + \frac{\partial^2 H}{\partial p_n^2}\frac{\partial Q_h}{\partial q_n}.$$

В силу перестановочности дифференцирований по потокам $\varphi_h(X, X_1)$, $\varphi_h(X, X_0)$ оба выражения равны. Отсюда получаем, что $\dot{p}_n = \dfrac{\partial Q_h}{\partial q_n}$.

По индукции предположим, что справедливо уравнение $\dot{p}_i = \dfrac{\partial Q_h}{\partial q_i}$, где $1 < i \leqslant n$. Продифференцируем это уравнение вдоль потока $\varphi_h(X, X_0)$, а уравнение $p_i' = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i}$ — вдоль потока $\varphi_h(X, X_1)$. Получим:

$$(\dot{p}_i)' = \left\{H, \frac{\partial Q_h}{\partial q_i}\right\} = \{H, \{p_i, Q_h\}\} = -\{p_i, \{Q_h, H\}\} - \{Q_h, \{H, p_i\}\} =$$
$$= \left\{Q_h, \frac{\partial H}{\partial q_i}\right\} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial q_j} \frac{\partial Q_h}{\partial p_j} - \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_n} \frac{\partial Q_h}{\partial q_n} - \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_{i-1}} \frac{\partial Q_h}{\partial q_{i-1}},$$

$$(p_i')^{\boldsymbol{\cdot}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial q_j} \frac{\partial Q_h}{\partial p_j} - \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_n} \frac{\partial Q_h}{\partial q_n} - \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_{i-1}} \dot{p}_{i-1}.$$

Отсюда, поскольку

$$\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_{i-1}} = 1$$

(в силу (4)), получаем, что $\dot{p}_{i-1} = \dfrac{\partial Q_h}{\partial q_{i-1}}$. Следовательно, для всех i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ справедливы уравнения $\dot{p}_i = \dfrac{\partial Q_h}{\partial q_i}$. Итак, теорема 1 доказана.

Замечание. 2. Не представляет труда сформулировать и доказать теорему и в случае $k \geqslant n$, выражая высшие производные из уравнения (2).

Следствие 1. *Любая алгебра Ли L формально гамильтоновых потоков, коммутирующих с X, гомоморфно отображается на алгебру Ли гамильтоновых полей $\varphi_h(X, L)$ на конечномерном фазовом пространстве стационарных точек потока X.*

В случае высших КдФ, где поток $X = X_n$ задается интегралами Крускала I_n, мы имеем коммутативную алгебру L, задаваемую потоками X_k вида

$$\dot{u} = \frac{d}{d_x} \frac{\delta I_k}{\delta u(x)}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

(см. [2], [5]). Легко показать [4], что потоки $\varphi_h(X_n, X_k)$ линейно независимы. Поэтому из теоремы 1 следует коммутативность этого полного набора интегралов. И. М. Гельфанд указал авторам, что это утверждение напрямик доказано им и Л. А. Диким [6], исходя из конкретного анализа интегралов Крускала; однако фактически это является следствием весьма общей и простой теоремы 1, как и предполагалось в [1].

Заметим, что в [1] указывалось совершенно другое построение интегралов стационарной задачи

$$\sum_{i=0}^{n} c_i \frac{\delta I_{n-i}}{\delta u(x)} = d = \mathrm{const}\,.$$

для высших КдФ; через интегралы работы [1] явно определялся спектр оператора Хилла (Шредингера) с потенциалом $u(x)$. Для двухзонных потенциалов ($n = 2$, $c_0 = 1$, $c_1 = 0$), сравнивая интегралы Лакса — Гельфанда — Дикого с интегралами Новикова (см. [1], пример 2), получаем

$$R(E) = E^5 + \frac{c_2}{8} E^3 - \frac{d}{16} E^2 + \left(\frac{c_2^2}{64} + \frac{Q}{32}\right) E + \frac{-2Q_1 + 2c_2 d}{16^2},$$

где $(-Q)$ и $(-Q_1)$ — гамильтонианы потоков $\varphi_d (X, X_0)$, $\varphi_d (X, X_1)$. Корни уравнения $R(E) = 0$ являются краями зон (лакун).

*) Примечание при корректуре. О. И. Богоявленским получена формула, линейно выражающая интегралы Новикова [1] через интегралы Лакса — Гельфанда — Дикого [3], [6] для всех $n \geqslant 2$ (О. И. Богоявленский, Функц. анализ **10**, вып. 2 (1976)).

Институт теоретической физики
АН СССР им. Л. Д. Ландау

Поступила в редакцию
22 сентября 1975 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Новиков С. П., Периодическая задача для уравнения Кортевега — де Фриза, Функц. анализ 8, вып. 3 (1974), 54—66.
2. Gardner C. S., Korteweg — de Vries equation and generalizations. IV. The Korteweg — de Vries equation as a Hamiltonian system, J. Math., Phys. **12** (1971), 1548—1551.
3. Lax P. D., Periodic solution of the KdV equation, Comm. Pure and Appl. Math. **XXVIII**, № 1 (1975), 141—188.
4. Гельфанд И. М., Дикий Л. А., Асимптотика резольвенты штурм—лиувиллевских операторов и алгебра уравнений Кортевега — де Фриза, УМН **XXX**, вып. 5 (1975), 67—101.
5. Захаров В. Е., Фаддеев Л. Д., Уравнение Кортевега — де Фриза — вполне интегрируемая гамильтонова система, Функц. анализ 5, вып. 4 (1971), 18—27.
6. Гельфанд И. М., Дикий Л. А., Структура алгебры Ли в формальном вариационном исчислении, Функц. анализ **10**, вып. 1 (1976), 18—25.