Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

М. А. Носов, Адаптация расчетной сетки при моделировании волн цунами, *Матем. моделирование*, 2017, том 29, номер 12, 63–76

https://www.mathnet.ru/mm3918

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.172
12 июня 2025 г., 15:17:01

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ 2017 год, том 29, номер 12, стр. 63-76

АДАПТАЦИЯ РАСЧЕТНОЙ СЕТКИ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ВОЛН ЦУНАМИ

© *2017 г.* ***М.А. Носов***

Физический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова
Институт морской геологии и геофизики Дальневосточного отделения РАН
nosov@phys.msu.ru

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №16-55-50018, №16-05-00053).

Описаны принципы и методика адаптации неструктурированной расчетной сетки к распределению глубин океана для длинноволновых моделей цунами. Показано, что для адекватного воспроизведения цунами в рамках теории длинных волн возмущение, вводимое в модель, должно быть сглажено или отфильтровано для устранения короткопериодных компонент, подверженных фазовой дисперсии. Предложена явная формула для определения периода среза фильтра. Выполнены оценки относительной вычислительной эффективности использования неструктурированных сеток, адаптированных к распределению глубин, по сравнению с регулярными сетками. Показано, что использование неструктурированных сеток может обеспечить выигрыш в вычислительной эффективности до нескольких тысяч раз.

Ключевые слова: волны цунами, фазовая дисперсия, теория длинных волн, численное моделирование, неструктурированные сетки.

ADAPTATION OF A MESH AT NUMERICAL SIMULATION OF TSUNAMI WAVES

M.A. Nosov

Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University
Institute of Marine Geology and Geophysics, Far Eastern Branch of RAS

The principles and method of adaptation of an unstructured mesh to distribution of ocean depths for long-wave models of tsunamis are described. It is shown that for adequate reproduction of tsunami waves within a long-wave theory the perturbation entered into model has to be smoothed or filtered for elimination of the short-period components subject to phase dispersion. The explicit formula for calculation of cut-off period for the filter is suggested. Estimates of the relative computing effectiveness of use of the unstructured mesh adapted to distribution of ocean depths in comparison with the regular grids are performed. It is shown that use of unstructured mesh can provide an increase in computing effectiveness up to several thousand times.

Key-words: tsunami waves, phase dispersion, long-wave theory, numerical simulation, unstructured mesh.

1. Введение

К началу 21-го столетия численное моделирование зарекомендовало себя как эффективный инструмент изучения и прогнозирования волн цунами [1,2]. В научной литературе описаны по меньшей мере несколько десятков специализированных программ-

ных средств, предназначенных для численного воспроизведения динамики цунами. Не претендуя на полноту списка, отметим ряд известных моделей: TUNAMI [3], MOST [4], COMCOT [5], NAMI DANCE [6], MGC [7], TsunAWI [8], NEOWAVE [9], GeoClaw [10]. Некоторые модели цунами не имеют специальных названий, но активно используются различными научными группами, – их описания можно найти в [11-16].

Все упомянутые выше модели построены на основе теории длинных волн (гидростатическое приближение), в рамках которой пренебрегают вертикальной структурой потока, – таким образом исходная 3D гидродинамическая задача сводится к более простой 2D задаче. Серьезным недостатком 2D моделей, построенных на основе теории длинных волн, является пренебрежение фазовой дисперсией, которой подвержены волны цунами [2,17,18]. Но, несмотря на этот недостаток, а также на постепенное внедрение в практику численных расчетов цунами 3D моделей [19-24], именно 2D длинноволновые модели, несомненно, останутся востребованными в силу следующих двух причин. *Во-первых*, такие модели достаточно адекватно отражают физическую сущность рассматриваемого явления (цунами, как правило, представляют собой достаточно длинные волны). *Во-вторых*, 2D моделирование сопряжено с относительно небольшим объемом вычислений. Кроме того, в 2D моделях, в принципе, возможен учет слабой дисперсии (приближение Буссинеска) [25,26].

Наиболее распространенным подходом к численному решению уравнений, описывающих динамику цунами, является метод конечных разностей, использующий структурированные (регулярные) сетки. В тех случаях, когда требуется детальное описание динамики волн в некоторой заранее определенной области, применяют метод вложенных сеток (nested grids). При этом в расчетной области выделяют одну или несколько (обычно прямоугольных) подобластей 1-го уровня, шаг сетки в которых измельчается. В подобласти 1-го уровня могут быть выделены подобласти 2-го уровня, в которых происходит дальнейшее измельчение сетки, и т.д. На границе между подобластями n и n+1 уровней решение динамически сшивается. Метод вложенных сеток достаточно прост в реализации, и поэтому он широко распространен (TUNAMI, MOST, NAMI DANCE, MGC и др.).

Кроме метода конечных разностей, для моделирования цунами применяют также метод конечных элементов с использованием неструктурированных сеток (с переменным шагом) [8,27-30]. Метод конечных элементов обладает важным преимуществом: неструктурированные сетки легче адаптируются к сложной форме расчетной области и допускают плавное сгущение сетки там, где требуется повышенное пространственное разрешение.

В последние годы стали появляться работы, в которых при моделировании цунами используют динамически адаптивные сетки [10,31,32]. Основная идея этого подхода состоит в измельчении сетки в тех зонах расчетной области и в то время, где и когда решению свойственна мелкомасштабная структура. Применение динамически адаптивных сеток, по-видимому, представляет собой оптимальный вариант для решения нелинейных задач (например, описание наката цунами на берег), когда о структуре искомых гидродинамических полей трудно или невозможно заранее сделать однозначные предположения. Но для решения линейной задачи об описании динамики волн цунами на больших глубинах, где скорость волн определяется только глубиной океана, расчетная сетка может быть адаптирована к распределению глубин заранее и оставаться неизменной в процессе моделирования. Здесь важно заметить, что динамика цунами описывается линей-

ными уравнениями практически во всей расчетной области за исключением узкой прибрежной (мелководной) полосы и зоны наката.

Основными целями этой работы являются: (1) выработка простого и удобного для практического использования условия применимости длинноволнового приближения для описания волн цунами, (2) выработка и обоснование принципов адаптации неструктурированной расчетной сетки к распределению глубин океана (выбора шага сетки) для длинноволновых моделей цунами и (3) оценка относительной вычислительной эффективности использования неструктурированных сеток, адаптированных к распределению глубин, по сравнению с регулярными сетками.

2. Условие применимости длинноволнового приближения

Для определенности будем полагать, что «линейная зона» динамики цунами ограничена некоторой изобатой $H_{\min}$. Критерием для определения величины $H_{\min}$ служит условие малости амплитуды волны A по сравнению с глубиной океана: $A/H_{\min} << 1$. На практике, в зависимости от амплитуды волн, значение величины $H_{\min}$ обычно лежит в диапазоне $\sim 10-100$ м.

Известно, что линейные длинные гравитационные волны распространяются со скоростью $(gH)^{1/2}$, где H – глубина бассейна, g – ускорение силы тяжести. Длинные волны представляют собой простейшую модель волновых движений в океане, в которой фазовая дисперсия не учитывается. Вообще говоря, гравитационным волнам на воде, в том числе и волнам цунами, присуща нормальная дисперсия, которая приводит к специфической трансформации волнового возмущения по мере его распространения: длинноволновые компоненты опережают коротковолновые. Поэтому применение длинноволнового приближения для описания цунами возможно не всегда, а только при выполнении условия, обеспечивающего незначительность дисперсионных эффектов. Для получения такого условия введем величину L_0 (расстояние дисперсионного разрушения), физический смысл которой – расстояние, при распространении на которое волновой пакет отстанет от фронта на длину волны [2, 33]

$$L_0 = \frac{\lambda (gH)^{1/2}}{(gH)^{1/2} - C_{gr}}, \qquad (1)$$

где $C_{gr} = d\omega / dk$ – групповая скорость гравитационных волн. Связь между циклической частотой ω и волновым числом k ($k = 2\pi/\lambda$) определяется известным дисперсионным соотношением для гравитационных волн: $\omega^2 = gk \tanh(kH)$.

Из (1) следует, что абсолютное пренебрежение дисперсией возможно только для бесконечно длинных волн: $\lim_{\lambda/H \to \infty} L_0 = \infty$. Такой предельный случай, разумеется, невозможен в природных условиях. Однако в природе часто реализуется ситуация, когда волны являются достаточно длинными по сравнению с глубиной океана: $\lambda/H >> 1$. При выполнении этого условия из (1) несложно получить приближенное выражение для расстояния дисперсионного разрушения, которое удобно для практических оценок

$$L_0 \approx T^3 g^{3/2} \big/ (2\pi^2 H^{1/2}), \qquad (2)$$

где T ($T = 2\pi/\omega$) – период волн.

Формально выражение (2) получено для бассейна с плоским горизонтальным дном ($H = \text{const}$). В дальнейшем мы будем полагать, что аналогичное соотношение имеет силу также и для реального океана переменной глубины. В качестве величины H при этом выступает некоторая «средняя» глубина океана в рассматриваемой области H_{av}.

Сформулируем условие применимости теории длинных волн для описания цунами. Длинноволновая модель может быть использована, если размер расчетной области L не превосходит расстояние дисперсионного разрушения: $L<L_0$. Это условие, с учетом выражения (2), может быть записано как условие на период волн:

$$T > T_{\min} \equiv \frac{(2\pi^2 H_{av}{}^{1/2} L)^{1/3}}{g^{1/2}}. \qquad (3)$$

Условие (3) означает, что длинноволновая модель способна адекватно воспроизводить волны цунами в области, характеризующейся горизонтальной протяженностью L и глубиной океана H_{av}, только при условии, что период воспроизводимых волн превосходит величину $T_{\min}$.

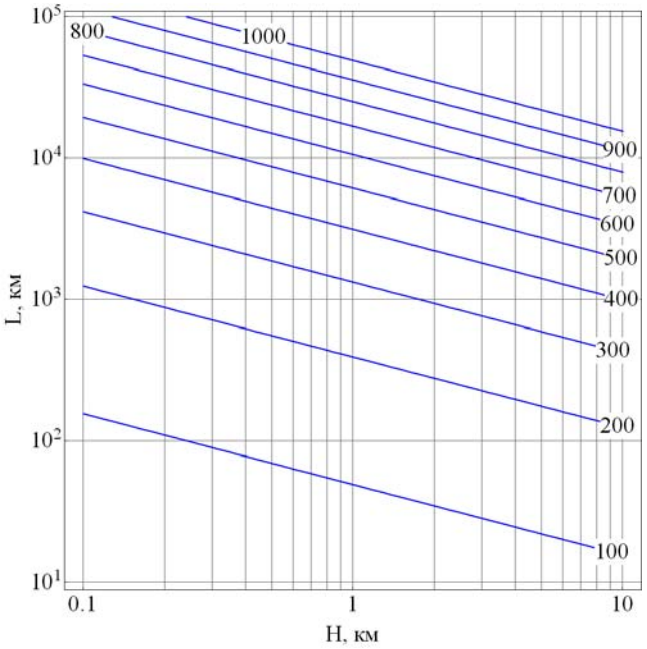

Рис.1. Минимальный период волн, адекватно воспроизводимых длинноволновой моделью, в зависимости от горизонтальной протяженности расчетной области и глубины океана. Цифры у изолиний – значения периода в секундах.

Зависимость (3) представлена на рис.1 в форме изолиний, которые построены для фиксированных значений величины $T_{\min}$ (цифры у изолиний – период в секундах) на плоскости «глубина океана» — «размер расчетной области». Из рисунка видно, что для короткопериодных цунами (T ~ 100 с) длинноволновая модель работоспособна до расстояний не более 100 км и только в случае шельфовых глубин ($H_{av} \sim 100\,м$). При глубинах в несколько километров длинноволновая модель становится неприменимой: дисперсия заметно исказит волны на расстоянии всего в несколько десятков километров. Если размер расчетной области составляет ~1000 км, а глубина океана 3-5 км, то применение теории длинных волн возможно для волн с периодами не менее 300-400 с. Транс-

океанское распространение цунами (размер области более 10 тыс. км, глубина 4-5 км) будет корректно описываться только в том случае, если период волн превысит 700 с.

Процесс генерации цунами обычно описывается путем задания некоторого начального возвышения свободной поверхности воды при нулевом поле скорости течения [1,2]. Начальное возвышение полагается либо равным вертикальной компоненте косейсмической деформации дна океана [4,6,31], либо рассчитывается из решения специальной задачи по векторному полю косейсмической деформации дна и распределению глубин [34-36]. И в первом, и во втором случае возмущение, вводимое в длинноволновую модель, может включать в себя короткопериодные спектральные компоненты ($T < T_{\min}$). Поэтому для корректной работы длинноволновой модели начальное возвышение должно быть сглажено таким образом, чтобы исключить подверженные дисперсии короткопериодные компоненты. Если процедуру сглаживания не проводить, то короткопериодные компоненты, распространяясь со скоростью $(gH)^{1/2}$, предписываемой длинноволновой моделью, т.е. быстрее, чем в природе, неминуемо исказят волновое поле.

Итак, первая процедура, которую необходимо выполнить перед моделированием волн цунами в рамках теории длинных волн, состоит в сглаживании исходного возмущения, которое исключит из рассмотрения короткопериодные компоненты $T<T_{\min}$. Период среза фильтра $T_{\min}$ следует оценивать в соответствии с (3) по размеру расчетной области L и типичной (средней) глубине океана в этой области H_{av}. В качестве величины L, например, может быть выбрана длина диагонали прямоугольной расчетной области (в сферических координатах – соответствующая длина дуги большого круга), а в качестве величины H_{av} – среднее арифметическое значений глубин океана в узлах равномерной сетки исходных батиметрических данных. Впрочем, методика определения величин L и H_{av} не имеет принципиального значения. Дело в том, что величина $T_{\min}$ довольно слабо зависит от размера расчетной области и глубины океана: $T_{\min} \sim H_{av}^{1/6} L^{1/3}$.

Процедура сглаживания или фильтрации, которая определяет минимальный период волн, воспроизводимых длинноволновой моделью, имеет еще одно важное значение. Зная величину $T_{\min}$, можно однозначно определить шаг сетки по пространству из простых физических соображений.

3. Принципы определения шага сетки

Как уже упоминалось выше, в рамках линейной теории длинных волн скорость распространения длинноволнового возмущения зависит только от глубины океана $(gH)^{1/2}$. Глубина океана в расчетной области обычно варьируется в диапазоне до 3 или даже 4 порядков: от $H_{\min} \sim 10^0 - 10^2$ м до $H_{\max} \sim 10^3 - 10^4$ м. Следовательно, скорость распространения и длина волн могут изменяться в десятки раз (период в линейной системе остается без изменения). Очевидно, что при численном моделировании следует избегать ситуаций, когда при выходе волны на мелководье ($H \approx H_{\min}$) ее длина, соответствующая минимальному периоду $\lambda_{\min} = T_{\min}(gH_{\min})^{1/2}$, станет меньше, чем шаг сетки по пространству Δ. Точнее, в соответствии с теоремой Котельникова (Nyquist-Shannon-Kotelnikov theorem), следует потребовать, чтобы на одну длину волны приходилось по крайней мере два шага сетки: $\lambda_{\min} \geq 2\Delta$. При использовании регулярных сеток это тре-

бование можно удовлетворить только путем задания достаточно малого шага по пространству во всей расчетной области, что приводит к резкому росту вычислительной трудоемкости задачи. Совсем иные возможности открывает здесь применение неструктурированных сеток. Пусть шаг неструктурированной сетки определяется формулой

$$\Delta(H) = \Delta_{\min}(H / H_{\min})^{1/2}, \qquad (4)$$

где $\Delta_{\min}$ – минимальный шаг сетки, устанавливаемый в окрестности точки с минимальной глубиной $H_{\min}$. Если следовать (4), то для волн, скорость которых пропорциональна $H^{1/2}$, на длину волны всегда будет приходиться фиксированное число шагов сетки по пространству. Применение такой неструктурированной сетки позволяет достичь заметного снижения вычислительной трудоемкости задачи при сохранении необходимого пространственного разрешения.

Точное следование закономерности (4) для 2D задач затруднено. Впрочем, на практике шаг сетки можно устанавливать в соответствии с формулой $\Delta(H) \le \Delta_{\min}(H / H_{\min})^{1/2}$. В практических приложениях при построении неструктурированных расчетных сеток наиболее распространенными являются треугольное и прямоугольное разбиения. В этой работе мы ограничимся прямоугольным разбиением.

При построении прямоугольной расчетной сетки обычным является кратное изменение шага по пространству. Например, для диапазона глубин $H_{\min} \le H \le 4H_{\min}$ строится сетка 1-го уровня с шагом по пространству Δ_1, для диапазона глубин $4H_{\min} \le H \le 16H_{\min}$ – сетка 2-го уровня с шагом $\Delta_2=2\Delta_1$ и т.д. Сетке n-го уровня соответствуют диапазон глубин $4^{n-1}H_{\min} \le H \le 4^n H_{\min}$ и шаг $\Delta_n=2^{n-1}\Delta_1$.

Покажем, что если адаптация сетки соответствует закономерности (4), то на практике достаточно будет ограничиться всего 6 уровнями (при двукратном изменения шага сетки). Пусть расчетная область включает в себя точку с максимальной глубиной Мирового океана $H_{\max}$=11022 м. Тогда минимальная глубина, соответствующая 1-му уровню сетки, составит $H_{\min}=H_{\max}/4^6 \approx 2.7$ м. Рассматривать эволюцию цунами в линейном приближении на меньших глубинах, как правило, не имеет смысла. Во многих численных моделях цунами расчеты ведутся до изобаты $H_{\min}$~10 м, на которой ставится граничное условие непротекания (отражения).

Опишем поэтапно построение прямоугольной неструктурированной сетки, которая позволяет воспроизводить длинные волны с минимальным периодом $T_{\min}$. Адаптация сетки к распределению глубин проводится таким образом, чтобы во всех узловых точках расчетной области шаг сетки не превосходил величины, определяемой формулой (4):

1. Выбор расчетной области и определение ее горизонтального размера L;

2. Определение максимальной $H_{\max}$ и средней H_{av} глубин океана в расчетной области;

3. Выбор минимальной глубины $H_{\min}$ – изобаты, на которой будет поставлено граничное условие отражения волн от берега;

4. Расчет минимального периода волн, воспроизводимых длинноволновой моделью $T_{\min}$, по величинам L и H_{av} в соответствии с (3);

5. Расчет минимальной длины волны, достигаемой при минимальной глубине:

$\lambda_{\min} = T_{\min}(gH_{\min})^{1/2}$;

6. Определение минимального шага сетки по пространству (шаг сетки уровня n=1) в соответствии с требованием о том, что на минимальной длине волны должны укладываться не менее K шагов сетки: $\Delta_1 \le \lambda_{\min} / K = T_{\min}(gH_{\min})^{1/2} / K$ ($K \ge 2$ в соответствии с теоремой Котельникова);

7. Определение шагов сетки, соответствующих старшим уровням по формуле: $\Delta_n = 2^{n-1}\Delta_1$;

8. Построение неструктурированной сетки.

Примеры прямоугольных неструктурированных сеток, построенных описанным выше способом, представлены на рис.2. В качестве примеров мы выбрали два типичных цунамигенных региона: «Центральные Курилы» (рис.2а) и «Чили» (рис.2б). Распределение глубин взято из глобальной модели рельефа дна GEBCO с пространственным разрешением 30 угл.сек. В обоих приведенных примерах мы полагали, что на минимальной длине волны укладываются не менее чем K=4 шагов сетки по пространству. Граничная изобата (минимальная глубина) была выбрана $H_{\min}$=5 м. На рисунке сетки представлены узловыми точками, размер которых увеличивается двукратно при переходе на следующий (старший) уровень. О распределении глубин океана можно судить по интенсивности серого тона и изобатам, построенным с интервалом 100 м.

Область «Центральные Курилы» (рис.2а) имеет горизонтальный размер (по диагонали) L=585 км, средняя и максимальная глубины океана в этой области составляют H_{av}=3772 м и $H_{\max}$=9578 м. Минимальный период воспроизводимых волн, рассчитанный по формуле (3), составил $T_{\min}$=285 с. Неструктурированная сетка имеет 6 уровней. Минимальный шаг по пространству Δ_1=499 м, максимальный Δ_6=15968 м.

Область «Чили» характеризуется размером L=735 км. Глубины океана в этой области: H_{av}=3378 м, $H_{\max}$=8087 м. Минимальный период воспроизводимых волн, рассчитанный по формуле (3) составил $T_{\min}$=302 с. Число уровней сетки 6. Минимальный шаг по пространству Δ_1=528 м, максимальный Δ_6=16896 м.

Подчеркнем, что шаг сетки определяется не только распределением глубин, но и размером расчетной области, а также выбором изобаты $H_{\min}$. Поэтому сетка привязана к конкретной расчетной области и изобате $H_{\min}$. Выделение фрагмента расчетной области вместе с соответствующим фрагментом сетки для ее дальнейшего использования в численных расчетах является, вообще говоря, некорректным.

Оценим вычислительную трудоемкость численного решения задачи о распространении длинных волн при использовании сеток с постоянным и переменным – в соответствии с (4) – шагом. Под вычислительной трудоемкостью будем понимать число узлов сетки, умноженное на необходимое число шагов по времени: $N=N_xN_yN_t$. Для расчетной области с характерным горизонтальным размером L число узлов сетки с постоянным шагом Δ оценивается формулой $N_xN_y \sim (L/\Delta)^2$. Расчет распространения цунами, очевидно, следует вести хотя бы до того времени, за которое волна успеет пробежать расстояние, равное размеру расчетной области: $t_{\max} \sim L(gH_{\max})^{-1/2}$. Шаг по времени определяется критерием Куранта-Фридрихса-Леви: $\Delta t < \Delta(gH_{\max})^{-1/2}$. Итак, необходимое число шагов по времени оценивается как $N_t \sim t_{\max} / \Delta t = L / \Delta$. Итоговая формула для оценки вычисли-

тельной трудоемкости имеет следующий вид:

$$N \sim (L/\Delta)^3 . \qquad (5)$$

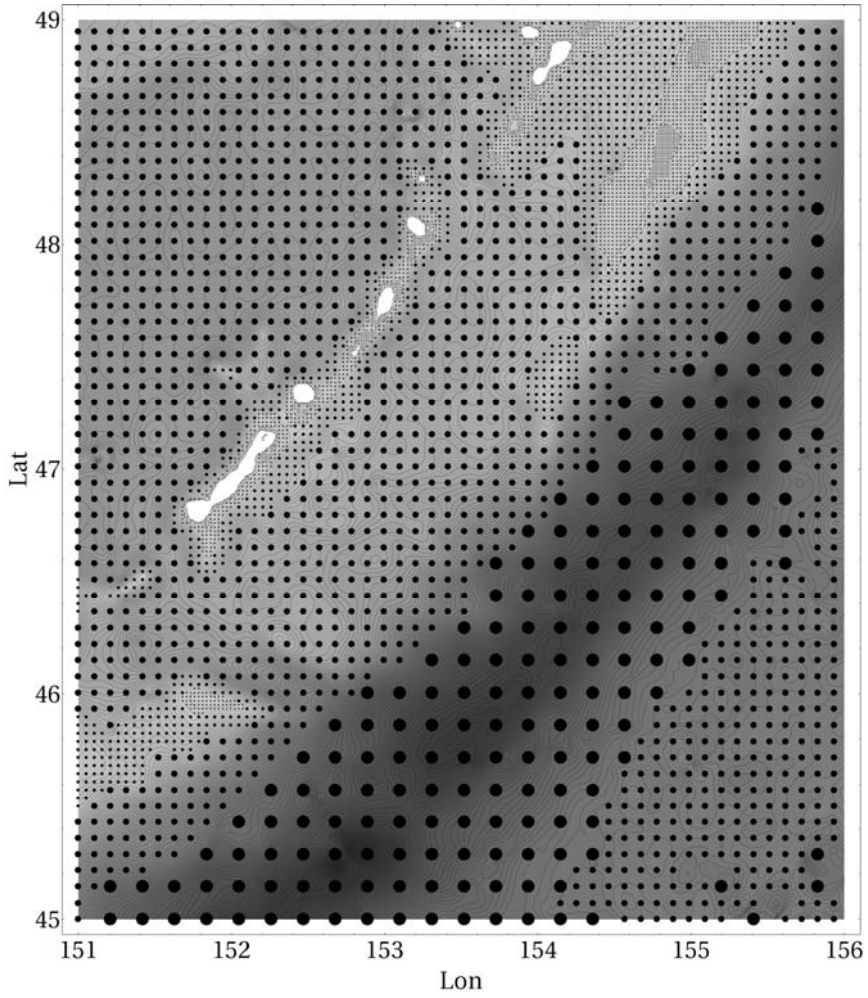

Рис.2а. Примеры неструктурированных сеток, адаптированных к распределению глубин в регионах «Центральные Курилы» (а) и «Чили» (б). Сетки показаны узловыми точками. Размер точек и шаг сетки увеличиваются двукратно при переходе на следующий (старший) уровень. Глубина океана показана оттенками серого, шаг изобат 100 м.

Из (5) видно, что при использовании сетки с постоянным шагом вычислительная трудоемкость задачи возрастает очень быстро – пропорционально кубу отношения размера расчетной области и шага сетки. Следовательно, любые попытки обеспечить высокое пространственное разрешение, необходимое в некоторой части расчетной области, путем измельчения шага регулярной сетки являются весьма нерациональными.

Оценим отношение вычислительных трудоемкостей задачи при использовании структурированных и неструктурированных сеток

$$\frac{N}{N^U} = \frac{N_x N_y N_t}{N_x{}^U N_y{}^U N_t{}^U} .$$

Здесь и далее величины, помеченные индексом «*U*», относятся к неструктурированным (unstructured) сеткам. Шаг по пространству структурированной сетки, с которой ведется

сравнение, конечно, должен быть эквивалентен наименьшему шагу неструктурированной сетки: $\Delta = \Delta_1$.

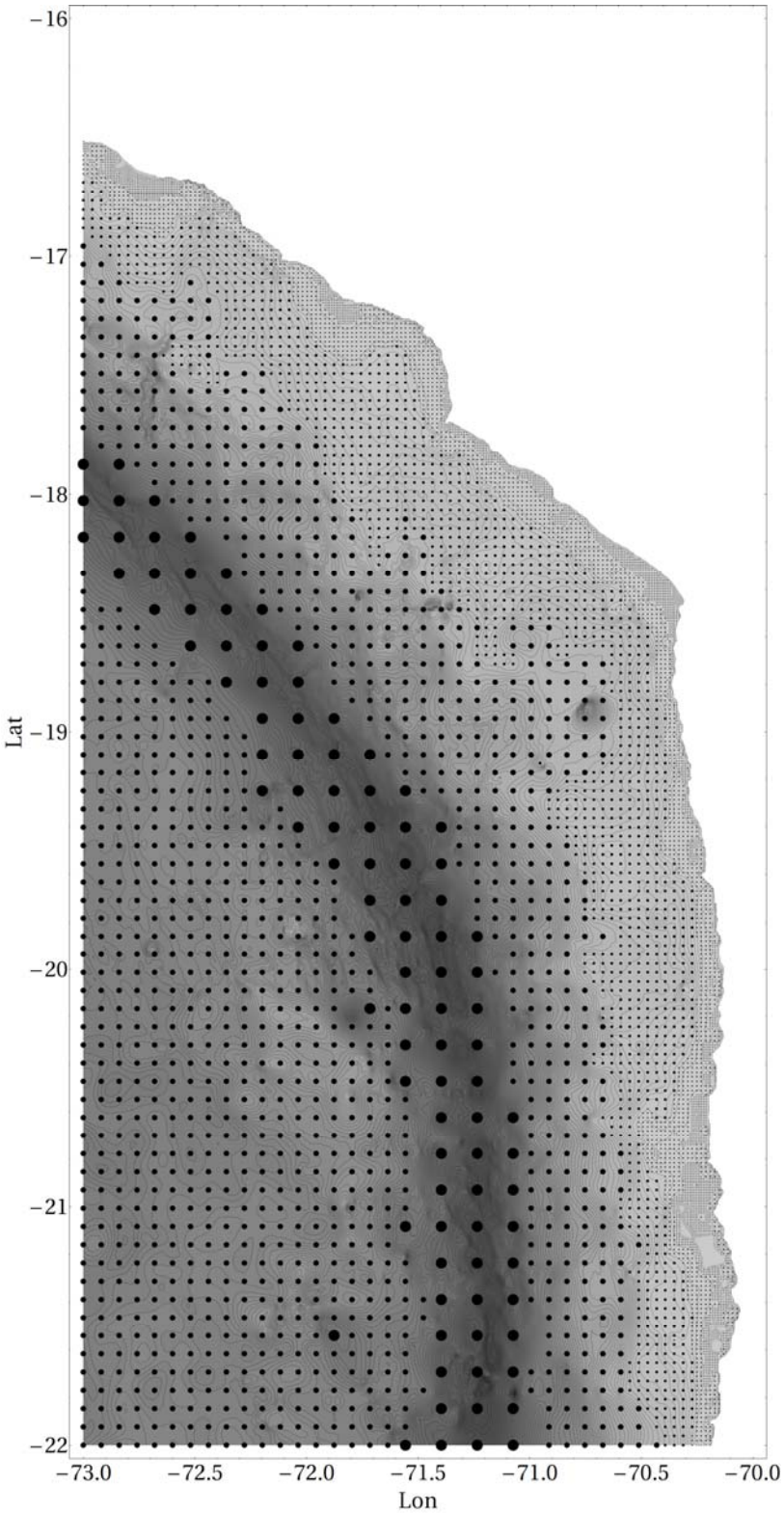

Рис.2б. Примеры неструктурированных сеток, адаптированных к распределению глубин в регионах «Центральные Курилы» (а) и «Чили» (б). Сетки показаны узловыми точками. Размер точек и шаг сетки увеличиваются двукратно при переходе на следующий (старший) уровень. Глубина океана показана оттенками серого, шаг изобат 100 м.

Примечательно, что преимущество неструктурированных сеток обязано не только значительному сокращению числа узлов (при сохранении необходимого пространственного разрешения в мелководных областях), но и возможности задать больший шаг по времени (при сохранении устойчивости численной схемы в соответствии с критерием Куранта-Фридрихса-Леви). Дело в том, что уменьшение шага в мелководных областях компенсируется уменьшением скорости волн:

$$\Delta t^U < \frac{\Delta(H)}{\sqrt{gH}} \le \frac{\Delta_{NL}}{\sqrt{gH_{\max}}} = \frac{2^{NL-1}\Delta_1}{\sqrt{gH_{\max}}},$$

где NL – число уровней сетки, Δ_{NL} – шаг сетки старшего уровня. Итак, при использовании неструктурированной сетки потребуется совершить следующее число шагов по времени:

$$N_t^U \sim t_{\max} / \Delta t^U = \frac{L}{2^{NL-1}\Delta_1}.$$

Выигрыш в числе шагов по времени, который обеспечивает применение неструктурированной сетки, определяется формулой

$$N_t / N_t^U \sim 2^{NL-1}. \qquad (6)$$

Для 6-уровневой сетки выигрыш, оцененный по формуле (6), составит $2^5 = 32$ раза.

Для подсчета числа узлов неструктурированной сетки следует, очевидно, выбрать конкретную расчетную область. Для примеров расчетных областей, представленных на рис.2, отношение числа узлов $N_x N_y / (N_x^U N_y^U)$ составляет 114 для региона «Центральные Курилы» и 56 – для региона «Чили». Итоговый выигрыш в вычислительной трудоемкости N / N^U составляет 3648 и 1792 для «Центральных Курил» и «Чили» соответственно. Видно, что выигрыш от применения неструктурированных сеток в задаче цунами оказывается весьма существенным.

Уменьшение длины волны при ее выходе на мелководье – это не единственный фактор, требующий сгущения расчетной сетки. При дискретном представлении функции, описывающей глубину океана, возможны ситуации, когда значительное изменение глубины приходится на один шаг сетки по пространству. Здесь уместно вспомнить о классической задаче взаимодействия длинной волны, распространяющейся в канале, со скачком глубин [37]. В точке скачка глубин выполняются условия непрерывности потока жидкости

$$u_1 H_1 = u_2 H_2 \qquad (7)$$

и смещения свободной поверхности жидкости от равновесного положения (давления)

$$\xi_1 = \xi_2, \qquad (8)$$

где индексы «1» и «2» относятся к областям, разделяемым скачком глубин. Из (7) следу-

ет, что в точке скачка глубин формируется разрыв скорости течения

$$u_2 - u_1 = u_1 \frac{H_1 - H_2}{H_2}. \qquad (9)$$

С использованием (7) и (8), а также линеаризованного динамического уравнения теории длинных волн

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \xi}{\partial x},$$

несложно показать, что в точке скачка глубин имеет место разрыв пространственной производной смещения свободной поверхности

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial x} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x} = \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \frac{H_1 - H_2}{H_2}. \qquad (10)$$

Конечно, дискретное представление функций при решении задачи конечно-разностным методом подразумевает их «скачкообразное» изменение. Но корректность метода явно будет нарушена, если эти «скачкообразные» изменения будут сильно менять значения искомых функций. Поэтому в области резкого изменения глубин следует измельчать расчетную сетку таким образом, чтобы вычисляемые функции не претерпевали слишком больших изменений на расстояниях порядка шага сетки. Математически это условие записывается следующим образом:

$$\left|(u_2 - u_1)/u_1\right| << 1, \qquad (11)$$

$$\left|\left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x}\right) \Big/ \frac{\partial \xi_1}{\partial x}\right| << 1. \qquad (12)$$

Формулы (11) и (12) с учетом связей (9) и (10) дают единое условие:

$$\left|(H_1 - H_2)/H_2\right| << 1,$$

которое мы перепишем следующим образом:

$$\left|\frac{H_1 - H_2}{H_2}\right| \approx \frac{\left|\mathrm{grad}(H)\right| \Delta}{H} << 1. \qquad (13)$$

Из формулы (13) вытекает условие на величину шага по пространству, которое легко может быть использовано на практике

$$\Delta << H/\left|\mathrm{grad}(H)\right|. \qquad (14)$$

На рис.3 показаны распределения пары величин (H,$H/|\,\mathrm{grad}H|$), рассчитанные по батиметрическим данным GEBCO с разрешением 30 угл.сек. для областей, показанных на рис.2. Точки, соответствующие суше, из анализа исключались. Видно, что в большинстве точек, вне зависимости от рассматриваемого региона, значение величины $H/\left|\mathrm{grad}\, H\right|$ варьируется в диапазоне: $10^4 - 10^6$ м. Следовательно, в соответствии с критерием (14) в большинстве точек расчетной области шаг по пространству может быть

задан в диапазоне $\Delta \sim 10^3 - 10^5$ м, т.е. на уровне 10% от величины $H / |\text{grad}\, H|$. Однако при глубинах $H < 10^3$ м величина $H / |\text{grad}\, H|$ может принимать значения $\sim 10^2 - 10^3$ м – в этих случаях шаг по пространству следует сократить до величин $\Delta \sim 10^1 - 10^2$ м. Очевидно, что использование структурированных сеток с таким малым шагом по пространству, особенно на акваториях океанских масштабов, приведет к колоссальному увеличению вычислительной трудоемкости задачи. Выигрыш от использования неструктурированных сеток здесь становится особенно очевидным.

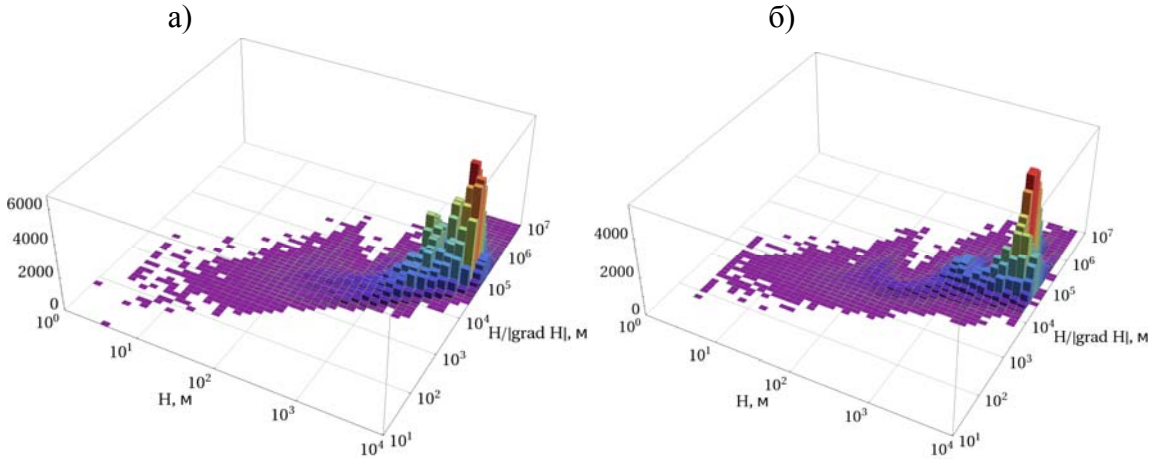

Рис.3. Распределение пары величин $\left(H, H / |\text{grad}\, H|\right)$ для областей, показанных на рис.2 (а – «Центральные Курилы», б – «Чили»). Для расчета использовалась батиметрия GEBCO08 с разрешением 30 угловых секунд.

На практике для построении неструктурированной сетки в качестве шага по пространству следует, конечно, всегда выбирать минимальную из величин, предписываемых формулами (4) и (14). На больших глубинах ($H > 10^3$ м) в большинстве случаев, более жестким будет условие (4). На малых глубинах в качестве более жесткого, как правило, будет выступать условие (14).

Заключение

Показано, что применение длинноволновых моделей для описания волн цунами предполагает сглаживание или фильтрацию вводимого в модель возмущения для исключения из спектра волн короткопериодных компонент, которые не могут адекватно воспроизводиться без учета фазовой дисперсии. Получена формула для расчета минимального периода волн, воспроизводимых длинноволновой моделью. Показано, что минимальный период определяется размером расчетной области и средней глубиной океана в этой области, причем зависимость от указанных параметров является весьма слабой.

Для задачи численного моделирования цунами в рамках теории длинных волн предложены принципы адаптации неструктурированной сетки к распределению глубин океана. Предложены явные формулы для вычисления шага сетки по пространству.

Установлено, что неструктурированные сетки, по сравнению со структурированными, обеспечивают существенное (в тысячи раз) снижение вычислительной трудоемкости задачи по численному воспроизведению волн цунами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *М.А. Носов.* Волны цунами сейсмического происхождения: современное состояние пробле-мы // Известия РАН. Физика атмосферы и океана, 2014, т.50, №5, с.540-551;
англ.пер.: *M.A. Nosov.* Tsunami waves of seismic origin: The modern state of knowledge // Izvestiya - Atmospheric and Oceanic Physics, 2014, v.50, №5, p.474-484.
2. *B.W. Levin, M.A. Nosov.* Physics of Tsunamis, Second Edition. – Cham-Heidelberg-New York-Dordrecht-London: Springer, 2016, 388 p.
3. *F. Imamura, A.C. Yalciner, G. Ozyurt.* Tsunami Modelling Manual (TUNAMI model). Revision due on APRIL 2006, 58 p.
4. *V.V. Titov, F.I. Gonzalez, H.O. Mofjeld, A.J. Venturato.* NOAA Time Seattle Tsunami Mapping Project: Procedures, Data Sources, and Products. NOAA Technical Memorandum OAR PMEL-124, 2003, 21 p.
5. *P.L.F. Liu, S.B. Woo, Y.S. Cho.* Computer programs for tsunami propagation and inundation. Tech. rep. Cornell University, 1998, 104 p.
6. *A.I. Zaytsev, A.G. Chernov, A.C. Yalciner, E.N. Pelinovsky, A.A. Kurkin.* MANUAL Tsunami Simulation / Visualization Code NAMI DANCE versions 4.9, 2010.
7. *Yu.I. Shokin, V.V. Babailov, S.A. Beisel, L.B. Chubarov, S.V. Eletsky, Z.I. Fedotova, V.K. Gusya-kov.* Mathematical Modeling in application to regional tsunami warning systems operations // Computational Science and High Performance Computing III, Springer. Notes on numerical fluid mechanics and multidisciplinary design, 2008, v.101, p.52-68.
8. *S. Harig, C. Chaeroni, W.S. Pranowo, J. Behrens.* Tsunami simulations on several scales: Compa-rison of approaches with unstructured meshes and nested grids // Ocean Dynamics, 2008, v.58, p.429-440.
9. *Y. Yamazaki, Z. Kowalik, K.F. Cheung.* Depth-integrated, non-hydrostatic model for wave breaking and run-up // Int. J. Numer. Meth. Fluids, 2009, v.61, p.473-497.
10. *R.J. LeVeque, D.L. George, M.J. Berger.* Tsunami modelling with adaptively refined finite volume methods // Acta Numerica, 2011, v.20, p.211-289.
11. *I.V. Fine, A.B. Rabinovich, B.D. Bornhold, R.E. Thomson, E.A. Kulikov.* The Grand Banks land-slide-generated tsunami of November 18, 1929: Preliminary analysis and numerical modeling // Marine Geology, 2005, v.215, p.45-57.
12. *Y. Fujii, K. Satake.* Tsunami Source of the 2004 Sumatra-Andaman Earthquake Inferred from Tide Gauge and Satellite Data // Bulletin of the Seismological Society of America, 2007, v.97, №1A, p.S192-S207.
13. *Z. Kowalik, W. Knight, T. Logan, P. Whitmore.* The tsunami of 26 December, 2004: numerical modeling and energy considerations // Pure Appl. Geophys., 2007, v.164, p.379-393.
14. *D.J. Nicolsky, E.N. Suleimani, R.A. Hansen.* Validation and Verification of a Numerical Model for Tsunami Propagation and Runup // Pure Appl. Geophys., 2011, v.168, №6-7, p.1199-1222.
15. *M.A. Nosov, A.V. Moshenceva, S.V. Kolesov.* Horizontal motions of water in the vicinity of a tsuna-mi source // Pure Appl. Geophys., 2013, v.170, №9-10, p.1647-1660.
16. *О.В. Булатов, Т.Г. Елизарова.* Регуляризованные уравнения мелкой воды для численного моделирования течений с подвижной береговой линией // Журнал вычислительной матема-тики и математической физики, 2016, т.56, №4, с.665-684;
англ.пер.: *O.V. Bulatov, T.G. Elizarova.* Regularized shallow water equations for numerical simulation of flows with a moving shoreline // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2016, v.56, №4, p.661-679.
17. *S. Watada, S. Kusumoto, K. Satake.* Traveltime delay and initial phase reversal of distant tsunamis coupled with the self-gravitating elastic earth // J. Geophys. Res. Solid Earth, 2014, v.119, p.4287-4310.
18. *Е.А. Куликов, Ф.И. Гонзалес.* Восстановление формы сигнала цунами в источнике по измерениям колебаний уровня океана удаленным датчиком гидростатического давления // ДАН, 1995, т.344, №6, с.814-818;
англ.пер.: *Ye.A. Kulikov, F.I. González.* Recovery of the shape of a tsunami signal at the source from measurements of oscillations in the ocean level by a remote hydrostatic pressure sensor // Trans. (Dok-

lady) Russian Acad. Sci., Earth Sci. Sect., 1995, v.345A, p.585-591.
19. *T. Ohmachi, H. Tsukiyama, H. Matsumoto.* Simulation of tsunami induced by dynamic displacement of seabed due to seismic faulting // Bulletin of the Seismological Society of America, 2001, v.91, №6, p.1898-1909.
20. *M.A. Nosov, S.V. Kolesov.* Elastic oscillations of water column in the 2003 Tokachi-oki tsunami source: in-situ measurements and 3-D numerical modelling // Nat. Hazards Earth Syst. Sci., 2007, v.7, p.243-249.
21. *B.H. Choi, E. Pelinovsky, D.C. Kim, I. Didenkulova, S.B. Woo.* Two- and three-dimensional computation of solitary wave runup on non-plane beach // Nonlin. Processes Geophys., 2008, v.15, p.489-502.
22. *A. Bolshakova, S. Inoue, S. Kolesov, H. Matsumoto, M. Nosov, T. Ohmachi.* Hydroacoustic effects in the 2003 Tokachi-oki tsunami source // Russ. J. Earth. Sci., 2011, v.12, ES2005, doi:10.2205/2011ES000509.
23. *G. Ma, F. Shi, J.T. Kirby.* Shock-capturing non-hydrostatic model for fully dispersive surface wave processes // Ocean Modeling, 2012, v.43-44, p.22-35.
24. *T. Maeda, T. Furumura.* FDM simulation of seismic waves, ocean acoustic waves, and tsunamis based on tsunami-coupled equations of motion // Pure Appl. Geophys., 2013, v.170, №1-2, p.109-127.
25. *F. Løvholt, G. Pedersen, S. Glimsdal.* Coupling of Dispersive Tsunami Propagation and Shallow Water Coastal Response // The Open Oceanography Journal, 2010, v.4, p.71-82.
26. *F. Shi, J.T. Kirby, J.C. Harris, J.D. Geiman, S.T. Grilli.* A high-order adaptive time-stepping TVD solver for Boussinesq modeling of breaking waves and coastal inundation // Ocean Modelling, 2012, v.43-44, p.36–51.
27. *A. Piatanesi, S. Tinti, E. Bortolucci.* Finite-element simulations of the 28 December 1908 Messina straits (Southern Italy) tsunami // Phys. Chem. Earth (A), 1999, v.24, p.145-150.
28. *R.A. Walters.* Design considerations for a finite element coastal ocean model // Ocean Modelling, 2006, v.15, p.90-100.
29. *Y.J. Zhang, A.M. Baptista.* An Efficient and Robust Tsunami Model on Unstructured Grids. Part I: Inundation Benchmarks // Pure Appl. Geophys., 2008, v.165, p.2229-2248.
30. *A. Androsov, J. Behrens, S. Danilov.* Tsunami Modelling with Unstructured Grids // Interaction between Tides and Tsunami Waves. Computational Science and High Performance Computing IV Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design, 2011, v.115, p.191-206.
31. *S. Popinet.* Adaptive modelling of long-distance wave propagation and fine-scale flooding during the Tohoku tsunami // Nat. Hazards Earth Syst. Sci., 2012, v.12, p.1213-1227.
32. *Q. Liang, J. Hou, R. Amouzgar.* Simulation of Tsunami Propagation Using Adaptive Cartesian Grids // Coastal Engineering Journal, 2015, v.57, №4, 1550016.
33. *E.A. Kulikov, A.B. Rabinovich, R.E. Thomson, B.D. Bornhold.* The landslide tsunami of November 3, 1994. Skagway Harbor. Alaska // J. Geophys. Res., 1996, v.101, №C3, p.6609-6615.
34. *M.A. Nosov, S.V. Kolesov.* Optimal Initial Conditions for Simulation of Seismotectonic Tsunamis // Pure and Applied Geophysics, 2011, v.168, №6-7, p.1223-1237.
35. *И.В. Файн, Е.А. Куликов.* Расчет смещений поверхности океана в очаге цунами, вызываемых мгновенной вертикальной подвижкой дна при подводном землетрясении // Вычислительные технологии, 2011, т.16, №2, с.111-118.
I.V. Fine, E.A. Kulikov. Raschet smeshchenii poverkhnosty okeana v ochege tsunami, vyzyvaemykh mgnovennoi verticalnoi podvizhkoi dna pri podvodnom zemletriasenii // Vychislitelnye Tekhnologii, 2011, v.16, №2, p.111-118.
36. *М.А. Носов, К.А. Семенцов.* Расчет начального возвышения в очаге цунами с использованием аналитических решений // Изв. РАН, Физика атмосферы и океана, 2014, т.50, №5, с.612-620.
англ.пер.: *M.A. Nosov, K.A. Sementsov.* Calculation of the initial elevation at the tsunami source using analytical solutions // Izvestiya - Atmospheric and Oceanic Phys., 2014, v.50, №5, p.539-546.
37. *H. Lamb.* Hydrodynamics. – Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1993, 764 p.

Поступила в редакцию 14.11.16