Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, Локальные оценки градиентов решений простейшей регуляризации некоторого класса неравномерно эллиптических уравнений, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 1994, том 213, 75–92

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.175
7 февраля 2025 г., 08:22:45

О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева

ЛОКАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ ГРАДИЕНТОВ РЕШЕНИЙ ПРОСТЕЙШЕЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ НЕКОТОРОГО КЛАССА НЕРАВНОМЕРНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Посвящается юбилею
Всеволода Алексеевича Солонникова

Введение

Основная цель работы — получить не зависимую от ε оценку $\max\limits_{\Omega'}|u^\varepsilon_x(x)| \leqslant \Phi_1(\max\limits_{\Omega}|u^\varepsilon(x)|); \operatorname{dist}^{-1}(\Omega', \partial\Omega))$, $\Omega' \subset\subset \Omega$, для классических решений u^ε уравнений

$$-\frac{d}{dx_i}F^\varepsilon_i(u_x) + a(x,u,u_x) = 0, \quad \varepsilon \in (0,1], x \in \Omega, \tag{1}$$

где Ω есть область в $\mathbb{R}^n$, $u_x = \operatorname{grad} u$,

$$F^\varepsilon_i(p) = \frac{\partial}{\partial p_i}(\sqrt{1+|p|^2} + \frac{\varepsilon}{2}|p|^2) = \frac{p_i}{\sqrt{1+p^2}} + \varepsilon p_i,\ p = (p_1, \dots, p_n),$$

а $a(x,u,p)$ подчиняется некоторым условиям, формулируемым ниже. В частности, в качестве a можно взять любую недифференцируемую функцию, подчиняющуюся лишь условию: $|a(x,u,p)| \leqslant \frac{\mu_1}{\sqrt{1+p^2}}$. Именно с таким a пришлось иметь дело при исследовании нестационарных уравнений $-\frac{d}{dx_i}F^\varepsilon_i(u_x) + \frac{u_t}{\sqrt{1+u_x^2}} = 0$ (см. [1]). Для них была получена оценка $\max\limits_{\Omega\times(0,T)}|u_t|$, и, тем самым, задача о локальной оценке $|u^\varepsilon_x|$ была сведена к задаче о локальной оценке $\max\limits_{x\in\Omega'}|u_x(x,t)|$ для решений эллиптических уравнений вида (1) с $a \equiv \frac{u_t}{\sqrt{1+u_x^2}}$, удовлетворяющим условию $|a(x,u,p,t)| \leqslant \frac{\mu_1}{\sqrt{1+p^2}}$.

Рассматриваемому здесь вопросу получения равномерной по $\varepsilon \in (0,1]$ локальной оценки $\max\limits_{\Omega'}|u^\varepsilon_x|$ для решений уравнений вида (1) с дифференцируемой функцией a посвящена работа Темама [2]. Она во многом связана с работой [3]. Предлагаемый здесь вывод оценки $\max_{\Omega'}|u^\varepsilon_x|$ также опирается на работу [3], но нам он кажется проще, чем данный в [2]; к тому же он охватывает и случай недифференцируемых функций a.

Заметим, что в [3] была допущена оплошность — не оговорено явно условие симметрии

$$a_{ij}(x,u,p) \equiv \frac{\partial a_i(x,u,p)}{\partial p_j} = \frac{\partial a_j(x,u,p)}{\partial p_i} = a_{ji}(x,u,p). \tag{2}$$

В данном случае оно выполнено:

$$a_i(x,u,p) = F^\varepsilon_i(p) = \frac{\partial}{\partial p_i}F^\varepsilon(p);\ F^\varepsilon(p) = \sqrt{1+p^2} + \varepsilon p^2,$$

а $a_{ij}(x,u,p) = \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j}F^\varepsilon(p)$.

Во всей работе для векторов $p, q \in \mathbb{R}^n$ через (p,q) обозначается их евклидово скалярное произведение, $p^2 = |p|^2 = (p,p)$ и, соответственно, $u_x^2 = (u_x, u_x)$.

Через μ и μ_k обозначаются положительные постоянные.

По дважды повторяющимся индексам подразумевается суммирование от 1 до n.

§ 1. Предварительные оценки

Докажем справедливость следующего факта

Лемма 1. *Если для решений u^ε уравнения (1) выполнено условие*

$$|a(x, u^\varepsilon(x), u^\varepsilon_x(x))| \leqslant \mu, \quad x \in \Omega, \tag{1.1}$$

то справедливы оценки

$$\max_{x \in B_{R/2}(x^0)} |u^\varepsilon_x(x)| \leqslant \varepsilon^{-1}\Phi_2(R^{-1}, \mu, \|u^\varepsilon\|_{2,B_R(x^0)}) \tag{1.2}$$

в любом шаре $B_R(x^0)$ с центром в точке $x^0 \in \Omega$ и радиусом $R \leqslant \min[1; \frac{1}{2}dist\{x^0, \partial\Omega\}]$.

Во всей статье мажоранты Φ_k суть непрерывные, монотонно растущие функции указываемых аргументов.

Символ $\|u\|_{q,\Omega}$ есть стандартная норма в пространстве Лебега $L_q(\Omega)$.

Будем считать, что $u^\varepsilon \in C^2(\Omega)$ (хотя фактически используется меньшая информация о u^ε), и условимся во всем дальнейшем тексте (кроме формулировок лемм и теорем) вместо u^ε писать u.

Введем, как и в [3], по исследуемому решению $u(x)$ дифференциальные операторы δ_i:

$$\delta_i\varphi = \varphi_i - \frac{u_i u_k}{1+u_x^2}\varphi_k, \quad i=\overline{1,n},\ \delta_{n+1}\varphi = \frac{u_k\varphi_k}{1+u_x^2}, \tag{1.3}$$

где здесь и далее $u_i \equiv u_{x_i}$, $\varphi_i \equiv \varphi_{x_i}$, а φ – произвольная функция из $C^2(\Omega)$. Зависимость δ_i от u отмечать явно не будем, ибо решение u фиксировано на протяжении всей статьи.

Обозначаем

$$|\delta\varphi| = [\sum_{i=1}^{n+1}(\delta_i\varphi)^2]^{1/2}.$$

Введем также функции

$$F(p) = \sqrt{1+p^2}; \quad F_i(p) = \frac{\partial F(p)}{\partial p_i};$$

$$F_{ij}(p) = \frac{\partial^2 F(p)}{\partial p_i \partial p_j} = \frac{1}{F(p)}\left(\delta_i^j - \frac{p_i p_j}{F^2(p)}\right), \quad i,j=1,\dots,n; \tag{1.4$_1$}$$

при $p = u_x$ будем их обозначать просто F, F_i и F_{ij} соответственно, т.е.

$$F = F(u_x), \quad F_i = F_i(u_x), \quad F_{ij} = F_{ij}(u_x). \tag{1.4$_2$}$$

Благодаря этому (1.3) можно записать так:

$$\delta_i\varphi = FF_{ij}\varphi_j, \quad \delta_{n+1}\varphi = F^{-2}(u_x,\varphi_x). \tag{1.5}$$

Кроме этого нам понадобятся равенства

$$\begin{gathered}\varphi_x^2 = |\delta\varphi|^2 + F^{-2}(u_x,\varphi_x)^2,\\ F_{ij}\varphi_i\varphi_j = F^{-1}\varphi_i\delta_i\varphi = \\ = F^{-1}[\varphi_x^2 - F^{-2}(u_x,\varphi_x)^2] = F^{-1}|\delta\varphi|^2\end{gathered} \tag{1.6}$$

и неравенства

$$|\delta\varphi|^2 \leqslant \varphi_x^2 \leqslant |\delta\varphi|^2 F^2 \tag{1.7}$$

Матрица $(F_{ij}(u_x(x)))$, $i,j=\overline{1,n}$, в любой точке $x\in\Omega$ симметрична и положительно определена. Ее квадратичная форма при $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n)$ имеет вид

$$F_{ij}\xi_i\xi_j = F^{-1}\left[\xi^2 - \left(\frac{u_x}{F},\xi\right)^2\right]. \tag{1.8}$$

Для ξ, направленных вдоль вектора u_x, $F_{ij}\xi_i\xi_j = F^{-1}(\xi^2 - F^{-2}u_x^2) = F^{-3}\xi^2$, а для любого ξ, ортогонального вектору u_x, имеем $F_{ij}\xi_i\xi_j =$

$F^{-1}\xi^2$. Ввиду этого матрица (F_{ij}) ортогональным преобразованием может быть приведена к диагональному виду с собственными значениями $\lambda_i = F^{-1}$, $i = \overline{1,(n-1)}$, $\lambda_n = F^{-3}$. В этом представлении

$$\Sigma_1(\varphi) \equiv F_{kl}\varphi_{kl} = F^{-1}\sum_{k=1}^{n-1}\varphi_{kk} + F^{-3}\varphi_{nn}, \ \varphi_{kl} \equiv \varphi_{x_k x_l},$$

а

$$\Sigma_2(\varphi) \equiv F_{ij}F_{kl}\varphi_{ik}\varphi_{jl} = \sum_{i,k=1}^{n}\lambda_i\lambda_k\varphi_{ik}^2 =$$
$$= F^{-2}\sum_{i,k=1}^{n-1}\varphi_{ik}^2 + 2F^{-4}\sum_{i=1}^{n-1}\varphi_{in}^2 + F^{-6}\varphi_{nn}^2,$$

и потому

$$|\Sigma_1(\varphi)| \leqslant \sqrt{n\Sigma_2(\varphi)} \quad \text{для} \quad \forall\varphi \in C^2(\Omega). \tag{1.9}$$

Для F^ε будем использовать обозначения, аналогичные (1.4_1), в частности

$$F^\varepsilon = F^\varepsilon(u_x) = F(u_x) + \frac{\varepsilon}{2}u_x^2, \quad F_i^\varepsilon = F_i + \varepsilon u_i,$$
$$F_{ij}^\varepsilon = F_{ij} + \varepsilon\delta_i^j. \tag{1.10}$$

В § 2 нам потребуется еще неравенство

$$|\delta(u_x^2)| \leqslant 2|u_x||\delta u_x|, \quad \text{где} \quad |\delta u_x|^2 \equiv \sum_{i=1}^{n}|\delta u_i|^2. \tag{1.11}$$

Следуя [3], вычислим от обеих частей уравнения (1) оператор $\sum\limits_{l=1}^{n} u_l \frac{d}{dx_l}$ и результат запишем как нижеследующее уравнение для функции

$$v(x) \equiv u_x^2(x).$$

А именно,

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(F_{ij}^\varepsilon v_j) + F_{ij}u_{li}u_{lj} + \varepsilon u_{xx}^2 = -u_l\frac{da}{dx_l} \equiv A. \tag{1.12}$$

Введем еще одну функцию переменных x:

$$\omega(x) \equiv \sqrt{1+v(x)} = \sqrt{1+u_x^2(x)}. \tag{1.13}$$

Для ω из (1.12) вытекает уравнение

$$-\frac{d}{dx_i}(F^\varepsilon_{ij}\omega_j) + \Lambda = -F_l\frac{da}{dx_l}, \tag{1.14}$$

где

$$\Lambda = F^\varepsilon_{ij}F_{kl}u_{ki}u_{kj}, \tag{1.15}$$

ибо верны следующие равенства:

$$v_j = 2\omega\omega_j, \quad F_{ij}(u_{li}u_{lj} - \omega_i\omega_j) + \varepsilon(u^2_{xx} - \omega^2_x) =$$
$$= F_{ij}\left(u_{li}u_{lj} - \frac{u_k u_{ki}}{\omega}\frac{u_l u_{lj}}{\omega}\right) + \varepsilon\left(u^2_{xx} - \frac{u_k u_{ki}}{\omega}\frac{u_l u_{li}}{\omega}\right) =$$
$$= \omega[F_{ij}F_{kl}u_{ki}u_{lj} + \varepsilon F_{kl}u_{ki}u_{li}] = \omega\Lambda,$$

где $u^2_{xx} \equiv \sum\limits_{l=1}^n u^2_{kl}$.

Стандартно выводится оценка

$$\int\limits_\Omega (\omega + \varepsilon\omega^2)\zeta^2\,dx \leqslant \Phi_3(\max(\zeta^2 + \zeta^2_x))\|u\|^2_{2,\Omega}. \tag{1.16}$$

Здесь и далее ζ есть "срезка" – гладкая функция, равная нулю вблизи $\partial\Omega$ со значениями из отрезка $[0,1]$. Для доказательства (1.16) умножим (1) на $u\zeta^2$, проинтегрируем по Ω и результат преобразуем с помощью интегрирования по частям к виду

$$\int\limits_\Omega F^\varepsilon_i u_i\zeta^2\,dx = -\int\limits_\Omega F^\varepsilon_i u 2\zeta\zeta_i\,dx - \int\limits_\Omega a u\zeta^2\,dx.$$

Отсюда благодаря условию (1.1) можем сделать следующие выводы, используя неравенство Коши:

$$\int_\Omega (\omega^{-1}u_x^2+\varepsilon u_x^2)\zeta^2\,dx \leqslant$$
$$\leqslant 2\Big|\int_\Omega (\omega^{-1}u_i+\varepsilon u_i)\zeta_i u\zeta\,dx\Big| + \mu\int_\Omega |u|\zeta^2\,dx \leqslant$$
$$\leqslant 2\Big(\int_\Omega \omega^{-1}u_x^2\zeta^2\,dx \int_\Omega \omega^{-1}u^2\zeta_x^2\,dx\Big)^{1/2}+$$
$$+2\varepsilon\Big(\int_\Omega u_x^2\zeta^2\,dx\int_\Omega u^2\zeta_x^2\,dx\Big)^{1/2}+\mu\|u\zeta^2\|_{1,\Omega}\leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\int_\Omega(\omega^{-1}u_x^2+\varepsilon u_x^2)\zeta^2\,dx+$$
$$+2\int_\Omega(\omega^{-1}u^2\zeta^2+\varepsilon u^2\zeta_x^2)\,dx+\mu\|u\zeta^2\|_{1,\Omega}.$$

После приведенния подобных членов и умножения на 2 получим

$$\int_\Omega(\omega^{-1}u_x^2+\varepsilon u_x^2)\zeta^2\,dx\leqslant$$
$$\leqslant 4\int u^2(\zeta^2+\zeta_x^2)\,dx+2\mu\|u\zeta^2\|_{1,\Omega}, \tag{1.17}$$

помня, что $\varepsilon\in(0,1]$. Из (1.17) следует (1.16).

Докажем теперь, что функция ω принадлежит классу $\mathfrak{A}_m(B_R,\gamma,l,\alpha,\delta,\hat{k})$ со следующими значениями параметров: $m=\alpha=l=2$, $\delta=2/n$, $\hat{k}=\varepsilon^{-1}$ и с B_R, лежащим в Ω и отстоящим от $\partial\Omega$ на расстояние, не меньше, чем $2R$. Число γ будет подсчитано ниже (по поводу классов $\mathfrak{A}_m$ см. § 5, гл.II, [4], стр. 108.) Для этого достаточно доказать справедливость неравенств

$$\int_{A_k}\omega_x^2\zeta^2\,dx\leqslant$$
$$\leqslant\gamma\Big[\int_{A_k}(\omega-k)^2(\zeta_x^2+\zeta^2)\,dx+k^2\int_{A_k}\zeta^2\,dx\Big] \tag{1.18}$$

для любых $k\geqslant\hat{k}=\varepsilon^{-1}$ (напомним, что $\varepsilon^{-1}\geqslant 1$) и любых $\zeta\in \overset{\circ}{C}{}^1_0(\Omega)$ (см. Замечание 5.4, [4], стр.112). В них $A_k=\{x\in\Omega\,\|\omega(x)>k\}$, а γ не зависит от ε.

Займемся доказательством (1.18). Для этого умножим уравнение (1.14) на $(\omega - k)_+\zeta^2$ и результат проинтегрируем по Ω. После интегрирования по частям в первом и последнем членах получим

$$\int\limits_{A_k} F^\varepsilon_{ij}\omega_j\omega_i\zeta^2\,dx + \int\limits_{A_k} \Lambda(\omega-k)\zeta^2\,dx =$$
$$= -\int\limits_{A_k} F^\varepsilon_{ij}\omega_j(\omega-k)\cdot 2\zeta\zeta_i\,dx + \int\limits_{A_k} a\frac{d}{dx_l}[F_l(\omega-k)\zeta^2]\,dx. \tag{1.19}$$

Используя соотношения (1.7)–(1.10), сделаем из (1.19) такие заключения:

$$\int\limits_{A_k} F^\varepsilon_{ij}\omega_i\omega_j\zeta^2\,dx + \int\limits_{A_k} \Lambda(\omega-k)\zeta^2\,dx =$$
$$= \int\limits_{A_k}\left[\frac{|\delta\omega|^2}{\omega} + \varepsilon\omega_x^2\right]\zeta^2\,dx + \int\limits_{A_k} \Lambda(\omega-k)\zeta^2\,dx \leqslant$$

$$\leqslant 2\left(\int\limits_{A_k} F^\varepsilon_{ij}\omega_i\omega_j\zeta^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int\limits_{A_k} F^\varepsilon_{ij}\zeta_i\zeta_j(\omega-k)^2\,dx\right)^{1/2} +$$
$$+\mu\int\limits_{A_k} |F_{lk}u_{lk}(\omega-k)\zeta^2 + F_l\omega_l\zeta^2 + 2F(\omega-k)\zeta\zeta_l|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4}\int\limits_{A_k} F^\varepsilon_{ij}\omega_i\omega_j\zeta^2\,dx + 4\int\limits_{A_k}\left(\frac{|\delta\zeta|^2}{\omega} + \varepsilon\zeta_x^2\right)(\omega-k)^2\,dx +$$
$$+\mu\sqrt{n}\int\limits_{A_k}\sqrt{\Lambda}(\omega-k)\zeta^2\,dx + \mu\int(|\omega_x|\zeta^2 + 2(\omega-k)\zeta|\zeta_x|)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4}\int\limits_{A_k} F^\varepsilon_{ij}\omega_i\omega_j\zeta^2\,dx + 4\int\limits_{A_k}\left(\frac{|\delta\zeta|^2}{\omega} + \varepsilon\zeta_x^2\right)(\omega-k)^2\,dx +$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{A_k}\Lambda(\omega-k)\zeta^2\,dx + \frac{\mu^2 n}{2}\int(\omega-k)\zeta^2 + \frac{1}{4}\int\limits_{A_k}\varepsilon\omega_x^2\zeta^2 +$$

$$+\mu^2\int \varepsilon^{-1}\zeta^2\,dx+\mu\varepsilon\int(\omega-k)^2\zeta_x^2+\frac{\mu}{\varepsilon}\int\zeta^2\,dx.^*$$

Приведем подобные члены и результат умножим на 2. Это даст

$$\int\limits_{A_k}\left[\frac{3}{2}\frac{|\delta\omega|^2}{\omega}+\varepsilon\omega_x^2\right]\zeta^2\,dx+\int\limits_{A_k}\Lambda(\omega-k)\zeta^2\,dx\leqslant$$
$$\leqslant 8\int\limits_{A_k}\left(\frac{|\delta\zeta|^2}{\omega}+\varepsilon\zeta_x^2\right)(\omega-k)^2\,dx+\mu^2 n\int\limits_{A_k}(\omega-k)\zeta^2+\frac{2\mu^2}{\varepsilon}\int\limits_{A_k}\zeta^2\,dx+$$
$$+2\mu\varepsilon\int\limits_{A_k}(\omega-k)^2\zeta_x^2+\frac{2\mu}{\varepsilon}\int\limits_{A_k}\zeta^2\,dx\leqslant$$
$$\leqslant 8\int\limits_{A_k}\zeta_x^2\Big(\frac{1}{\omega}+\varepsilon\Big)\cdot(\omega-k)^2\,dx+\frac{\mu^2 n}{2}\left[\int\limits_{A_k}\varepsilon(\omega-k)^2\zeta^2\,dx+\int\limits_{A_k}\frac{1}{\varepsilon}\zeta^2\,dx\right]+$$
$$+\frac{2\mu^2}{\varepsilon}\int\limits_{A_k}\zeta^2\,dx+2\mu\varepsilon\int(\omega-k)^2\zeta_x^2+\frac{2\mu}{\varepsilon}\int\limits_{A_k}\zeta^2\,dx. \qquad (1.20)$$

Выбросим из левой части все члены кроме $\int\limits_{A_k}\varepsilon\omega_x^2\zeta^2\,dx$ и результат поделим на ε. Это приведет к неравенству

$$\int\limits_{A_k}\omega_x^2\zeta^2\,dx\leqslant(16+2\mu)\int\limits_{A_k}(\omega-k)^2\zeta_x^2\,dx+$$
$$+\frac{\mu^2 n}{2}\int\limits_{A_k}(\omega-k)^2\zeta^2\,dx+2\mu(1+\mu)\varepsilon^{-2}\int\limits_{A_k}\zeta^2\,dx, \qquad (1.21)$$

из которого следует (1.18) с $k\geqslant\hat{k}=\varepsilon^{-1}$ и $\gamma=\max\{(16+2\mu);\,(1+\mu)2\mu\}$. Как сказано выше, благодаря (1.18), а также принадлежности ω к $W_2^1(B_R)$, ω принадлежит классу $\mathfrak{A}_2(B_R,\gamma,2,2,\frac{2}{n},\varepsilon^{-1})$, и потому для ω верна теорема 5.3, § 5, гл. II, [4], стр. 108, гарантирующая оценку $\max\limits_{R/2}\omega(x)\leqslant c$. Как сказано в замечании 5.2 того же

---

*Как видно из дальнейших выкладок для доказательства неравенства (1.18) можно было бы выбрать параметр α при использовании неравенства Коши $2ab\leqslant\alpha a^2+\alpha^{-1}b^2$ иначе и получить значение γ в (1.18) меньшее, чем указано далее в (1.21). Но мы предпочли сохранить (на всякий случай) в левой части (1.20) все члены, имевшиеся в левой части (1.19). В данной работе они нам не нужны.

параграфа, (стр. 111) мажоранта c является линейной функцией $\hat{k} = \varepsilon^{-1}$ и $a_2 \equiv R^{-n/2}\|(\omega - \hat{k})_+\|_{2,B_R}$. Но благодаря (1.17)

$$a_2^2 \leqslant R^{-n}\|\omega\|_{2,B_R}^2 = R^{-n}\int\limits_{B_R}(1+u_x^2)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \varkappa_n + R^{-1}\varepsilon^{-1}\left[4\int\limits_{B_{2R}} u^2(1+\frac{1}{R^2})\,dx + 2\mu\int\limits_{B_{2R}}|u|\,dx\right] \leqslant$$

$$\leqslant \Phi_4(R^{-1})\varepsilon^{-1}(1+\|u\|_{2,2R}^2)$$

при $\varepsilon \leqslant 1$, ибо по условию шар $B_{2R} \subset \Omega$ и мы можем взять в качестве ζ функцию, равную 1 в B_R и нулю вне B_{2R}. Таким образом, при $\varepsilon \to \infty$ a_2 имеет порядок роста $\varepsilon^{-1/2} \leqslant \varepsilon^{-1}$. Поэтому указанное выше замечание 5.5 гарантирует наличие оценки (1.2).

§ 2. Доказательство основной теоремы

В данном параграфе мы докажем наличие для $\max\limits_{\Omega'}|u_x^\varepsilon|$ мажоранты, независящей от ε. При этом мы будем следовать части II работы [3], уделяя особое внимание членам, содержащим ε. Как и выше, мы исследуем фиксированное решение u^ε уравнения (1), обозначая его u.

Операторы δ_i, введенные в (1.3), определяются по этому решению.

Обозначим мажоранту для $\max\limits_{\Omega}|u(x)|$ буквой M.

Введем функцию

$$w = w(x) = \lg(1+v(x)) = \lg(1+u_x^2(x)) \tag{2.1}$$

и докажем для нее справедливость неравенств

$$\int\limits_{A_k}|\delta w|^2\zeta^2\,dH_n \leqslant$$

$$\leqslant \gamma_1\left[\int\limits_{A_k}(w-k)^2(|\zeta_x|^2+|\zeta|^2)\,dH_n + \int\limits_{A_k}\zeta^2\,dH_n\right], \tag{2.2}$$

напоминающих по форме неравенства (1.18). В (2.2) k есть произвольное число, $A_k = \{x \in \Omega \,|\, |w(x) > k\}$, $dH_n = \sqrt{1+u_x^2(x)}\,dx$, а ζ – произвольная срезка.

Для доказательства (2.2) наложим на a, кроме (1.1), дополнительные требования. А именно, пусть

$$a(x,u,p) = a'(x,u,p) + a''(x,u,p), \tag{2.3$_1$}$$

a'' дифференцируема и при $u = u^\varepsilon(x)$, $p = u^\varepsilon_x(x)$, $x \in \Omega$ выполняются условия

$$|a'(x,u,p)| \leqslant \mu_1(1+p^2)^{1/2}, \tag{2.3$_2$}$$

$$\left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial a''(x,u,p)}{\partial p_i}\right)^2\right]^{1/2} (1+p^2) \leqslant \mu_2, \tag{2.3$_3$}$$

$$-\frac{\partial a''(x,u,p)}{\partial u}p^2 - \frac{\partial a''(x,u,p)}{\partial x_l}p_l \leqslant \mu_3|p|. \tag{2.3$_4$}$$

В соответствие с этим член A в (1.12) запишем в виде

$$A = A' + A'', \quad A' = -u_l\frac{da'}{dx_l}, \quad A'' = -u_l\frac{da''}{dx_l}. \tag{2.4}$$

Легко убедиться, что благодаря (2.3$_k$) для A'' справедлива оценка

$$A'' \leqslant \mu_2|\delta u_x| + \mu_3|u_x|, \text{ где } \quad |\delta u_x| \equiv \left(\sum_{i=1}^n |\delta u_i|^2\right)^{1/2}. \tag{2.5}$$

При этом надо использовать неравенство

$$|\delta u_x| \leqslant |u_{xx}| \leqslant |\delta u_x|\omega. \tag{2.6}$$

Умножим уравнение (1.12) на функцию $(w-k)_+\zeta^2$, результат проинтегрируем по Ω и преобразуем к виду

$$\begin{aligned}\int\limits_{A_k} [\tfrac{1}{2}F^\varepsilon_{ij}v_j\omega_i\zeta^2 + F_{ij}u_{li}u_{lj}(w-k)\zeta^2 + \varepsilon u^2_{xx}(w-k)\zeta^2]\,dx+ \\ + \int\limits_{A_k} F^\varepsilon_{ij}v_j(w-k)\zeta\zeta_i\,dx = \int\limits_{A_k} A(w-k)\zeta^2\,dx = \\ = \int\limits_{A_k} a'\frac{d}{dx_l}[u_l(w-k)\zeta^2]\,dx + \int\limits_{A_k} A''(w-k)\zeta^2\,dx.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Учтем следующие соотношения

$$\begin{aligned} w_j &= \frac{v_j}{1+v} = \frac{v_j}{\omega^2}, \\ F^\varepsilon_{ij}v_jw_i &= F^\varepsilon_{ij}w_iw_j\omega^2 = \frac{|\delta w|^2}{\omega} + \varepsilon w_x^2; \\ F_{ij}u_{li}u_{lj} &= \omega^{-1}|\delta u_x|^2. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Они, а также (2.6) и (1.7) позволяют из (2.7) сделать такие выводы:

$$\int_{A_k} \frac{1}{2} F^{\varepsilon}_{ij} w_i w_j \omega^2 \zeta^2 \, dx +$$

$$+ \int_{A_k} [F_{ij} u_{li} u_{lj} (w-k)\zeta^2 + \varepsilon u_{xx}(w-k)\zeta^2] \, dx \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\int_{A_k} F^{\varepsilon}_{ij} w_i w_j \omega^2 \zeta^2 \, dx \cdot \int_{A_k} F^{\varepsilon}_{ij} \zeta_i \zeta_j (w-k)\omega^2 \, dx \Big)^{1/2} +$$

$$+\mu_1 \int_{A_k} \omega^{-1} |\Delta u (w-k)\zeta^2 + u_l w_l \zeta^2 + 2u_l (w-k)\zeta\zeta_l| \, dx +$$

$$+ \int_{A_k} (\mu_2 |\delta u_x| + \mu_3 \omega)(w-k)\zeta^2 \, dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4} \int_{A_k} F^{\varepsilon}_{ij} w_i w_j \omega^2 \zeta^2 \, dx + \int_{A_k} |\delta\zeta|^2 (w-k)^2 \omega \, dx + j_1 +$$

$$+\mu_1 \int_{A_k} [\sqrt{n}\omega^{-1} |u_{xx}|(w-k)\zeta^2 + |w_x|\zeta^2 + 2(w-k)\zeta|\zeta_x|] \, dx +$$

$$+\frac{1}{2} \int_{A_k} \omega^{-1} |\delta u_x|^2 (w-k) \, dx + \frac{1}{2}\mu_2^2 \int_{A_k} (w-k)\omega\zeta^2 +$$

$$+\mu_3 \int_{A_k} (w-k)\omega\zeta^2 \, dx, \tag{2.9}$$

где $j_1 \equiv \int\limits_{A_k} \varepsilon (w-k)^2 \omega^2 \zeta_x^2 \, dx$.

Приведем в (2.9) подобные члены и результат умножим на 4. Это даст следующее:

$$
\begin{gathered}
\int\limits_{A_k} |\delta w|^2 \omega \zeta^2\, dx + \varepsilon \int\limits_{A_k} w_x^2 \omega^2 \zeta^2\, dx + 2 \int\limits_{A_k} \omega^{-1} |\delta u_x|^2 (w-k)\zeta^2\, dx + \\
+4 \int\limits_{A_k} \varepsilon u_{xx}^2 (w-k)\zeta^2\, dx \leqslant 4 \int\limits_{A_k} (w-k)^2 |\delta\zeta|^2 \omega\, dx + 4j_1 + \\
+ \int\limits_{A_k} \omega^{-1} |\delta u_x|^2 (w-k)\zeta^2\, dx + 4\mu_1^2 n \int\limits_{A_k} (w-k)\omega\zeta^2\, dx + \\
+4\mu_1 \int \left[|\delta w| \omega \zeta^2 + 2(w-k)\zeta |\delta\zeta| \omega \right] dx + (2\mu_2^2 + 4\mu_3) \int\limits_{A_k} (w-k)\omega\zeta^2\, dx \leqslant \\
\leqslant 4 \int\limits_{A_k} (w-k)^2 |\delta\zeta|^2 \omega\, dx + 4j_1 + \int\limits_{A_k} \omega^{-1} |\delta u_x|^2 (w-k)\zeta^2\, dx + \\
+2\mu_1^2 n \int\limits_{A_k} [(w-k)^2 + 1]\omega\zeta^2\, dx + \frac{1}{2} \int\limits_{A_k} |\delta w|^2 \omega \zeta^2\, dx + 2\mu_1^2 \int\limits_{A_k} \omega\zeta^2\, dx + \\
+4\mu_1 \int\limits_{A_k} [(w-k)^2 |\delta\zeta|^2 + \zeta^2] \omega\, dx + (\mu_2^2 + 2\mu_3) \cdot \int\limits_{A_k} [(w-k)^2 + 1]\omega\zeta^2\, dx.
\end{gathered}
$$

Приведем подобные члены в этом последнем неравенстве и результат умножим на 2. Это дает

$$
\begin{gathered}
\int\limits_{A_k} |\delta w|^2 \omega \zeta^2\, dx + 2\varepsilon \int\limits_{A_k} w_x^2 \omega^2 \zeta^2\, dx + 2 \int\limits_{A_k} \omega^{-1} |\delta u_x|^2 (w-k)\zeta^2\, dx + \\
+8 \int\limits_{A_k} \varepsilon u_{xx}^2 (w-k)\zeta^2\, dx \leqslant 8(1+\mu_1) \int\limits_{A_k} (w-k)^2 |\delta\zeta|^2 \omega\, dx + \\
+2(2\mu_1^2 n + \mu_2^2 + 2\mu_3) \int\limits_{A_k} (w-k)^2 \omega\zeta^2\, dx + \\
+2(2\mu_1^2 n + 8\mu_1^2 + 4\mu_1 + \mu_2^2 + 2\mu_3) \int\limits_{A_k} \omega\zeta^2\, dx + 8j_1. \qquad (2.12)
\end{gathered}
$$

Для оценки j_1 используем (1.2). Для этого будем считать, что

$$
\operatorname{supp} \zeta \subset K_{R/2}. \qquad (2.13)
$$

Тогда

$$
j_1 \leqslant (1 + \Phi_1) \int\limits_{A_k} (w-k)^2 \zeta_x^2 \omega\, dx. \qquad (2.14)
$$

Подставляя эту оценку в (2.12) и отбрасывая из левой части (2.12) ненужные нам сейчас члены, получим неравенство (2.2) с

$$\gamma_1 = \max\{8(2 + \mu_1 + \Phi_1);\ 2[2(n+4)\mu_1^2 + 4\mu_1 + \mu_2^2 + 2\mu_3\}.$$

Дополнительно к (2.2) нам нужна оценка

$$\int\limits_{\Omega'} w^2\, dH_n \leqslant \Phi_5(M; \operatorname{dist}^{-1}(\Omega', \partial\Omega)) \tag{2.16}$$

с какой-нибудь непрерывной функцией Φ_5. Для этого умножим уравнение (1.12) на ζ^2, проинтегрируем по Ω и результат представим в виде

$$\begin{aligned} j_2 \equiv \int\limits_{\Omega} (F_{ij} u_{li} u_{lj} + \varepsilon u_{xx}^2)\zeta^2\, dx = \\ = -\int\limits_{\Omega} F_{ij}^{\varepsilon} v_j \zeta_i \zeta\, dx + \int\limits_{\Omega} (A' + A'')\zeta^2\, dx = \\ = -\int\limits_{\Omega} (F_{ij} + \varepsilon\delta_i^j) v_j \zeta_i \zeta\, dx + \int\limits_{\Omega} a' \frac{d}{dx_l}(u_l \zeta^2)\, dx + \int\limits_{\Omega} A''\zeta^2\, dx. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Отсюда, благодаря (1.7) и (1.11), а также благодаря неравенствам (2.3) и (2.5), выведем следующие неравенства:

$$
\begin{gathered}
j_2 = \int_\Omega (\omega^{-1}|\delta u_x|^2 + \varepsilon u_{xx}^2)\zeta^2\,dx \leqslant \\
\leqslant \int_\Omega \left[(F_{ij}v_iv_j)^{1/2}(F_{ij}\zeta_i\zeta_j)^{1/2} + \varepsilon|v_x||\zeta_x|\right]\zeta\,dx + \\
+\mu_1 \int_\Omega \omega^{-1}|\Delta u\zeta^2 + 2u_l\zeta\zeta_l|\,dx + \int_\Omega (\mu_2|\delta u_x| + \mu_3\omega)\zeta^2\,dx \leqslant \\
\leqslant \int_\Omega (\omega^{-1}|\delta v||\delta\zeta| + \varepsilon|v_x||\zeta_x|)\zeta\,dx + \int_\Omega (\sqrt{n}\mu_1|\delta u_x|\zeta + 2\mu_1\zeta|\zeta_x|)\,dx + \\
+ \int_\Omega (\mu_2|\delta u_x| + \mu_3\omega)\zeta^2\,dx \leqslant \\
\leqslant 2\int_\Omega (|\delta_x u||\delta\zeta| + \varepsilon|u_x||u_{xx}||\zeta_x|)\zeta\,dx + \\
+(\sqrt{n}\mu_1 + \mu_2)\left(\int_\Omega \omega^{-1}|\delta u_x|^2\zeta^2\,dx \int_\Omega \omega\zeta^2\,dx\right)^{1/2} + \\
+ \int_\Omega (2\mu_1\zeta|\zeta_x| + \mu_3\omega\zeta^2)\,dx \leqslant \\
\leqslant \frac{1}{4}\int_\Omega \omega^{-1}|\delta u_x|^2\zeta^2\,dx + 4\int_\Omega \omega|\delta\zeta|^2\,dx + \\
+\frac{1}{2}\varepsilon\int_\Omega u_{xx}^2\zeta^2\,dx + 2\varepsilon\int_\Omega u_x^2\zeta_x^2\,dx + \\
+\frac{1}{4}\int_\Omega \omega^{-1}|\delta u_x|^2\zeta^2\,dx + (\sqrt{n}\mu_1 + \mu_2)^2\int_\Omega \omega\zeta^2\,dx + \\
+ \int_\Omega (2\mu_1\zeta|\zeta_x| + \mu_3\omega\zeta^2)\,dx.
\end{gathered}
$$

Приведя подобные члены и умножив на 2, получим

$$
\begin{gathered}
j_2 \leqslant 8\int_\Omega \omega|\delta\zeta|^2\,dx + 4\varepsilon\int_\Omega u_x^2\zeta_x^2\,dx + \\
+2[(\sqrt{n}\mu_1 + \mu_2)^2 + \mu_3]\cdot\int_\Omega \omega\zeta^2\,dx + 4\mu_1\int_\Omega \zeta|\zeta_x|\,dx.
\end{gathered}
$$

Отсюда и из оценки (1.16), взятой при подходящем ζ, выводим оценку

$$\int_{\Omega'} (\omega^{-1}|\delta u_x|^2 + \varepsilon u_{xx}^2)\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \Phi_6(\|u\|_{2,\Omega}; \operatorname{dist}^{-1}(\Omega', \partial\Omega)). \tag{2.18}$$

Для доказательства же (2.16) умножим уравнение (1) на $uw^2\zeta^2$ и проинтегрируем по Ω. После интегрирования по частям получим:

$$\int_{\Omega} F_i^{\varepsilon}(u_i w^2\zeta^2 + 2uww_i\zeta^2 + 2uw^2\zeta\zeta_i)\,dx =$$
$$= -\int_{\Omega} auw^2\zeta^2\,dx.$$

Отсюда сделаем следующие заключения:

$$j_3 \equiv \int_{\Omega} (\omega^{-1}u_x^2 + \varepsilon u_x^2)w^2\zeta^2\,dx =$$
$$= -2\int_{\Omega} (\omega^{-1}u_i + \varepsilon u_i)uw\zeta(w_i\zeta + w\zeta_i)\,dx - \int_{\Omega} auw^2\zeta^2\,dx \leqslant$$
$$\leqslant 2M\left(\int_{\Omega} \omega^{-1}u_x^2 w^2\zeta^2\,dx\right)^{1/2} \cdot \left[\int_{\Omega} 2\omega^{-1}(w_x^2\zeta^2 + w^2\zeta_x^2)\,dx\right]^{1/2} +$$
$$+2\varepsilon M\left(\int_{\Omega} u_x^2 w^2\zeta^2\,dx\right)^{1/2} \left[\int_{\Omega} 2(w_x^2\zeta^2 + w^2\zeta_x^2)\,dx\right]^{1/2} +$$
$$+\mu M\int_{\Omega} w^2\zeta^2\,dx,$$

где M есть мажоранта для $\max\limits_{\Omega}|u(x)|$. Оценивая правую часть по неравенству Коши и приводя затем подобные члены, выведем такое неравенство

$$j_3 \leqslant 8M^2 \int\limits_\Omega \omega^{-1}(w_x^2\zeta^2 + w^2\zeta_x^2)\,dx +$$
$$8\varepsilon M^2 \int\limits_\Omega (w_x^2\zeta^2 + w\zeta_x^2)\,dx + 2\mu M \int\limits_\Omega w^2\zeta^2\,dx \leqslant$$
$$\leqslant 8M^2 \int\limits_\Omega \omega^{-1}(4|\delta u_x|^2\zeta^2 + w^2\zeta_x^2)\,dx +$$
$$+8\varepsilon M^2 \int\limits_\Omega (4u_{xx}^2\omega^{-2}\zeta^2 + w^2\zeta_x^2)\,dx + 2\mu M \int w^2\zeta^2\,dx. \qquad (2.19)$$

При этом мы использовали неравенство

$$w_x^2 = v_x^2\omega^{-4} \leqslant 4u_{xx}^2\omega^{-2} \leqslant 4|\delta u_x|^2. \qquad (2.20)$$

Мажоранта правой части неравенства (2.19) легко подсчитывается с помощью (2.18) и (1.16). Тем самым неравенство (2.16) можно считать доказанным.

Итак, мы доказали для w неравенства (2.2) и (2.16). Если бы $dH_n = dx$, то мы могли бы сказать, что w принадлежит классу $\mathfrak{A}_2$, а элементы $\mathfrak{A}_2$, как доказано в гл.II [4], являются ограниченными функциями. В данном случае $dH_n = \omega dx \neq dx$, но заключение об ограниченности функций, удовлетворяющих неравенствам (2.2) и (2.16), и наличии соответствующей мажоранты для их модуля остаются в силе и доказываются буквально так же, как Теорема 5.3, § 5, гл.II [4], если привлечь еще следующую теорему вложения:

Лемма 2. *Пусть u есть решение уравнеия (1), о котором известно, что*

$$\max_{B_R}|u(x)| \leqslant M \quad \text{и} \quad \varepsilon \max_{B_R}|u_x(x)| \leqslant m, \qquad (2.21)$$

и пусть операторы δ_i определены по этому u.

Тогда для любой $g \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(B_R)$ верно неравенство

$$\int\limits_{B_R} g^2(x)\sqrt{1+u_x^2(x)}\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \alpha\Big(\int\limits_{B_R}\sqrt{1+u_x^2(x)}\,dx\Big)^{2/n}\int\limits_{B_R}|\delta g(x)|^2\sqrt{1+u_x^2(x)}\,dx \qquad (2.22)$$

с постоянной α, определяемой числами M, m, n и μ из условия (1.1).

Неравенство (2.22) есть неравенство (2.39) из работы [3] с постоянной α вместо β_4. Как доказано в [3], β_4 определяется M, n и константами μ_k, входящими в неравенства

$$|a_i(x, u(x), u_x(x))| \leqslant \mu_0, \tag{2.23$_1$}$$

$$a_i(x, u(x), u_x(x))u_{x_i}(x) \geqslant \mu_1\sqrt{1+u_x^2(x)} - \mu_2, \tag{2.23$_2$}$$

$$|a_i(x, u(x), u_x(x))| \leqslant \mu_3, \tag{2.23$_3$}$$

в которых $u(x)$ есть решение уравнения

$$-\frac{d}{dx_i}a_i(x, u(x), u_x(x)) + a(x, u(x), u_x(x)) = 0. \tag{2.24}$$

В нашем случае $a_i(x,u,p) = \frac{p_i}{\sqrt{1+p^2}} + \varepsilon p_i = F_i^\varepsilon(p)$, а младшие члены в (2.24) и в (1) обозначены одним и тем же символом $a(x,u,p)$. Благодаря (2.21) и (1.1)

$$|a_i(x, u(x), u_x(x))| = |\frac{u_i(x)}{\sqrt{1+u_x^2(x)}} + \varepsilon u_i(x)| \leqslant 1 + m,$$

$$a_i(x, u(x), u_x(x))u_i(x) = \frac{u_x^2(x)}{\sqrt{1+u_x^2(x)}} + \varepsilon u_x(x) \geqslant \sqrt{1+u_x^2(x)} - 1,$$

$$|a(x, u(x), u_x(x))| \leqslant \mu.$$

Следовательно неравенства (2.23_k) выполняются со следующими значениями входящих в них параметров: $\mu_0 = 1+m$, $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $\mu_3 = \mu$, и потому константа α в (2.22) (равная константе β_4 из (2.39) [3]) определяется числами M, m, μ и n. Число же m в (2.21), как доказано в § 1, определяется константами, входящими в условия (1.1) и (2.3_k), $k = \overline{1,4}$, а также расстоянием от B_R до $\partial\Omega$.

Итак, благодаря (2.2), (2.16) и (2.22) справедлива

Теорема. *Пусть $u^\varepsilon(x)$, $x \in \Omega$, есть классическое решение уравнения (1) с функцией a, удовлетворяющей условиям (1.1) и (2.3_k), $k = \overline{1,4}$ и $\varepsilon \in (0,1]$. Тогда для любой строго внутренней подобласти Ω' области Ω справедлива оценка*

$$\max_{x\in\Omega'}|u_x^\varepsilon(x)| \leqslant$$
$$\leqslant \Phi_7(M, \mu, \mu_1, \mu_2, \mu_3, n, dist^{-1}(\Omega', \partial\Omega)), \tag{2.25}$$

где $M = \max\limits_{\Omega}|u^\varepsilon(x)|$, *а* Φ_7 *есть некоторая непрерывная возрастающая функция, которую можно явно подсчитать и которая не зависит от* $\varepsilon \in (0,1]$.

Замечание. Справедливость (2.25) при $\varepsilon = 0$ усматривается из работы [3]. По сравнению с [3] в данной работе мы включили в a недифференцируемое слагаемое a'. Учет такого слагаемого, если оно подчиняется условию (2.3_1), в случае $\varepsilon = 0$ требует лишь небольших дополнений. В случае же $\varepsilon > 0$ они более значительны.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93–011–16149).

Литература

1. V. I. Oliker and N. N. Uraltseva, *Evolution of nonparametric surfaces with speed depending on curvature, II: The mean curvature case.* — Commun. on Pure and Appl. Math. **XLVI** (1993), 97–135.
2. R. Temam, *Solutions généralisées de certaines équations du type hypersurface minimales.* — Arch. Rational Mech. Anl. **44** (1971), 121–156.
3. O. A. Ladyzhenskaya, N. N. Uraltseva, *Local estimates for gradients of solutions of non-uniformly elliptic and parabolic equations.* — Commun. on Pure and Appl. Math. **XXIII** (1970), 677–703.
4. О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.* Наука, М., 1973.

Ladyzhenskaya O. A., Uraltseva N. N. Local estimates of the gradients of solution to a simplest regularisation for some class of nonuniformly elliptic.

An estimate of $\max\limits_{\Omega'}$, $\Omega' \subset\subset \Omega$, for solutions u^ε to the family of equations

$$-\frac{d}{dx_i}\frac{u_{x_i}}{\sqrt{1+u_x^2}} - \varepsilon\Delta u + a(x,u,u_x) = 0, \quad x \in \Omega,\ \varepsilon \in (0,1],$$

with a non-differentiated lower term a is given. A majorant in the estimate depends on $\max\limits_{\Omega}|u^\varepsilon|$ and the distance between Ω' and $\partial\Omega$ lent does not depend on ε. The publication has relations with the work [2] and [3].

Поступило 1993 г.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

С.-Петербургский государственный
Университет