Н. Н. Авдеев, Е. М. Семёнов, А. С. Усачев, Банаховы пределы и мера на множестве последовательностей из 0 и 1,
Матем. заметки, 2019, том 106, выпуск 5, 784–787

Математические заметки

Том 106 выпуск 5 ноябрь 2019

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Банаховы пределы и мера на множестве последовательностей из 0 и 1

Н. Н. Авдеев, Е. М. Семёнов, А. С. Усачев

Ключевые слова: банаховы пределы, крайние точки, оператор растяжения, размерность Хаусдорфа.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm12558

1. Хорошо известно, что любому $t \in [0,1]$ можно поставить в соответствие такую последовательность $\{t_k\} \in 2^{\mathbb{N}}$, что

$$t = \sum_{k=1}^{\infty} t_k 2^{-k},$$

где $2^{\mathbb{N}}$ обозначает множество последовательностей из 0 и 1. Причем соответствие $t \mapsto \{t_k\}$ взаимно-однозначное с точностью до счетного подмножества. Поэтому мера Лебега на $[0,1]$ определяет меру на $2^{\mathbb{N}}$. Классическая теорема Бореля [1] говорит о том, что для почти любой последовательности $\{t_k\} \in 2^{\mathbb{N}}$ ее преобразование Чезаро

$$C(t_1, t_2, \dots) = \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} t_k \right\}_{n=1}^{\infty} \tag{1}$$

сходится к $1/2$.

Приведем необходимые сведения о банаховых пределах. Через l_∞ обозначается пространство ограниченных последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$ с нормой

$$\|x\|_{l_\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|,$$

где $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, и с обычной полуупорядоченностью. Линейный функционал $B \in l_\infty^*$ называется *банаховым пределом*, если

1) $Bx \geqslant 0$ для всех $x \geqslant 0$;

2) $B(1, 1, \dots) = 1$,

3) $Bx = BTx$ для всех $x \in l_\infty$, где T – оператор сдвига, т.е. $T(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$.

Из определения непосредственно вытекает, что $\|B\|_{l_\infty^*} = 1$ и

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leqslant Bx \leqslant \limsup_{n\to\infty} x_n$$

для всех $x \in l_\infty$. В частности,

$$Bx = \lim_{n\to\infty} x_n$$

Работа выполнена при поддержке РНФ (грант № 19-11-00197).

для любой сходящейся последовательности. Множество банаховых пределов обозначим через $\mathfrak{B}$. Ясно, что $\mathfrak{B}$ есть замкнутое выпуклое множество на единичной сфере пространства l_∞^*. Существование банаховых пределов было доказано С. Мазуром и приведено в книге Банаха [2; гл. II, § 3.4].

Г. Г. Лоренц [3] доказал, что для заданных $\lambda \in \mathbb{R}^1$, $x \in l_\infty$ равенство $Bx = \lambda$ справедливо для всех $B \in \mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k = \lambda$$

равномерно по $m \in \mathbb{N}$. В этом случае говорят, что $\{x_k\}$ почти сходится к λ, а множество таких последовательностей обозначается через ac_λ. Множество всех почти сходящихся последовательностей обозначается через ac.

Л. Сачестон [4] уточнил теорему Г.Г. Лоренца, показав, что для любого $x \in l_\infty$

$$\{Bx : B \in \mathfrak{B}\} = [q(x), p(x)], \tag{2}$$

где

$$q(x) = \lim_{m\to\infty} \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k, \qquad p(x) = \lim_{m\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k.$$

Вскоре после работы Г. Г. Лоренца появилась статья У. Эберлейна [5], где было доказано существование банаховых пределов, инвариантных относительно преобразований Хаусдорфа. Метод У. Эберлейна был развит в [6]. Там было доказано, что для любого линейного непрерывного в l_∞ оператора H такого, что

1) $Hx \geqslant 0$ для всех $x \in l_\infty$, $x \geqslant 0$;

2) $H(1, 1, \dots) = (1, 1, \dots)$;

3) $Hc_0 \subset c_0$;

4) $\limsup_{j\to\infty} (A(I - T)x)_j \geqslant 0$ для всех $x \in l_\infty$, $A \in R(H) = \operatorname{conv}\{H^n, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$,

существует такой $B \in \mathfrak{B}$, что $Bx = BHx$ для всех $x \in l_\infty$. Множество таких банаховых пределов обозначим через $\mathfrak{B}(H)$. Нетрудно показать, что $\mathfrak{B}(H)$ есть замкнутое выпуклое подмножество $\mathfrak{B}$.

Условиям 1)–4) удовлетворяют, например, оператор Чезаро (1) и оператор растяжения

$$\sigma_n(x_1, x_2, \dots) = (\underbrace{x_1, x_1, \dots, x_1}_{n}, \underbrace{x_2, x_2, \dots, x_2}_{n}, \dots), \qquad n \in \mathbb{N}, \quad n > 1.$$

Множества $\mathfrak{B}(C)$ и $\mathfrak{B}(\sigma_n)$ изучались в [7], [8] и других работах.

Обозначим через $\operatorname{ext}\mathfrak{B}$ множество крайних точек $\mathfrak{B}$. По теореме Крейна–Мильмана

$$\mathfrak{B} = \overline{\operatorname{conv}}^{\,w} \operatorname{ext}\mathfrak{B},$$

где замыкание берется в слабой* топологии. Подпространство, порожденное любой счетной системой $B_k \in \operatorname{ext}\mathfrak{B}$, изометрично l_1 [9; утверждение 3]. Заметим, что замыкание выпуклой оболочки $\operatorname{ext}\mathfrak{B}$ в нормированной топологии $\overline{\operatorname{conv}}^{\,n} \operatorname{ext}\mathfrak{B}$ не совпадает с $\mathfrak{B}$. Более того, как показано в [9],

$$\overline{\operatorname{conv}}^{\,n} \operatorname{ext}\mathfrak{B} \cap \mathfrak{B}(C) = \varnothing.$$

Цель настоящей работы – развитие нового метода в теории банаховых пределов, основанного на вычислении мер некоторых множеств в $2^{\mathbb{N}}$, которые определяются банаховыми пределами, и нахождение новых свойств инвариантных банаховых пределов.

2. Всякая строго возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_i\}$ определяет элемент $x=(x_1,x_2,\dots)\in 2^{\mathbb{N}}$ по правилу

$$x_k=\begin{cases}1, & n_{2i-1}\leqslant k<n_{2i},\\ 0, & n_{2i}\leqslant k<n_{2i+1},\ k,i\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

Обозначим через W множество таких $x\in 2^{\mathbb{N}}$, для которых

$$\lim_{j\to\infty}\frac{n_{k+j}-n_k}{j}=\infty$$

равномерно по $k\in\mathbb{N}$. Например, этому условию удовлетворяет последовательность $n_k=[k^\alpha]$, где $\alpha>1$.

Теорема 1. *Пусть* $x\in 2^{\mathbb{N}}$. *Следующие условия эквивалентны*:

(i) $Bx=0$ *или* 1 *для любого* $B\in\operatorname{ext}\mathfrak{B}$;

(ii) $Bxy=Bx\cdot By$ *для любого* $y\in l_\infty$ *и любого* $B\in\operatorname{ext}\mathfrak{B}$;

(iii) $x\in W$.

Теорема 1 усиливает следствие 27 из работы [8] и дает полное описание тех $x\in 2^{\mathbb{N}}$, на которых каждый $B\in\operatorname{ext}\mathfrak{B}$ принимает только крайние значения. В [8] приведены также другие экстремальные свойства множества W.

Теорема 2. *Выполнено* $\operatorname{mes}W=0$.

Множество таких $z\in l_\infty$, что $z\cdot ac_0\subset ac_0$ называется *стабилизатором* ac_0 и обозначается через St_{ac_0}. В [8; теорема 35] доказано, что $W=2^{\mathbb{N}}\cap\mathrm{St}_{ac_0}$. Из теоремы 2 непосредственно вытекает, что $\operatorname{mes}(2^{\mathbb{N}}\cap\mathrm{St}_{ac_0})=0$.

Теорема 3. *Выполнено* $\operatorname{mes}\{x\in 2^{\mathbb{N}}:q(x)=0,\ p(x)=1\}=1$.

Так как ac содержится в дополнении к множеству $\{x\in 2^{\mathbb{N}}:q(x)=0,\ p(x)=1\}$, то как следствие мы получаем теорему Д. Коннора [10] о том, что $\operatorname{mes}(2^{\mathbb{N}}\cap ac)=0$.

Множество $R\subset[0,1]$ определяется с помощью W по правилу

$$R=\biggl\{t\in(0,1):t=\sum_{k=1}^\infty t_k2^{-k},\ (t_1,t_2,\dots)\in W\biggr\}.$$

Напомним определения размерности и меры Хаусдорфа (см., например, [11]). Для $s\geqslant 0$ определим s-мерную меру Хаусдорфа подмножества $\varnothing\neq F\subset\mathbb{R}^n$ по формуле

$$\mathcal{H}^s(F):=\lim_{\delta\to0}\inf\biggl\{\sum_{i=1}^\infty(\operatorname{diam}U_i)^s:F\subset\bigcup_{i=1}^\infty U_i,\ 0\leqslant\operatorname{diam}U_i\leqslant\delta\biggr\}.$$

Тогда размерность Хаусдорфа множества F определяется формулой

$$\dim_H F:=\inf\{s\geqslant0:\mathcal{H}^s(F)=0\}.$$

Теорема 4. 1) *Множество* R *вполне несвязно и плотно в* $[0,1]$.

2) *Размерность Хаусдорфа* R *равна* 1 *и* 1-*мерная мера Хаусдорфа* R *равна* 0.

3) *Функции* $f_j(t)=(t+j-1)/2$, $j=1,2$ *отображают* R *в себя и* $R=f_1(R)\cup f_2(R)$.

3. В [12] показано, что все множества $\mathfrak{B}(\sigma_n)$ различны и включение $\mathfrak{B}(\sigma_n) \subset \mathfrak{B}(\sigma_m)$, $n, m \in \mathbb{N}$, справедливо тогда и только тогда, когда $m = n^k$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$.

Теорема 5. *Для любого $m \in \mathbb{N}$ множество $\operatorname{ext} \mathfrak{B}(\sigma_m)$ не является слабо* замкнутым в l_∞^*.*

Теорема 5 является аналогом теоремы Талаграна [13] для множеств $\mathfrak{B}(\sigma_m)$ (см. также [14]).

Теорема 6. *Множество $\bigcup_{n=2}^\infty \mathfrak{B}(\sigma_n)$ не является выпуклым.*

С другой стороны, множество $\bigcup_{k=2}^\infty \mathfrak{B}(\sigma_{n^k})$ выпукло для любого $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] E. Borel, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **26** (1909), 247–271. **[2]** С. Банах, *Теория линейных операций*, Изд-во Моск. ун-та, М.–Ижевск, 2001. **[3]** G. G. Lorentz, *Acta Math.*, **80** (1948), 167–190. **[4]** L. Sucheston, *Amer. Math. Monthly*, **74** (1967), 308–311. **[5]** W. F. Eberlein, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **1** (1950), 662–665. **[6]** E. M. Semenov, F. A. Sukochev, *J. Funct. Anal.*, **259**:6 (2010), 1517–1541. **[7]** E. A. Alekhno, E. M. Semenov, F. A. Sukochev, A. S. Usachev, *Studia Math.*, **242**:1 (2018), 79–107. **[8]** Е. М. Семенов, Ф. А. Сукочев, А. С. Усачев, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **78**:3 (2014), 177–204. **[9]** E. Semenov, F. Sukochev, *Positivity*, **17**:1 (2013), 163–170. **[10]** J. Connor, *Internat. J. Math. Math. Sci.*, **13**:4 (1990), 775–777. **[11]** K. Falconer, *Fractal Geometry*, John Wiley and Sons, Hoboken, NJ, 2003. **[12]** Е. А. Алехно, Е. М. Семенов, Ф. А. Сукочев, А. С. Усачев, *Алгебра и анализ*, **28**:3 (2016), 3–35. **[13]** M. Talagrand, *J. Functional Analysis*, **34**:2 (1979), 304–337. **[14]** R. Nillsen, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **55**:2 (1976), 347–357.

Н. Н. Авдеев
Воронежский государственный университет
E-mail: nickkolok@mail.ru

Поступило
13.05.2019
Принято к публикации
22.05.2019

Е. М. Семёнов
Воронежский государственный университет
E-mail: nadezhka_ssm@geophys.vsu.ru

А. С. Усачев
Воронежский государственный университет
E-mail: alex.usachev.ru@gmail.com