A. B. Doktorovich, The “betweenness” relation and support sets,
*Dokl. Akad. Nauk*, 1997, Volume 354, Number 6, 748–750

https://www.mathnet.ru/eng/dan3734

ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1997, том 354, № 6, с. 748–750

ИНФОРМАТИКА

УДК 517.1

# ОТНОШЕНИЕ "МЕЖДУ" И ОПОРНЫЕ МНОЖЕСТВА

© 1997 г. А. Б. Докторович

Представлено академиком Ю.И. Журавлевым 24.12.96 г.

Поступило 29.01.97 г.

Тернарное отношение "находиться между" или, короче, отношение "между" формализует понятие об объекте $z$, находящемся между парой произвольных объектов $x$ и $y$ множества $X$. Это отношение используется в различных предметных областях – от эмпирической классификации объектов, изучаемых в ботанике и зоологии, геологии и минералогии, биологии и микробиологии, медицине и технике, до исследований по теории множеств, общей теории систем и информатике.

Анализ работ [1–5], в которых определяется и исследуется отношение "между", показал, что различные авторы, по-разному определяя указанное отношение (см., например, [1, 2, 5]), одинаково предполагают упорядоченность элементов множества $X$ и с помощью того или иного производного отношения порядка формируют тройки элементов $\langle x, z, y\rangle$ поля $M$ отношения "между".

Использование предположения об упорядоченности множества $X$, на котором определяется отношение "между", ограничивает общность определения рассматриваемого отношения.

Целью настоящего сообщения является определение и исследование тернарного отношения "между" и эквивалентного понятия "опорное множество". В сообщении сформулированы новые общие определения указанных понятий и доказана их эквивалентность.

Предлагаемое определение тернарного отношения "между" обобщает известные определения в том смысле, что для каждой тройки элементов из поля отношения "между", содержащей пару равных элементов, сохраняются все основные свойства соответствующего бинарного отношения.

Отметим, что при корректном выборе основных свойств, определяющих отношение "между", не только отношение порядка, но и многие другие бинарные отношения (равенство, эквивалентность, нестрогое неравенство, отношения предпочтения) порождают соответствующие тернарные отношения "между".

*Вычислительный центр Российской Академии наук, Москва*

В первой части сообщения сформулировано определение тернарного отношения "между" (b-отношения), изучены различные b-отношения и $M$-множества – поля, на которых они определены.

Дальнейшее изучение отношения "между" приводит к понятию "опорное множество", которое формализовано в теории $W$-множеств.

Во второй части работы дано определение $W$-множеств, названных опорными множествами, проведено сравнительное исследование $M$- и $W$-множеств, сформулирован критерий их эквивалентности. Таким образом, показано, что на любом $M$-множестве можно определить $W$-множество и, наоборот, на любом $W$-множестве можно определить отношение "между".

Наличие двух в определенном смысле эквивалентных понятий – тернарного отношения "между" и опорного множества – позволяет использовать любое из них для определения основного свойства – свойства монотонности мер сходства и мер различия.

## 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕРНАРНОГО ОТНОШЕНИЯ "МЕЖДУ" И $M$-МНОЖЕСТВ

В дальнейшем запись $A \subset B$ означает, что множество $A$ содержится в $B$ или совпадает с $B$.

Определение 1. Пусть $X$ – непустое множество, $b(x, y, z)$ – тернарное отношение с полем $M \subset X \times X \times X$, удовлетворяющее условиям:

M1. $\forall x \in X \quad b(x, x, x)$;

M2. $\forall x, y, z \in X \quad b(x, z, y) \Rightarrow b(x, x, z) \wedge b(z, y, y)$;

M3. $\forall x, y, z \in X \quad b(x, y, x) \wedge b(x, z, x) \Rightarrow b(y, z, y)$.

Отношение $b(x, y, z)$ назовем отношением "между", или b-отношением, поле данного отношения назовем $M$-множеством, а множество $X$ с определенным на нем b-отношением будем называть $M$-пространством.

Для любой тройки $(x, z, y) \in M$ будем говорить, что элемент $z$ находится между $x$ и $y$.

Совокупность условий M1–M3, определяющих отношение "между", назовем M-системой.

### *1.1. Примеры* b*-отношений и М-множеств*

**b-Отношения и М-множества, порождаемые бинарными отношениями.**

1.1.1. Тривиальным примером b-отношения является отношение $b_0$ с полем $M_0 = \{(x, x, x) | x \in X\}$.

1.1.2. Следующим также тривиальным примером b-отношения является отношение $b^0$ с полем $M^0 = X^3$.

Бинарные отношения позволяют конструировать и нетривиальные b-отношения. Для построения таких отношений будем использовать следующее

Определение 2. Пусть $X$ – непустое множество. Бинарные отношения $b_i$ с полем $B_i \subset X \times X$ и $\bar{b}_i$ с полем $\bar{B}_i \subset X \times X$ назовем двойственными, если они удовлетворяют условию

(D) $\forall x, y \in X \quad x b_i y \equiv y \bar{b}_i x$.

Примерами двойственных отношений являются отношения нестрогого неравенства, отношения нестрогого порядка и нестрогого предпочтения.

Поля двойственных отношений представляют собой множества пар элементов, различающихся порядком элементов.

Очевидно, что любое бинарное симметричное отношение $s$ совпадает с двойственным отношением, т.е. является самодвойственным:

(S) $\forall x, y \in X \quad xsy \equiv ysx$.

1.1.3. Бинарное отношение эквивалентности ~ на множестве $X$ определяет тернарное отношение $\tilde{b}(x, y, z)$, поле которого $M_{\sim} \subset X \times X \times X$ содержит все тройки попарно эквивалентных элементов. Таким образом, для любого класса эквивалентности и любой тройки элементов этого класса любой элемент находится между парой двух других элементов данного класса.

**b-Отношения и М-множества на упорядоченных множествах.**

1.1.4. Пусть $X$ – непустое множество, на котором задано рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение $b_i$ (отношение порядка).

Тернарное отношение

$$b_1(b_i) = x b_i z b_i y \tag{1}$$

представляет собой b-отношение.

1.1.5. Пусть $X$ – непустое множество, на котором задана пара двойственных рефлексивных, антисимметричных и транзитивных отношений $(b_i, \bar{b}_i)$, т.е. пара двойственных отношений порядка.

Тернарное отношение

$$b_2(b_i, \bar{b}_i) = x b_i z b_i y \vee y \bar{b}_i z \bar{b}_i x \tag{2}$$

представляет собой b-отношение.

1.1.6. Пусть $X$ – непустое множество, на котором задана пара отношений $(b_j, s)$, где $b_j$ – антирефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение (отношение строгого порядка), $s$ – рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение (отношение равенства или эквивалентности).

Тернарное отношение

$$b_3(b_j, s) = x b_j z b_j y \vee xszsy \tag{3}$$

представляет собой b-отношение.

1.1.7. Пусть $X$ – непустое множество, на котором задана пара двойственных антирефлексивных, антисимметричных и транзитивных отношений $(b_j, \bar{b}_j)$ (пара двойственных отношений строгого порядка) и $s$ – рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение (отношение равенства или эквивалентности).

Тернарное отношение

$$b_4(b_j, \bar{b}_j, s) = x b_j z b_j y \vee y \bar{b}_j z \bar{b}_j x \vee xszsy \tag{4}$$

представляет собой b-отношение.

**b-Отношения и М-множества на геометрических объектах.**

1.1.8. На любом отрезке любая точка, принадлежащая данному отрезку, находится между граничными точками.

1.1.9. В $n$-мерном пространстве $X^n$ для любых элементов $x, y$ из $X^n$ в качестве множества элементов $z$, находящихся между $x$ и $y$, определим шар $O(x, y)$ с диаметром $[x, y]$.

Любая точка $z$, принадлежащая шару $O(x, y)$, находится между $x$ и $y$.

1.1.10. Для любых $x, y$ из $X^n$ в качестве множества элементов $z$, находящихся между $x$ и $y$, определим множество всех точек $z$ таких, что $r(x, z) \le r(x, y) \wedge r(y, z) \le r(x, y)$. Указанное множество есть пересечение шаров радиуса $r(x, y)$ с центрами в точках $x$ и $y$.

## 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ $W$-МНОЖЕСТВ

Определение 3. Пусть $X$ – непустое множество и на $X \times X$ определено отображение $W: X \times X \to \Sigma(X)$, где $\Sigma(X) = \{W(x, y) | x \in X, y \in X\}$ – подмножество множества всех подмножеств множества $X$, удовлетворяющее следующим аксиомам:

W1. $\forall x \in X \quad x \in W(x, x)$;

W2. $\forall x, y, z \in X \quad z \in W(x, y) \Rightarrow W(x, x) \subset W(x, z) \wedge W(y, y) \subset W(z, y)$;

W3. $\forall x, y, z \in X \quad y \in W(x, x) \wedge z \in W(x, x) \Rightarrow z \in W(y, y)$.

Отображение $W: X \times X \to \Sigma(X)$ будем называть **опорным отображением, порождающим** $w$-**отношение**, а множество $X$ с заданным на нем опорным отображением – **опорным пространством**. Множество $W(x, y)$ назовем опорным множеством для элементов $x, y$ из $X$ или более кратко $W(x, y)$-множеством, а $\Sigma(X) = \{W(x, y) \mid x, y \in X\}$ – **системой опорных множеств на множестве** $X$ или, короче, $W$-**системой**.

### *2.1. Примеры опорных множеств*

2.1.1. Для любого непустого множества $X$ существует тривиальное опорное отображение, определяющее опорное множество

$$W_0(x, y) = \{x, y \mid x \in X, y \in X\}.$$

2.1.2. Пусть $P$ – непустое множество нечисловых (качественных) значений (свойств). Тривиальное опорное отображение определяет опорное множество $W_0(x, y) = \{x, y\}$ для любых $x, y$ из $P$.

2.1.3. Рассмотрим декартово произведение

$$X = X_1 \times \ldots \times X_n = \{x = (x_1, \ldots x_n) \mid x_1 \in X_1, \ldots, x_n \in X_n\}$$

множеств $X_i$ произвольной структуры.

В доказательстве теоремы 2, сформулированной ниже, построены алгоритмы, определяющие опорное отображение и систему опорных множеств $\Sigma(X)$ на $X$.

Рассмотренные примеры иллюстрируют возможность построения $M$- и $W$-множеств на различных множествах данных, объектов, систем и состояний.

Сравнению $M$- и $W$-множеств посвящена

Теорема 1. 1) *Пусть $\langle X, b\rangle$ – $M$-пространство. Отображение*

(MW) $W: X \times X \to \Sigma(X) = \{W(x, y) \mid \forall x, y, z \in X$ $b(x, z, y) \Rightarrow z \in W(x, y)\}$ *порождает на* $X^2$ *w-отношение, эквивалентное* b-*отношению, и* $\langle X, w\rangle$ – *$W$-пространство, эквивалентное $M$-пространству.*

2) *Пусть $\langle X, w\rangle$ – $W$-пространство. Соотношение*

(WM) $\forall x, y, z \in X \quad z \in W(x, y) \Rightarrow b(x, z, y)$

*определяет на* $X^3$ b-*отношение, эквивалентное w-отношению, и $\langle X, b\rangle$ – $M$-пространство, эквивалентное $W$-пространству.*

Существование алгоритма построения b-отношения и опорного множества на множестве $X$, представленном конечным или счетным декартовым произведением, доказано ниже в теореме 2.

Пусть непустое множество $X = \{x, y, \ldots\}$ представлено конечным или счетным декартовым произведением: $X = \prod_{j \in J} X_j$, где $X_j$ – непустые множества произвольной структуры.

Пусть зафиксирована пара элементов $x, y$ из $X$.

Характеристикой элемента $z_i = (z_{i0}, z_{i1}, \ldots, z_{ij}, \ldots)$, $z_{ij} \in X_j$, определяемого по паре элементов $x, y$ из $X$, назовем двоичный набор $\alpha_i = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_j, \ldots)$, который однозначно определяется индексом $i$.

Множество всех характеристик обозначим $\alpha$.

Для множества $\bar{X} = \bigcup_{x, y \in X} W_\alpha(x, y)$, где $W_\alpha(x, y)$ – множество элементов $z_i$, каждый из которых определяется по паре элементов $x, y$ из $X$ и характеристике $\alpha_i$, справедлива

Теорема 2. *Пусть непустое множество $X$ представлено конечным или счетным декартовым произведением $\prod_{j \in J} X_j$, где $X_j$ – непустые множества произвольной структуры.*

Пусть $\bar{X} = \bigcup_{x, y \in X} W_\alpha(x, y)$ – объединение множеств $W_\alpha(x, y)$ элементов $z_i$, определяемых по паре элементов $x, y$ из $X$ и характеристике $\alpha_i = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_j, \ldots)$, которая однозначно определяется индексом $i = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot 2 + \ldots + \alpha_{j-1} \cdot 2^{j-1}$:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= (0, \ldots 0, \ldots) \text{ при } i = 0, \\ \alpha_i &= (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, 0, \ldots), \\ \alpha_j &= 0 \text{ для всех } j \geq i > 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Для любых $x, y$ из $X$ $W_\alpha(x, y)$ является опорным множеством.

Существует алгоритм построения на множестве $\bar{X}$ тернарного отношения $b(x, z, y)$ с полем $M(x, y)$, совпадающим с множеством $W(x, y)$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Куратовский К., Мостовский А.* Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
2. *Клир Дж.* Системология. Автоматизация решения системных задач. М.: Радио и связь, 1990. 544 с.
3. Методы анализа данных. Подход, основанный на методе динамических сгущений / Под ред. Э. Диде. М.: Финансы и статистика, 1985. 357 с.
4. Классификация и кластер / Под. ред. Дж. Вэн Райзин. М.: Мир, 1980. 334 с.
5. *Шрейдер Ю.А.* Равенство, сходство, порядок. М.: Наука, 1971. 254 с.