



Общероссийский математический портал

С. А. Колесник, Метод идентификации нелинейных компонентов тензора теплопроводности анизотропных материалов, *Матем. моделирование*, 2014, том 26, номер 2, 119–132

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.81

18 января 2025 г., 16:01:15



УДК 536.21

## **МЕТОД ИДЕНТИФИКАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОМПОНЕНТОВ ТЕНЗОРА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ АНИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ**

© 2014 г. *С.А. Колесник*

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)  
sergey@oviont.com

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ по поддержке молодых ученых – кандидатов наук МК-299.2013.8 и гранта РФФИ 12-01-31231 мол\_а.

Предлагается метод численного решения обратных коэффициентных задач нелинейного теплопереноса в анизотропных материалах, используемых в качестве теплозащитных при аэрогазодинамическом нагреве гиперзвуковых летательных аппаратов (ЛА). Основными характеристиками анизотропных теплозащитных материалов при высоких температурах являются нелинейные компоненты тензора теплопроводности, которые необходимо восстановить по результатам экспериментальных замеров температур в пространственно-временных узлах.

Предложенный метод основан на использовании метода переменных направлений с экстраполяцией численного решения задач теплопереноса, метода параметрической идентификации и метода градиентного спуска. Получены результаты по восстановлению компонентов тензора теплопроводности углерод-углеродного композиционного материала с использованием экспериментальных значений нелинейной теплопроводности этих материалов. Метод может быть использован для восстановления других многочисленных теплофизических характеристик композиционных материалов. Получены и обсуждаются результаты численных экспериментов по определению компонентов тензора теплопроводности композиционных материалов в двумерном пространстве.

Ключевые слова: обратные задачи теплопереноса, теплопроводность, тензор теплопроводности, анизотропия, композиционный материал, численные методы.

## **A METHOD FOR IDENTIFICATION OF NONLINEAR COMPONENTS OF HEAT TRANSFER TENSOR FOR ANISOTROPIC MATERIALS**

*S.A. Kolesnik*

Moscow Aviation Institute (National Research University)

In this article the method for numerical solution of coefficient inverse problems of nonlinear heat transfer in anisotropic materials, used for heat shielding in aerodynamic heating of hypersonic craft (HC). At high temperatures the properties of anisotropic heat shield materials are characterized by nonlinear components of heat transfer tensor. It is necessary to identify and reconstruct these components by results of experimental measurements of temperature in spatial-temporal nodes.

The proposed method is based upon alternate-directions method with extrapolation for heat transfer problems, method of parametric identification and gradient descent method. There are results

for reconstruction of heat transfer tensor components of carbon-carbon composite yielded via experimental values of nonlinear heat conduction of such materials.

This method can be used for reconstruction of other numerous thermophysical characteristics of composites. Results of numerical experiments for identification of heat transfer tensor components of composites in 2D computational space are obtained and discussed.

Key words: inverse problems of heat transfer, heat conductivity, tensor of heat transfer, anisotropy, composite, numerical methods.

## 1. Введение

В настоящее время для тепловой защиты гиперзвуковых летательных аппаратов используются анизотропные материалы, теплопроводность которых описывается не скалярными величинами, а тензорами. При этом компоненты тензора теплопроводности могут значительно зависеть от температуры, то есть являются нелинейными.

К таким материалам относятся композиционные материалы, такие как стеклопластики, асбопластики, углерод-углеродные пластики, большинство графитов и графитосодержащих материалов. Моделирование как прямых, так и обратных задач теплопереноса в таких материалах в условиях аэрогазодинамического нагрева ЛА представляет значительные трудности по следующим причинам:

- нестационарное температурное поле является многомерным по пространственным переменным;
- вектор плотности теплового потока не ортогонален изотермам, вследствие чего все координатные направления равнозначны и невозможно выделить одно главное направление;
- дифференциальное уравнение теплопереноса содержит смешанные производные, что приводит к невозможности разделения переменных по координатным направлениям;

Поскольку задачи восстановления нелинейных компонентов тензора теплопроводности анизотропных теплозащитных материалов относятся к классу обратных задач теплопереноса, для которых используются решения прямых задач, то все перечисленные трудности решения прямых задач переносятся на обратные задачи. К ним добавляются следующие: сильное влияние на результаты решения обратных коэффициентных задач теплопереноса погрешностей при экспериментальном определении температур; большое число пространственных узлов с экспериментальными значениями в анизотропном теплозащитном материале (не менее девяти); сложность учета нелинейностей компонентов тензора переноса и т.п.

Обратные задачи теплопереноса для изотропных тел рассматривались ранее в работах Алифанова О.М. [1], Бека Дж.В. [2], Самарского А.А. и Вабищевича П.Н. [3]. В работе Кузнецовой Е.Л. [4] решена обратная задача теплопроводности в анизотропном полупространстве на основе аналитического решения, полученного в [5]. Кроме этого, следует отметить работы [6,7], в которых решались задачи по восстановлению источника для уравнения диффузии.

В данной работе предложен метод численного решения обратных коэффициентных задач теплопроводности в анизотропных теплозащитных материалах, когда компоненты тензора теплопроводности зависят от температуры произвольным образом, например, немонотонно (во всех перечисленных работах нелинейные коэффициенты были монотонно возрастающими).

## 2. Постановка задачи

В анизотропной прямоугольной пластине  $l_1 \times l_2$  (рис.1) рассматривается следующая коэффициентная обратная задача теплопереноса по определению компонентов тензора теплопроводности  $\lambda_{11}(T), \lambda_{12}(T), \lambda_{21}(T), \lambda_{22}(T)$ :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_{11}(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_{12}(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_{21}(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_{22}(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) = c\rho \frac{\partial T}{\partial t},$$

$$x \in (0; l_1), y \in (0; l_2), t > 0, \quad (1)$$

$$T(x, 0, t) = T(x, l_2, t) = T(0, y, t) = T(l_1, y, t) = T|_{\Gamma}; \quad (2)$$

$$T(x, y, 0) = T_0. \quad (3)$$

При этом граничное условие принимается в качестве максимального значения температур  $T|_{\Gamma} = T_{\max}$ , а начальное – в качестве минимального  $T_0 = T_{\min}$ , то есть

$$T_{\min} \leq T \leq T_{\max}. \quad (4)$$

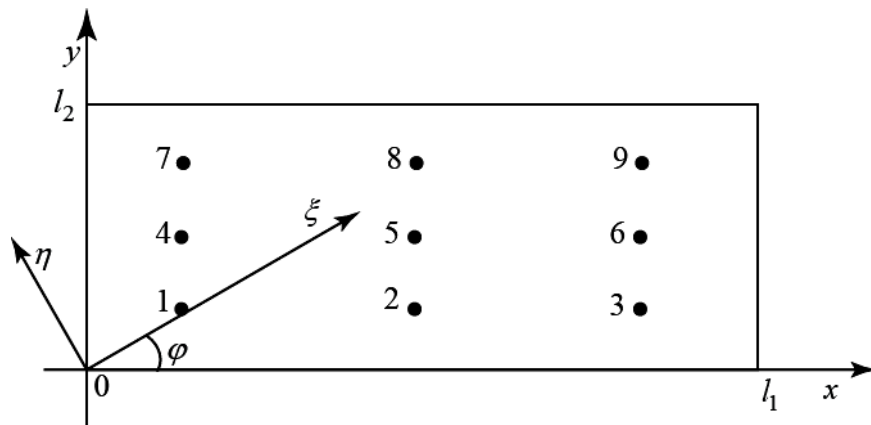


Рис.1. Расчетная область.

Здесь  $Ox, Oy$  – оси декартовой системы координат,  $O\xi, O\eta$  – главные оси тензора теплопроводности, ориентированные относительно декартовой системы координат под углом  $\varphi$ .

Для замыкания коэффициентной обратной задачи теплопереноса в анизотропной пластине задаются экспериментальные значения температур в девяти точках (рис.1) в зависимости от времени

$$T((x, y)_i, t^k) = \tilde{T}_{ik}, \quad i = \overline{1, 9}, \quad k = \overline{1, K_0}. \quad (5)$$

Нелинейные компоненты тензора теплопроводности определяются через главные коэффициенты  $\lambda_{\xi}, \lambda_{\eta}$  и угол ориентации  $\varphi$  главных осей  $O\xi$  и  $O\eta$  следующим образом [5]:

$$\begin{aligned}\lambda_{11}(T) &= \lambda_{\xi}(T) \cos^2 \varphi + \lambda_{\eta}(T) \sin^2 \varphi ; \\ \lambda_{22}(T) &= \lambda_{\xi}(T) \sin^2 \varphi + \lambda_{\eta}(T) \cos^2 \varphi ; \\ \lambda_{12}(T) &= \lambda_{21}(T) = (\lambda_{\xi}(T) - \lambda_{\eta}(T)) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi .\end{aligned}\tag{6}$$

Поскольку рассматриваемая область двумерна, то количество точек с экспериментальными значениями в направлении каждой координатной оси должно быть не менее двух, а поскольку она еще и анизотропная, то количество экспериментальных точек по координатным направлениям должно быть не менее трех (в соответствии с пространственным шаблоном для конечно-разностных схем). Таким образом, принимается минимально возможное количество пространственных точек, равное девяти, с экспериментальными значениями температур, зависящими от времени.

Одним из эффективных методов решения нелинейных коэффициентных обратных задач для уравнений параболического типа вообще и анизотропного переноса тепла в частности, является *метод параметрической идентификации* [3,4], в котором искомые функции  $\lambda_{11}(T)$ ,  $\lambda_{12}(T) = \lambda_{21}(T)$ ,  $\lambda_{22}(T)$  находятся в виде линейной комбинации базисных функций  $N_m(T)$ , задаваемых на конечных элементах – конечных отрезках  $\Delta T_m$ ,

$$m = \overline{1, M-1} \quad (T_{\min} \leq T \leq T_{\max}), \text{ причем эти базисные функции приписаны каждому узлу } T_m = T_{\min} + \sum_{l=1}^m \Delta T_{l-1} \quad (\Delta T_0 = 0), \quad m = \overline{1, M}.$$

Здесь используются следующие базисные функции [3, 8]:

$$N_m(T) = \begin{cases} 0, & T < T_{m-1}; \\ \frac{T - T_{m-1}}{T_m - T_{m-1}}, & T_{m-1} \leq T \leq T_m; \\ \frac{T_{m+1} - T}{T_{m+1} - T_m}, & T_m \leq T \leq T_{m+1}; \\ 0, & T > T_{m+1}; \end{cases} \quad m = \overline{1, M} .\tag{7}$$

Нелинейные компоненты тензора теплопроводности, зависящие от температуры, в методе параметрической идентификации представляются в виде линейных комбинаций базисных функций  $N_m(T)$

$$\lambda_{11}(T) \approx \sum_{m=1}^M \lambda_{11}^m \cdot N_m(T),\tag{8}$$

$$\lambda_{22}(T) \approx \sum_{m=1}^M \lambda_{22}^m \cdot N_m(T),\tag{9}$$

$$\lambda_{12}(T) \approx \sum_{m=1}^M \lambda_{12}^m \cdot N_m(T),\tag{10}$$

где коэффициенты линейных комбинаций  $\lambda_{11}^m$ ,  $\lambda_{22}^m$ ,  $\lambda_{12}^m$  на каждом  $m$ -м конечном элементе  $m = 1, \dots, (M-1)$  являются искомыми величинами.

На основании принципа максимума можно утверждать, что температура внутри области будет удовлетворять следующему неравенству:  $T_{\min} \leq T(x, y, t) \leq T_{\max}$ . Обозначим

$$\lambda_{11}^1 = \lambda_{11}(T_{\min}); \quad \lambda_{12}^1 = \lambda_{12}(T_{\min}); \quad \lambda_{22}^1 = \lambda_{22}(T_{\min}); \quad \dots ;$$

$$\lambda_{11}^M = \lambda_{11}(T_{\max}); \quad \lambda_{12}^M = \lambda_{12}(T_{\max}); \quad \lambda_{22}^M = \lambda_{22}(T_{\max}).$$

### 3. Метод определения коэффициентов в линейных комбинациях при параметрическом представлении компонентов тензора теплопроводности

Для определения постоянных компонентов вектора

$$\boldsymbol{\lambda} = \left( \lambda_{11}^1, \dots, \lambda_{11}^M, \lambda_{22}^1, \dots, \lambda_{22}^M, \lambda_{12}^1, \dots, \lambda_{12}^M \right)^T, \quad m = 1, \dots, M,$$

в выражениях (8)–(10) вводится квадратичный функционал:

$$S(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^9 \sum_{k=1}^{K_0} \left[ T_{i,k}(\boldsymbol{\lambda}) - \tilde{T}_{i,k} \right]^2 \quad (11)$$

в виде суммы по пространственно-временным переменным квадратов отклонения экспериментальных значений  $\tilde{T}_{i,k}$  в точках  $\left( (x, y)_i, t^k \right)$  от расчетных  $T_{i,k}(\boldsymbol{\lambda}) \equiv T_{i,k} \left( (x, y)_i, t^k, \boldsymbol{\lambda} \right)$ , полученных численно.

В случае отсутствия экспериментальных значений температур в качестве последних принимаются результаты численного решения по приемлемым характеристикам  $\lambda_{11}(T)$ ,  $\lambda_{22}(T)$ ,  $\lambda_{12}(T)$ , считающихся искомыми. При этом в экспериментальные значения может быть добавлена относительная  $\delta$  либо абсолютная  $\Delta$  погрешность. Предполагается, что при достижении стационарного значения функционала (11) искомые характеристики, заложенные в экспериментальных значениях  $\tilde{T}_{i,k}$ , приближенно совпадут с теми же характеристиками, по которым получены расчетные значения температур.

Для минимизации функционала используется *неявный* метод градиентного спуска

$$\boldsymbol{\lambda}^{(n+1)} = \boldsymbol{\lambda}^{(n)} - \alpha_n \text{grad } S \left( \boldsymbol{\lambda}^{(n+1)} \right). \quad (12)$$

где  $n$  – номер итерации,  $\alpha_n$  – параметрические шаги, выбираемые достаточно малыми с подчинением условию ( $\alpha_n > 0$ )

$$S \left( \boldsymbol{\lambda}^{(n+1)} \right) < S \left( \boldsymbol{\lambda}^{(n)} \right). \quad (13)$$

Если следовать условию (13), то первоначальное значение  $\alpha_0$  может быть выбрано произвольно, например,  $\alpha_0 = 0.01$ . Тогда если в результате следующей итерации условие (13) не выполнилось, то  $\alpha_n$  на этой итерации уменьшается и расчет на этой итерации повторяется, в противном случае (когда (13) выполняется) для следующей итерации  $\alpha_n$  увеличивается.

Окончание итерационного процесса устанавливается по близости к нулю  $\text{grad } S(\boldsymbol{\lambda}^{(n+1)})$ , то есть при выполнении условия

$$\left| \text{grad } S(\boldsymbol{\lambda}^{(n+1)}) \right| \leq \varepsilon, \quad (14)$$

где  $\varepsilon$  – заданная точность.

Для вычисления градиента функционала в (11), с последующей подстановкой его компонентов в (12) и определения вектора  $\Delta\boldsymbol{\lambda}^{(n)} = \boldsymbol{\lambda}^{(n+1)} - \boldsymbol{\lambda}^{(n)}$ , разложим в ряд Тейлора функцию  $T_{i,k}(\boldsymbol{\lambda}^{(n+1)})$  в окрестности  $\boldsymbol{\lambda}^{(n)}$ , сохраняя линейные относительно  $\Delta\boldsymbol{\lambda}^{(n)}$  члены, получим

$$S(\boldsymbol{\lambda}^{(n+1)}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^9 \sum_{k=1}^{K_0} \left[ \left( T_{i,k}(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}) + \sum_{l=1}^{3M} \frac{\partial T_{i,k}(\boldsymbol{\lambda}^{(n)})}{\partial \lambda_l} \Delta\lambda_l^{(n)} \right) - \tilde{T}_{i,k} \right]^2 + O(\|\Delta\boldsymbol{\lambda}\|^2). \quad (15)$$

Компоненты градиента функционала (15) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(\boldsymbol{\lambda}^{(n+1)})}{\partial \lambda_l} &= \sum_{i=1}^9 \sum_{k=1}^{K_0} \left[ \left( T_{i,k}(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}) - \tilde{T}_{i,k} \right) + \sum_{k=1}^{K_0} \frac{\partial T_{i,k}(\boldsymbol{\lambda}^{(n)})}{\partial \lambda_l} \Delta\lambda_l^{(n)} \right] \times \\ &\times \left[ \frac{\partial T_{i,k}(\boldsymbol{\lambda}^{(n)})}{\partial \lambda_l} + \frac{\partial}{\partial \lambda_l} \left( \sum_{l=1}^{3M} \frac{\partial T_{i,k}(\boldsymbol{\lambda}^{(n)})}{\partial \lambda_l} \Delta\lambda_l^{(n)} \right) \right] \approx \\ &\approx \sum_{i=1}^9 \sum_{k=1}^{K_0} \left[ \left( T_{i,k}(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}) - \tilde{T}_{i,k} \right) + \sum_{l=1}^{3M} \frac{\partial T_{i,k}(\boldsymbol{\lambda}^{(n)})}{\partial \lambda_l} \Delta\lambda_l^{(n)} \right] \frac{\partial T_{i,k}(\boldsymbol{\lambda}^{(n)})}{\partial \lambda_l}, \quad l = 1, \dots, 3M, \quad (16) \end{aligned}$$

где  $3M$  – количество неизвестных параметров.

Представим (16) в следующей векторно-матричной форме:

$$\text{grad } S(\boldsymbol{\lambda}^{(n+1)}) = Z^T(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}) \left( T(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}) - \tilde{T} \right) + Z^T(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}) Z(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}) \Delta\boldsymbol{\lambda}^{(n)}, \quad (17)$$

$$Z(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}) = \begin{pmatrix} u^1((x, y)_1, t^1, \boldsymbol{\lambda}^{(n)}) & \dots & v^1((x, y)_1, t^1, \boldsymbol{\lambda}^{(n)}) & \dots & w^1((x, y)_1, t^1, \boldsymbol{\lambda}^{(n)}) & \dots \\ u^1((x, y)_2, t^1, \boldsymbol{\lambda}^{(n)}) & \dots & v^1((x, y)_2, t^1, \boldsymbol{\lambda}^{(n)}) & \dots & w^1((x, y)_2, t^1, \boldsymbol{\lambda}^{(n)}) & \dots \\ \dots & & \dots & & \dots & \\ u^1((x, y)_9, t^{K_0}, \boldsymbol{\lambda}^{(n)}) & \dots & v^1((x, y)_9, t^{K_0}, \boldsymbol{\lambda}^{(n)}) & \dots & w^1((x, y)_9, t^{K_0}, \boldsymbol{\lambda}^{(n)}) & \dots \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Элементы этой матрицы (18) (ее можно назвать матрицей коэффициентов чувствительности) в точках  $((x, y)_i, t^k)$  определяются из решения задач относительно производных от прямой задачи (1)–(4) по каждому компоненту  $\lambda_l$ ,  $l = 1, \dots, 3M$ , и имеют смысл коэффициентов чувствительности температуры при изменении параметров  $\lambda_l$ .

$$u^m((x, y)_i, t^k, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{\partial T((x, y)_i, t^k, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_{11}^m}; \quad v^m((x, y)_i, t^k, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{\partial T((x, y)_i, t^k, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_{12}^m};$$

$$w^m((x, y)_i, t^k, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{\partial T((x, y)_i, t^k, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_{22}^m}. \quad (19)$$

Векторы  $T(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}) - \tilde{T}$  и  $\Delta \boldsymbol{\lambda}^{(n)}$  в (17) имеют вид

$$T(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}) - \tilde{T} = (T_{1,1}(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}) - \tilde{T}_{1,1}) \dots, \quad (T_{I,1}(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}) - T_{I,1}), \quad (T_{1,2}(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}) - \tilde{T}_{1,2}), \dots,$$

$$(T_{I,2}(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}) - T_{I,2}) \dots, \quad (T_{I,K_0}(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}) - \tilde{T}_{I,K_0})^T; \quad (20)$$

$$\Delta \boldsymbol{\lambda}^{(n)} = (\Delta \lambda_{11}^{1(n)}, \dots, \Delta \lambda_{11}^{M(n)}, \Delta \lambda_{22}^{1(n)}, \dots, \Delta \lambda_{22}^{M(n)}, \Delta \lambda_{12}^{1(n)}, \dots, \Delta \lambda_{12}^{M(n)})^T. \quad (21)$$

Подставляя (17) в (12), получим

$$\Delta \boldsymbol{\lambda}^{(n)} = -\alpha_n \left[ Z^T(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}) (T(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}) - \tilde{T}) + Z^T(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}) Z(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}) \Delta \boldsymbol{\lambda}^{(n)} \right],$$

откуда

$$(E + \alpha_n \cdot Z^T(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}) Z(\boldsymbol{\lambda}^{(n)})) \Delta \boldsymbol{\lambda}^{(n)} = -\alpha_n Z^T(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}) (T(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}) - \tilde{T})$$

или

$$\Delta \boldsymbol{\lambda}^{(n)} = -\alpha_n \left( E + \alpha_n Z^T(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}) Z(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}) \right)^{-1} Z^T(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}) (T(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}) - \tilde{T}). \quad (22)$$



Для определения расчетных значений температур  $T_{i,k}(\lambda)$ , входящих в функционал (11), используется экономичный абсолютно устойчивый метод переменных направлений с экстраполяцией (МПНЭ), подробно изложенный и обоснованный в [8,9], а для определения элементов матрицы коэффициентов чувствительности необходимо решить  $3M$  независимые начально-краевые задачи относительно функций

$$u^1(x, y, t) = \frac{\partial T}{\partial \lambda_{11}^1}, \dots, u^M(x, y, t) = \frac{\partial T}{\partial \lambda_{11}^M}, \quad v^1(x, y, t) = \frac{\partial T}{\partial \lambda_{12}^1}, \dots, v^M(x, y, t) = \frac{\partial T}{\partial \lambda_{12}^M},$$

$$w^1(x, y, t) = \frac{\partial T}{\partial \lambda_{22}^1}, \dots, w^M(x, y, t) = \frac{\partial T}{\partial \lambda_{22}^M},$$

которые можно получить, продифференцировав задачу (1)-(4) по соответствующим параметрам  $\lambda_{11}^1, \dots, \lambda_{11}^M, \lambda_{22}^1, \dots, \lambda_{22}^M, \lambda_{12}^1, \dots, \lambda_{12}^M$ .

Продифференцируем уравнения задачи (1)-(4) по параметру  $\lambda_{11}^p$ , получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( N_p(T) + \sum_{m=1}^M \lambda_{11}^m \frac{\partial N_m(T)}{\partial \lambda_{11}^p} \right) \frac{\partial T}{\partial x} + \left( \sum_{m=1}^M \lambda_{11}^m N_m(T) \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial \lambda_{11}^p} \right) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \sum_{m=1}^M \lambda_{12}^m \frac{\partial N_m(T)}{\partial \lambda_{11}^p} \right) \frac{\partial T}{\partial y} + \left( \sum_{m=1}^M \lambda_{12}^m N_m(T) \right) \left( \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial \lambda_{11}^p} \right) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \sum_{m=1}^M \lambda_{12}^m \frac{\partial N_m(T)}{\partial \lambda_{11}^p} \right) \frac{\partial T}{\partial x} + \left( \sum_{m=1}^M \lambda_{12}^m N_m(T) \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial \lambda_{11}^p} \right) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \sum_{m=1}^M \lambda_{22}^m \frac{\partial N_m(T)}{\partial \lambda_{11}^p} \right) \frac{\partial T}{\partial y} + \left( \sum_{m=1}^M \lambda_{22}^m N_m(T) \right) \left( \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial \lambda_{11}^p} \right) \right] = c\rho \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T}{\partial \lambda_{11}^p} \right), \end{aligned}$$

$$x \in [0; l_1], \quad y \in [0; l_2], \quad t > 0; \quad (23)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \lambda_{11}^p}(x, 0, t) = \frac{\partial T}{\partial \lambda_{11}^p}(x, l_2, t) = \frac{\partial T}{\partial \lambda_{11}^p}(0, y, t) = \frac{\partial T}{\partial \lambda_{11}^p}(l_1, y, t) = 0, \quad (24)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \lambda_{11}^p}(x, y, 0) = 0. \quad (25)$$

Заменяя в (23)-(25)  $\frac{\partial T}{\partial \lambda_{11}^p} = u^p(x, y, t)$  и  $\tilde{\lambda}_{11}(T) = \sum_{m=1}^M \lambda_{11}^m N_m(T)$ , получим следующую начально-краевую дифференциальную задачу относительно неизвестной функции  $u^p(x, y, t)$ :

начально-краевую дифференциальную задачу относительно неизвестной функции  $u^p(x, y, t)$ :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( N_p(T) + \sum_{m=1}^M \lambda_{11}^m \frac{\partial N_m(T)}{\partial \lambda_{11}^p} \right) \frac{\partial T}{\partial x} + \tilde{\lambda}_{11}(T) \left( \frac{\partial u^p}{\partial x} \right) \right] + \\
& + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \sum_{m=1}^M \lambda_{12}^m \frac{\partial N_m(T)}{\partial \lambda_{11}^p} \right) \frac{\partial T}{\partial y} + \tilde{\lambda}_{12}(T) \left( \frac{\partial u^p}{\partial y} \right) \right] + \\
& + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \sum_{m=1}^M \lambda_{12}^m \frac{\partial N_m(T)}{\partial \lambda_{11}^p} \right) \frac{\partial T}{\partial x} + \tilde{\lambda}_{12}(T) \left( \frac{\partial u^p}{\partial x} \right) \right] + \\
& + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \sum_{m=1}^M \lambda_{22}^m \frac{\partial N_m(T)}{\partial \lambda_{11}^p} \right) \frac{\partial T}{\partial y} + \tilde{\lambda}_{22}(T) \left( \frac{\partial u^p}{\partial y} \right) \right] = c\rho \frac{\partial u^p}{\partial t},
\end{aligned}$$

$$x \in [0; l_1], \quad y \in [0; l_2], \quad t > 0; \quad (26)$$

$$u^p(x, 0, t) = u^p(x, l_2, t) = u^p(0, y, t) = u^p(l_1, y, t) = 0, \quad (27)$$

$$u^p(x, y, 0) = 0. \quad (28)$$

Аналогично продифференцировав задачу (1)-(4) по параметрам  $\lambda_{12}^p, \lambda_{22}^p$  и сделав обозначения  $\partial T / \partial \lambda_{12}^p = v^p(x, y, t)$  и  $\partial T / \partial \lambda_{22}^p = w^p(x, y, t)$ , получим следующие начально-краевые дифференциальные задачи относительно неизвестных функций  $v^p(x, y, t)$  и  $w^p(x, y, t)$  соответственно:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \sum_{m=1}^M \lambda_{11}^m \frac{\partial N_m(T)}{\partial \lambda_{12}^p} \right) \frac{\partial T}{\partial x} + \tilde{\lambda}_{11}(T) \left( \frac{\partial v^p}{\partial x} \right) \right] + \\
& + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( N_p(T) + \sum_{m=1}^M \lambda_{12}^m \frac{\partial N_m(T)}{\partial \lambda_{12}^p} \right) \frac{\partial T}{\partial y} + \tilde{\lambda}_{12}(T) \left( \frac{\partial v^p}{\partial y} \right) \right] + \\
& + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( N_p(T) + \sum_{m=1}^M \lambda_{12}^m \frac{\partial N_m(T)}{\partial \lambda_{12}^p} \right) \frac{\partial T}{\partial x} + \tilde{\lambda}_{12}(T) \left( \frac{\partial v^p}{\partial x} \right) \right] + \\
& + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \sum_{m=1}^M \lambda_{22}^m \frac{\partial N_m(T)}{\partial \lambda_{12}^p} \right) \frac{\partial T}{\partial y} + \tilde{\lambda}_{22}(T) \left( \frac{\partial v^p}{\partial y} \right) \right] = c\rho \frac{\partial v^p}{\partial t},
\end{aligned}$$

$$x \in [0; l_1], \quad y \in [0; l_2], \quad t > 0; \quad (29)$$

$$v^p(x, 0, t) = v^p(x, l_2, t) = v^p(0, y, t) = v^p(l_1, y, t) = 0; \quad (30)$$

$$v^p(x, y, 0) = 0. \quad (31)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \sum_{m=1}^M \lambda_{11}^m \frac{\partial N_m(T)}{\partial \lambda_{22}^p} \right) \frac{\partial T}{\partial x} + \tilde{\lambda}_{11}(T) \left( \frac{\partial w^p}{\partial x} \right) \right] + \\
& + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \sum_{m=1}^M \lambda_{12}^m \frac{\partial N_m(T)}{\partial \lambda_{22}^p} \right) \frac{\partial T}{\partial y} + \tilde{\lambda}_{12}(T) \left( \frac{\partial w^p}{\partial y} \right) \right] + \\
& + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \sum_{m=1}^M \lambda_{12}^m \frac{\partial N_m(T)}{\partial \lambda_{22}^p} \right) \frac{\partial T}{\partial x} + \tilde{\lambda}_{12}(T) \left( \frac{\partial w^p}{\partial x} \right) \right] + \\
& + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( N_p(T) + \sum_{m=1}^M \lambda_{22}^m \frac{\partial N_m(T)}{\partial \lambda_{22}^p} \right) \frac{\partial T}{\partial y} + \tilde{\lambda}_{22}(T) \left( \frac{\partial w^p}{\partial y} \right) \right] = c\rho \frac{\partial w^p}{\partial t},
\end{aligned}$$

$$x \in [0; l_1], \quad y \in [0; l_2], \quad (32)$$

$$w^p(x, 0, t) = w^p(x, l_2, t) = w^p(0, y, t) = w^p(l_1, y, t) = 0, \quad (33)$$

$$w^p(x, y, 0) = 0. \quad (34)$$

Задачи (26)-(28), (29)-(31) и (32)-(34) решаются совместно с прямой задачей (1)-(4) с помощью метода переменных направлений с экстраполяцией, причем на каждом временном слое используются значения температур, найденных при решении прямой задачи (1)-(4). Таким образом, одновременно находятся элементы матрицы (18) и компоненты вектора (20), которые подставляются в выражение (22).

Фундаментальной проблемой при решении обратных задач является корректность метода решения [1,5], поскольку коэффициентные обратные задачи зачастую могут быть некорректными, особенно при использовании экспериментальных значений с погрешностями. Здесь можно использовать метод регуляризации Тихонова А.Н. [10], однако сложно подобрать параметры регуляризации. С другой стороны, если экспериментальные значения считать точными, то можно доказать теоремы о достаточных условиях существования и единственности обратной коэффициентной задачи теплопроводности [4]. Более конструктивным подходом является численный эксперимент, когда при решении обратной задачи к экспериментальным значениям добавляются погрешности до тех величин, пока решение не станет неустойчивым. Именно такой подход и предлагается в данной работе.

#### 4. Результаты численных решений

В качестве иллюстрации работоспособности изложенного метода и программного комплекса восстанавливаются нелинейные компоненты тензора теплопроводности углерод-углеродного композитного материала с армированным однонаправлено непрерывным волокном под углом  $\varphi = 30^\circ$  к одной из границ пластины.

Главные компоненты тензора теплопроводности имели следующие функциональные зависимости:

$$\lambda_\xi(T) = 0.46875 \cdot 10^{-5} T^2 - 0.625 \cdot 10^{-2} T + 5.0625;$$

$$\lambda_{\eta}(T) = -0.625 \cdot 10^{-5} T^2 + 0.0125T - 4.25.$$

Используя соотношения (6), получим функциональные зависимости для компонентов тензора

$$\lambda_{11}(T) = 0.1953125 \cdot 10^{-5} T^2 - 0.15625 \cdot 10^{-2} T + 2.734375;$$

$$\lambda_{22}(T) = -0.3515625 \cdot 10^{-5} T^2 + 0.78125 \cdot 10^{-2} T - 1.921875;$$

$$\lambda_{12}(T) = 0.4736076428 \cdot 10^{-5} T^2 - 0.8118988162 \cdot 10^{-2} T + 4.032430788.$$

Для решения прямой задачи с граничными условиями  $T|_{\Gamma} = T_{\max} = 1400\text{K}$ ,  $T(x, y, 0) = T_{\min} = 600\text{K}$  принимались следующие входные данные:

$c_p = 2.25 \cdot 10^6$  Дж/(м<sup>3</sup>·К),  $l_1 = 0.1$  м;  $l_2 = 0.06$  м. Экспериментальные значения температур вычислялись по этим входным данным при решении задачи (1)–(4) в точках  $x_i = \{0, 01; 0, 05; 0, 09\}$ ,  $y_j = \{0, 004; 0, 012; 0, 02\}$  в моменты времени  $t^k = 30$  с, 40 с, 50 с, 60 с, 70 с, 80 с, 90 с, 100 с.

Температурный интервал разбивался на три элемента ( $M=4$ ):  $T_m = \{600; 900; 1100; 1400\}$ ,  $m=1, \dots, 4$ . Таким образом, определяются 12 искомым параметров:  $\lambda_{11}^m$ ,  $\lambda_{22}^m$ ,  $\lambda_{12}^m$ ,  $m=1, \dots, 4$ .

В табл.1 приведен итерационный процесс по восстановлению коэффициентов  $\lambda_{11}^1$ ,  $\lambda_{22}^1$ ,  $\lambda_{12}^1$ ,  $\lambda_{11}^3$ ,  $\lambda_{22}^3$ ,  $\lambda_{12}^3$  без погрешностей в экспериментальных данных  $\tilde{T}_{i,k}$ , а в табл.2 – то же с добавленной абсолютной погрешностью в интервале  $|\Delta \tilde{T}_{i,k}| \leq 5\text{K}$  с равномерным распределением.

**Таблица 1.** Итерационный процесс без погрешностей в  $\tilde{T}_{i,k}$ .

Номер итерации	$S$	$\lambda_{11}^1$	$\lambda_{22}^1$	$\lambda_{12}^1$	$\lambda_{11}^3$	$\lambda_{22}^3$	$\lambda_{12}^3$	$\alpha_n$
0	406181	2	2	0	2	2	0	1
1	12342.1	2.84631	1.54525	0.718053	2.98039	2.41681	0.565249	1.2
2	203.876	2.18072	1.55032	0.824741	3.68822	2.44946	0.939521	1.44
3	7.1019	2.42013	1.55114	0.798976	3.44452	2.45603	0.840014	1.728
4	5.96245	2.44688	1.55192	0.802904	3.44453	2.45661	0.850996	2.073
5	5.96186	2.4473	1.55199	0.802965	3.44458	2.45666	0.851008	2.488
6	5.96186	2.4473	1.55199	0.802966	3.44458	2.45666	0.851009	2.985

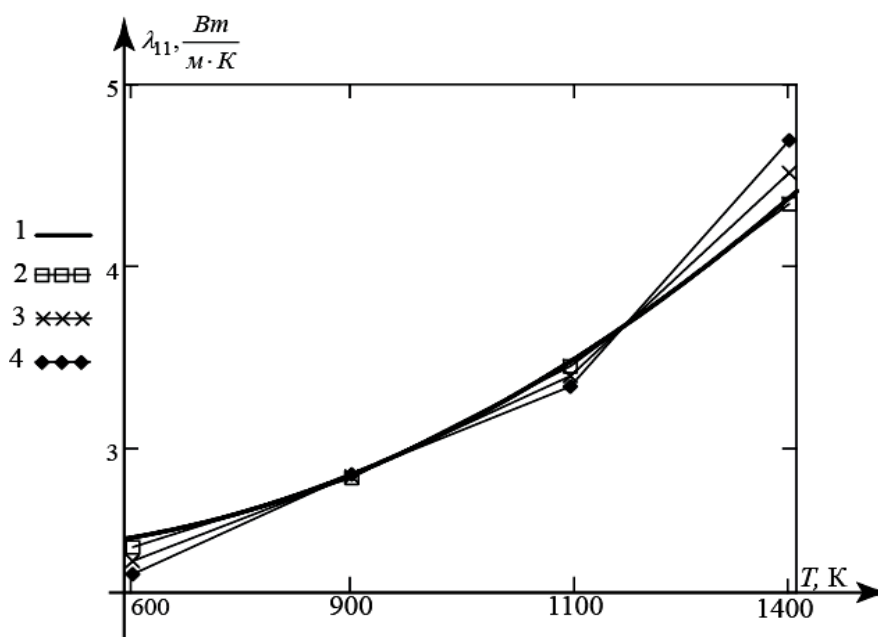
Из табл.1, 2 видно, что функционал стремится в обоих случаях к стационарному значению. Начальные значения искомым параметров значительно (в 2–3 раза) отличаются от искомым, и тем не менее итерационный процесс сходится с приемлемой скоростью

(за 6-7 итераций). Причем параметры на нулевой итерации выбраны из предположения, что материал исследуемой пластины является изотропным с теплопроводностью  $\lambda = 2 \text{ Вт/м}\cdot\text{К}$ .

На рис.1, 2, 3 приведены графики нелинейных коэффициентов тензора теплопроводности, восстановленные по экспериментальным значениям без погрешности (кривая 2), с учетом погрешностей в экспериментальных значениях температур  $\tilde{T}_{i,k}$  (кривая 3 –  $\Delta\tilde{T}_{i,k} \in [-5\text{К}; 5\text{К}]$ , кривая 4 –  $\Delta\tilde{T}_{i,k} \in [-10\text{К}; 10\text{К}]$ ), а также приведены нелинейные коэффициенты, заложенные в экспериментальные значения  $\tilde{T}_{i,j}^k$  (кривая 1).

**Таблица 2.** Итерационный процесс с добавленной погрешностью в  $\tilde{T}_{i,k}$ .

Номер итерации	$S$	$\lambda_{11}^1$	$\lambda_{22}^1$	$\lambda_{12}^1$	$\lambda_{11}^3$	$\lambda_{22}^3$	$\lambda_{12}^3$	$\alpha_n$
0	412407	2	2	0	2	2	0	1
1	13107	2.82382	1.38153	0.720785	2.85262	2.38604	0.444623	1.2
2	1144.68	1.98963	1.3996	0.820823	3.70417	2.41087	0.944771	1.44
3	595.848	2.28734	1.39834	0.755414	3.40942	2.41461	0.738225	1.728
4	569.87	2.37226	1.39837	0.781108	3.3967	2.40425	0.816026	2.073
5	569.418	2.36953	1.39864	0.779428	3.38991	2.40567	0.809205	2.488
6	569.489	2.37102	1.39862	0.779979	3.39048	2.40538	0.810346	2.985
7	569.489	2.37066	1.39861	0.779769	3.39037	2.40542	0.810189	3.583



**Рис.2.** Восстановленный компонент  $\lambda_{11}(T)$  тензора теплопроводности при наличии погрешностей в определении экспериментальных значений  $\tilde{T}_{i,k}$ .

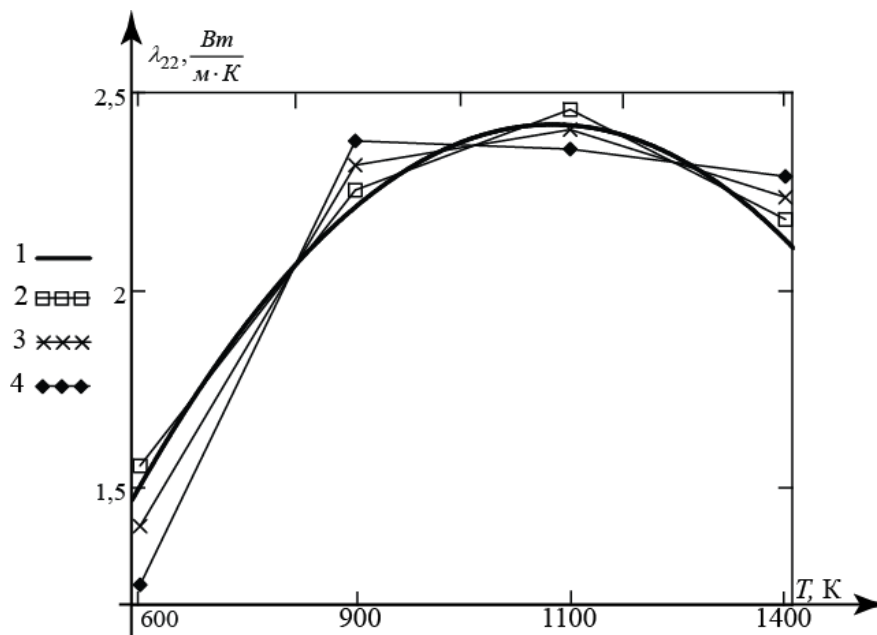


Рис.3. Восстановленный компонент  $\lambda_{22}(T)$  тензора теплопроводности при наличии погрешностей в определении экспериментальных значений  $\tilde{T}_{i,k}$ .

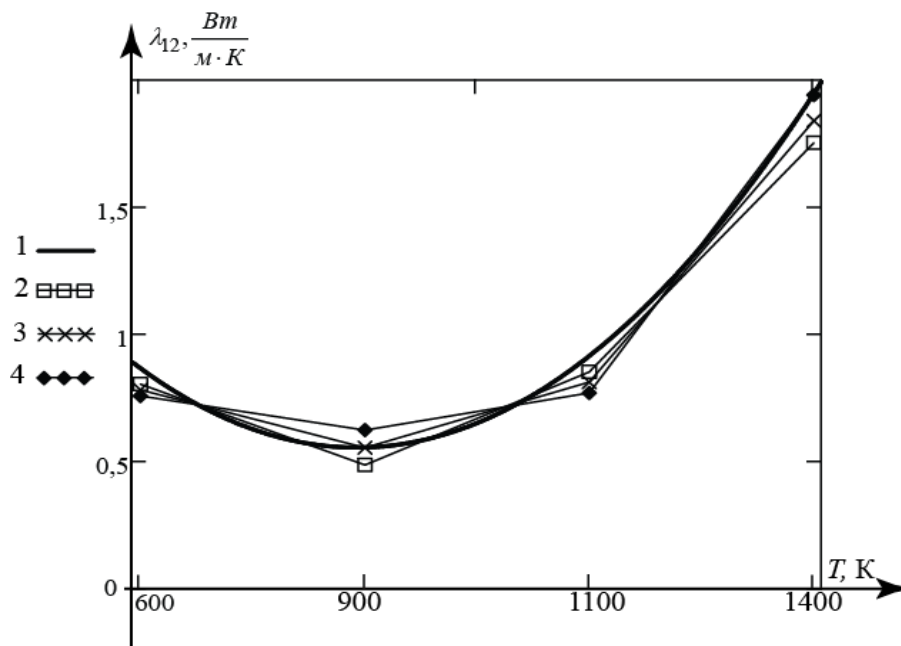


Рис.4. Восстановленный компонент  $\lambda_{12}(T)$  тензора теплопроводности при наличии погрешности в определении экспериментальных значений  $\tilde{T}_{i,k}$ .

Из рисунков видно, что, несмотря на добавленную погрешность в экспериментальные данные, восстановленные компоненты тензора теплопроводности достаточно точно аппроксимируют кривые, соответствующие нелинейным коэффициентам, заложенным в экспериментальные значения  $\tilde{T}_{i,j}^k$ .

## 5. Выводы

В работе предложен универсальный алгоритм численного решения обратной коэффициентной задачи теплопереноса в композиционных анизотропных материалах, абсолютно не зависящий от природы и величин входных данных, которые могут быть изменены в соответствии с физическим экспериментом. Методология основана на методе параметрической идентификации, неявного метода градиентного спуска и на новом экономичном абсолютно устойчивом методе переменных направлений с экстраполяцией численного решения задач теплопереноса, содержащих смешанные производные.

Впервые получены результаты численных экспериментов по восстановлению компонентов тензора теплопроводности углерод-углеродных композиционных теплозащитных материалов, зависящих от температуры. Показана быстрая сходимость итерационного процесса к точным значениям нелинейных компонентов тензора теплопроводности, заложенным в экспериментальные значения температур, включая и случаи наличия погрешностей в этих температурах.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алифанов О.М. Идентификация процессов теплообмена летательных аппаратов (введение в теорию обратных задач теплообмена). – М.: Машиностроение, 1979, 216 с.
2. Beck J.V., Blachwell B., St. Clair C.R. Inverse Heat Conduction. Ill-posed Problems. – N-Y: A. Wiley – Interscience Publication, 1985, 308p.
3. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. – М.: Изд-во ЛКИ, 2009, 480с.
4. Кузнецова Е.Л. Восстановление характеристик тензора теплопроводности на основе аналитического решения задачи теплопереноса в анизотропном полупространстве // Теплофизика высоких температур, 2011, т.49, № 6, с.1–8.
5. Формалев В.Ф. Тепломассоперенос в анизотропных телах. Обзор // Теплофизика высоких температур, 2001, т.39, № 5, с.810–832.
6. Криксин Ю.А., Плющев С.Н., Самарская Е.А., Тишкин В.Ф. Обратная задача восстановления источника для уравнения конвективной диффузии // Математическое моделирование, 1995, т.7, № 11, с.95.
7. Самарский А.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П., Шашков М.Ю. Операторные разностные схемы // Дифференциальные уравнения, 1981, т.17, № 7, с.1317.
8. Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л. Численные методы. – М.: Физматлит, 2004, 400 с.
9. Формалев В.Ф., Колесник С.А., Чипашвили А.А. Численное моделирование теплопереноса в анизотропных телах с разрывными характеристиками // Математическое моделирование, 2004, т.16, №5, с.94-102.
10. Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г. Нелинейные некорректные задачи. – М.: Наука, 1995.

Поступила в редакцию 04.04.2012.