ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 33, 1993 № 11

УДК 519.62

© 1993 г. И. И. ГОЛИЧЕВ

(Уфа)

ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ

Изучается задача на минимизацию квадратичного функционала с управлением на границе и наблюдением на некоторой поверхности. Частным случаем рассматриваемой задачи является задача Коши для эллиптических уравнений и некоторые другие некорректные граничные задачи. Получена итерационная процедура решения рассматриваемой задачи на основе метода итеративной регуляризации, при этом явно находятся параметры итерационного процесса и, используя специфику минимизируемого функционала, удается ускорить сходимость процесса.

В настоящей работе изучается задача на минимизацию квадратичного функционала с управлением на границе и наблюдением на некоторой поверхности. Частным случаем рассматриваемой задачи являются задача Коши для эллиптических уравнений и некоторые другие некорректные граничные задачи.

Тот факт, что решение многих задач математической физики можно свести к решению экстремальных задач, хорошо известен и широко используется. Для решения соответствующих экстремальных задач используются, как правило, градиентные методы. При этом если исходная задача некорректна, то применяются методы регуляризации. В основном используется либо регуляризация на основе метода А. Н. Тихонова, либо регуляризация по числу итераций (см., например, [1]—[5]). В настоящей работе используется регуляризация по методу Тихонова, при этом явно находятся параметры итерационных процессов и, используя дополнительные свойства минимизируемых функционалов, удается ускорить их сходимость.

Изучению задачи Коши для эллиптических уравнений посвящено немало работ, однако в подавляющем большинстве из них рассматривается вопрос единственности решения (см., например, [6]—[8]). Из работ, в которых изучаются приближенные методы решения задачи, отметим прежде всего [2], [8]. В [9] построен итерационный процесс, позволяющий найти решение задачи Коши для уравнения Лапласа. При этом существенно используются свойства гармонических функций, так что предложенный там метод не переносится на случай эллиптических уравнений общего вида.

Обобщение задачи Коши (см. ниже задачу (1.1), (1.7)) рассматривалось в работах [10], [11]. В последней из них также получен итерационный метод решения, однако доказательство сходимости последовательных приближений дано лишь в случае уравнения Лапласа.

§ 1. Связь между задачей Коши и задачей оптимального управления

1. Пусть в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$ функция $u(x)$ является обобщенным решением из $W_2^1(\Omega)$ уравнения

$$\tau[y] = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial y}{\partial x_j} + a_i(x)\, y\right) + b_i(x)\frac{\partial y}{\partial x_i} + c(x)\, y = f \tag{1.1}$$

при условии

$$\frac{\partial y}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} = \tilde\psi \in L_2(\partial\Omega),$$

где

$$\frac{\partial y}{\partial \nu} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} y_{x_j} \cos(n, x_i),$$

n — внешняя нормаль к $\partial\Omega$. Предположим, что $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma$ и функция $\tilde\psi = \psi$ известна на Γ_0, но неизвестна на Γ. Дополнительно известно, что

$$y|_{\Gamma_0} = \varphi. \tag{1.2}$$

Таким образом, требуется найти решение $u(x)$, удовлетворяющее соотношениям (1.1), (1.2):

$$\frac{\partial y}{\partial \nu}\Big|_{\Gamma_0} = \psi, \tag{1.3}$$

и условию

$$\frac{\partial y}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} \in L_2(\partial\Omega). \tag{1.4}$$

Наряду с задачей (1.1)—(1.4) рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$J(v) = \int_{\Gamma_0} |y_v(x) - \varphi|^2 dl \to \inf_{v\in L_2(\Gamma)}, \tag{1.5}$$

где y_v — решение из $W_2^1(\Omega)$ задачи

$$\tau[y] = f, \qquad \frac{\partial y}{\partial \nu}\Big|_{\Gamma_0} = \psi, \qquad \frac{\partial y}{\partial \nu}\Big|_{\Gamma} = v. \tag{1.6}$$

Заметим теперь, что если задача (1.1)—(1.4) имеет решение, то задача (1.4), (1.5) также имеет решение $v^* = \tilde\psi$ на Γ. При этом $J(v^*) = \inf\limits_{v\in L_2(\Gamma)} J(v) = 0$.

Очевидно также, что если $J(v^*) = 0$, то задача (1.1)—(1.4) имеет решение и y совпадает с решением задачи (1.6) при $v = v^*$. Таким образом, если решение задачи (1.1)—(1.4) существует, то ее решение сводится к решению задачи (1.5), (1.6).

2. Выше было отмечено, что в [10], [11] рассматривалось обобщение задачи

Коши, состоящее в том, что требуется найти $y \in W_2^1(\Omega)$, удовлетворяющее уравнению (1.1) и соотношениям

$$\frac{\partial y}{\partial \nu} + \sigma_0 y|_{\Gamma_0} = \psi, \qquad y|_\gamma = \varphi, \tag{1.7}$$

где γ — поверхность размерности $n - 1$, содержащаяся в $\overline{\Omega}$.

Повторяя проведенные выше рассуждения, нетрудно сделать следующий вывод. Если решение задачи (1.1), (1.7) существует, то оно совпадает с решением задачи

$$J(v) = \int_\gamma |y_v(x) - \varphi|^2 dl \to \inf_{v \in L_2(\Gamma)},$$

где y_v — решение уравнения (1.1), удовлетворяющее краевым условиям

$$\frac{\partial y}{\partial \nu} + \sigma_0 y|_{\Gamma_0} = \psi, \qquad \frac{\partial y}{\partial \nu} + \sigma_0 y|_\Gamma = v.$$

§ 2. Итерационная регуляризация метода проекции градиента

1. Для решения поставленных задач оптимального управления будет использован метод, названный в заголовке параграфа и подробно изложенный в [1].

Сформулируем вначале теорему из [1, гл. II, § 9]. Пусть требуется найти

$$\inf_{v \in U} J(v) = J_*.$$

Обозначим $U_* = \{v \in U: J(v) = J_*\}$.

Теорема 1. *Пусть выполняется следующее:*

1) *U — выпуклое замкнутое множество из гильбертова пространства H; функция $J(v)$ выпукла и дифференцируема на U, причем*

$$\|J'(v)\| \le L_0(1 + \|v\|) \ \forall v \in U, \qquad L_0 = \text{const} \ge 0; \tag{2.1}$$

кроме того, $J_* > -\infty$, $U_* \ne \varnothing$;

2) *погрешности в задании приближений $J'_k(v)$ для градиента $J'(v)$ удовлетворяют условию*

$$\|J_k'(v) - J'v)\| \le \delta_k(1 + \|v\|) \quad \forall v \in U, \tag{2.2}$$

$$k = 1, 2, \ldots, \qquad \lim_{k\to\infty} \delta_k = 0;$$

3) *последовательности $\{\delta_k\}$, $\{\alpha_k\}$, $\{\beta_k\}$ таковы, что*

$$\delta_k \ge 0, \qquad \alpha_k > 0. \qquad \beta_k \ge 0, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

$$\lim_{k\to\infty} (\delta_k + \alpha_k, \beta_k) = 0,$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|\alpha_{k+1} - \alpha_k|}{\alpha_k^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{\beta_k}{\alpha_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\delta_k}{\alpha_k} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \beta_k = +\infty.$$

Тогда последовательность $\{w_k\}$, *определенная условием*

(2.3) $$w_{k+1} = P_U \{w_k - \beta [J_k'(w_k) + \alpha_k w_k]\},$$

$$k = 1, 2, \ldots, \qquad w_1 \in U,$$

сходится по норме H *к точке* $u_* \in U_*$ *с минимальной нормой.*

Здесь P_U — оператор проектирования на множество U.

Используя одно дополнительное свойство минимизируемых функционалов $J(v)$, удается выбирать параметры, обеспечивающие более быструю сходимость итерационного процесса (2.3). Кроме того, в некоторых случаях можно найти $P_U v$ лишь приближенно, поэтому вместо итерационного процесса (2.3) рассмотрим следующий:

(2.4) $$v_{k+1} = P_{kv} \{v_k - \beta_k [J'(v_k) + \alpha_k v_k]\},$$

$$k = 1, 2, \ldots, \qquad v_1 \in U,$$

где

(2.5) $$\|P_U(v) - P_{kU}(v)\| \le \gamma_k (1 + \|v\|) \qquad \forall\, v \in U.$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* 1), 2) *теоремы* 1 *и следующие условия:*

3′) *последовательности* $\{\delta_k\}$, $\{\alpha_k\}$, $\{\gamma_k\}$ *таковы, что*

(2.6) $$\alpha_k > 0, \quad \delta_k \ge 0, \quad \gamma_k \ge 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \qquad \lim_{k\to\infty} (\alpha_k + \delta_k + \gamma_k) = 0,$$

(2.7) $$\lim_{k\to\infty} \frac{\alpha_{k+1} - \alpha_k}{\alpha_k^2} = \frac{\delta_k}{\alpha_k} = \frac{\gamma_k}{\alpha_k} = 0,$$

(2.8) $$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = +\infty;$$

4) *существует такой ограниченный самосопряженный оператор* $A = A(u, v)$, *что*

(2.9) $$J'(u) - J'(v) = A(u, v)(u - v) \qquad \forall\, u, v \in U,$$

$$\|A(u, v)\| \le L \qquad \forall\, u, v \in U.$$

Тогда последовательность $\{v_k\}$, *определенная итерационным процессом* (2.4), *где*

$$\beta_k = 2(L + 2\alpha_k)^{-1},$$

сходится по норме H к точке $u_\circ \in U_\circ$ с минимальной нормой при любом начальном приближении v_1.

2. При доказательстве теоремы 2 воспользуемся некоторыми утверждениями, которые легко следуют из известных фактов.

Лемма 1. *Пусть U — выпуклое замкнутое множество из гильбертова пространства H, функция $J(v)$ дифференцируема на U, при любых $u, v \in U$ существует такой линейный оператор $A = A(u, v)$, что*

$$(2.10)\qquad \mu\|h\|^2 \le (Ah, h) \le L\|h\|^2 \qquad \forall\, h \in H,$$

и выполнено соотношение (2.9). Пусть, далее, последовательность $\{u_k\}$ определена с помощью итерационного процесса

$$(2.11)\qquad u_{k+1} = P_U\,[u_k - \beta_k J'(u_k)], \qquad k = 0, 1, \ldots, \qquad u_0 \in H,$$

при $\beta_k = \beta$, $0 < \beta < 2/L$. Тогда

$$\|u_k - u_*\| \le q^k(\beta)\,\|u_0 - u_*\|, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

где

$$q(\beta) = \begin{cases} 1 - \mu\beta & \text{при } 0 < \beta < 2(L+\mu)^{-1}, \\ L\beta^{-1} & \text{при } 2(L+\mu)^{-1} \le \beta < 2L^{-1}, \end{cases}$$

$0 < q(\beta) < 1$, *$u_\circ$ — точка минимума $J(v)$ на U. Наименьшее значение $q(\beta)$ при $0 < \beta < 2L^{-1}$ достигается при $\beta = \beta_\circ = 2(L+\mu)^{-1}$ и равно $q(\beta_\circ) = (L - \mu)(L+\mu)^{-1}$.*

Доказательство леммы проводится совершенно так же, как доказательство аналогичного утверждения в случае $V = E^n$ (см. [12, гл. 5, § 2, теорема 5]).

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы 1, условия (2.2), (2.5), а*

$$v_{k+1} = P_{kU}\,[v_k - \beta J'(v_k)], \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

где $\beta \in (0, 2/L)$. Тогда

$$(2.12)\qquad \|v_{k+1} - u_*\| \le \theta_1 \ldots \theta_k \|v_0 - u_*\| + \Delta_k + \Delta_{k+1}\theta_k +$$
$$+ \Delta_{k-2}\theta_k\theta_{k-1} + \ldots + \Delta_0\theta_k \ldots \theta_1.$$

Здесь $\theta_k = q(\beta) + d_k$, $\Delta_k = d_k(1 + \|u_*\|)$, $d_k = \gamma_k + \beta\gamma_k\xi_k + \beta\delta_k$, $\xi_k = \max\,[L + \delta_k,\ \delta_k + \|J'(0)\|]$.

Доказательство. Обозначим $z_{k+1} = P_U(v - \beta_k J'(v_k))$, $w_{k+1} = P_U(v_k - \beta J'(v_k))$. Тогда, учитывая (2.2), (2.5), получаем, что

$$(2.13)\qquad \|v_{k+1} - z_{k+1}\| \le \gamma_k(1 + \|v_k - \beta J_k'(v_k)\|),$$

$$(2.14)\qquad \|z_{k+1} - w_{k+1}\| \le \beta\delta_k(1 + \|v_k\|).$$

Принимая во внимание (2.2), (2.9), (2.10), получаем

$$(2.15)\qquad \|J_k'(u)\| \le (L + \delta_k)\|u\| + \delta_k + \|J'(0)\|.$$

В силу леммы 1,

(2.16) $\|w_{k+1} - u_*\| \le q(\beta)\, \|v_k - u_*\|$.

Учитывая оценки (2.13)—(2.16), находим

$$\|v_{k+1} - u_*\| \le \|v_{k+1} - z_{k+1}\| + \|z_{k+1} - w_{k+1}\| +$$
$$+ \|w_{k+1} - u_*\| \le \gamma_k\, [1 + \|v_k\| + \beta\,(L + \delta_k)\, \|v_k\| +$$
$$+ \beta\,(\delta_k + \|U'(0)\|)] + \beta\delta_k\,(1 + \|v_k\|) + q(\beta) \times$$
$$\times \|v_k - u_*\| \le (\gamma_k + \beta\gamma_k\xi_k + \beta\delta_k)\,(1 + \|v_k\|) + q(\beta)\, \|v_k - u_*\|.$$

Заметим, что $\|v_k\| \le \|v_k - u_*\| + \|u_*\|$, поэтому

$$\|v_{k+1} - u_*\| \le (q(\beta) + d_k)\, \|v_k - u_*\| + d_k\,(1 + \|u_*\|).$$

Из последнего неравенства следует оценка (2.12).

Доказательство теоремы 2 проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 1.2 из [1, гл. 2, § 9].

Обозначим через u_k решение задачи

$$T_{\alpha_k}(v) = J(v) + \frac{\alpha_k}{2}\, \|v\|^2 \to \inf, \qquad v \in U.$$

При доказательстве названных выше теорем установлено, что

(2.17) $\lim\limits_{k\to\infty} \|u_k - u_*\| = 0$,

(2.18) $\|u_{k+1} - u_k\| \le c_1\, |\alpha_{k+1} - \alpha_k|\, \alpha_k^{-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots.$

Учитывая лемму 2, получаем, что

(2.19) $\|v_{k+1} - u_k\| \le (q_k + d_k)\, \|v_k - u_k\| + \Delta_k$,

где $q_k = L\,(L + 2\alpha_k)^{-1} = 1 - 2\alpha_k\,(L + 2\alpha_k)^{-1}$,

$$d_k = \gamma_k + \gamma_k\beta_k\xi_k + \beta_k\delta_k, \qquad \xi_k = \max\,[L, \|U'(0)\|] + \delta_k,$$
$$\Delta_k = d_k\,(1 + \|u_k\|).$$

Полагаем $s_k = 2\alpha_k\,(L + 2\alpha_k)^{-1} - d_k$, $b_k = \Delta_k + c_1\,(\alpha_{k+1} - \alpha_k)\,\alpha_k^{-1}$. Тогда, учитывая (2.18), (2.19), получаем, что

$$\|v_{k+1} - u_{k+1}\| \le \|v_{k+1} - u_k\| + \|u_{k+1} - u_k\| \le$$
$$\le (1 - s_k)\, \|v_k - u_k\| + b_k.$$

Если выполнены условия (2.6)—(2.8), то $s_k > 0$ при достаточно больших k,

$$\sum_{k=1}^{\infty} s_k = \infty, \qquad \lim_{k\to\infty}\,(b_k/s_k) = 0.$$

Тогда выполнены условия леммы 6 из [12, гл. 2, § 3] и по этой лемме $\lim\limits_{k\to\infty} \| v_k - u_k \| = 0$. Вместе с соотношением (2.17) это доказывает теорему.

Замечания. 1. Можно положить, например, $\alpha_k = k^{-p}$, где $p \in (0, 1)$.

2. Из доказательства теоремы 2 видно, что условие (2.2) достаточно проверить на последовательности $\{v_k\}_{k=0}^{\infty}$, а условие (2.5) — на последовательности $\{d_k\}_{k=0}^{\infty}$, где $d_k = v_k - \beta_k [J'_k(v_k) + \alpha_k v_k]$.

§ 3. Задача с граничным управлением

В п. 1 из § 1 было показано, что задача Коши для эллиптического уравнения (1.1)—(1.4) сводится к задаче оптимального управления (1.5), (1.6) с управлением на границе. Ниже рассмотрим задачу, частным случаем которой является задача (1.5), (1.6).

Пусть γ — кусочно-гладкая поверхность размерности $n-1$, $\gamma \in \overline{\Omega}$, Ω — область в $\mathbb{R}^n$, а Γ — либо часть, либо вся граница $\partial\Omega$ области Ω. Предполагаем, что поверхность $\partial\Omega$ кусочно-гладкая. Через P_γ (P_Γ) обозначим след функции $z \in W_2^1(\Omega)$ на γ (Γ).

Изучается следующая задача: найти

(3.1)
$$\inf_v T_\alpha(v), \qquad T_\alpha(v) = \frac{1}{2} \int_\gamma |CP_\gamma y_v - z|^2 dl + \frac{\alpha}{2} \int_\Gamma |v|^2 dl,$$

где y_v — обобщенное решение из $W_2^1(\Omega)$ задачи

(3.2)
$$\tau[y] = f, \qquad \frac{\partial y}{\partial n_\tau} + \sigma y|_{\partial\Omega} = \psi + Bv,$$

(3.3)
$$v \in U,$$

где U — выпуклое замкнутое множество в $L_2(\Gamma)$, $C \in \mathcal{L}(L_2(\gamma), L_2(\gamma))$, $B \in \mathcal{L}(L_2(\Gamma), L_2(\Gamma))$ ($\mathcal{L}(E_1, E_2)$ — множество ограниченных линейных операторов из пространства E_1 в E_2), $f \in L_2(\Omega)$, $\psi \in L_2(\partial\Omega)$, $\sigma \in L_\infty(\partial\Omega)$, $Bv \equiv 0$ на $\Gamma_0 = \partial\Omega \setminus \Gamma$.

Предположим также, что функции a_{ij}, a_i, b_i, c вещественны, принадлежат $L_\infty(\Omega)$, $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, выполнено условие равномерной эллиптичности

(3.4)
$$a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \alpha_0 \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2$$

для любого $x \in \Omega$ и любых вещественных параметров $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

Напомним, что обобщенным решением из $W_2^1(\Omega)$ задачи (2.1) называется элемент $y \in W_2^1(\Omega)$, удовлетворяющий интегральному тождеству

$$\tau(y, z) + \int_{\partial\Omega} \sigma yz dl = \int_\Omega fz dx + \int_{\partial\Omega} (\psi + Bv) z dl \qquad \forall\, z \in W_2^1(\Omega),$$

где

$$\tau(y, z) = \int_\Omega (a_{ij} y_{x_j} z_{x_i} + a_i y z_{x_i} + b_i y_{x_i} z + cyz)\, dx.$$

Замечание 3. Легко видеть, что если $\gamma = \Gamma_0$, $\psi \equiv 0$ на Γ, $C = I$, $Bv = v$ на Γ и $Bv \equiv 0$ на Γ_0, $U = L_2(\Gamma)$, $\alpha = 0$, то задача (3.1), (3.3) совпадает с задачей (1.5), (1.6).

1. Прежде чем сформулировать теорему, сделаем некоторые замечания и введем обозначения.

Известно (см. [4, с. 27]), что существуют постоянные β_γ и β_Γ, зависящие от поверхностей γ, Γ и области Ω, такие, что

(3.5) $$\int_\gamma |y|^2 dl \le \beta_\gamma^2 \|y\|^2_{W_2^1(\Omega)}, \qquad \int_\Gamma |y|^2 dl \le \beta_\Gamma^2 \|y\|^2_{W_2^1(\Omega)}.$$

Обозначим через A_Γ оператор, который ставит в соответствие функции $\varphi \in L_2(\Gamma)$ решение $y = A_\Gamma\varphi$ из $W_2^1(\Omega)$ задачи

(3.6) $$\tau[y] = 0, \qquad \frac{\partial y}{\partial n_\tau} + \sigma y|_{\partial\Omega} = \tilde{\varphi},$$

где $\tilde{\varphi} = \varphi$ на Γ и $\tilde{\varphi} = 0$ на Γ_0. Положим $K = P_\gamma A_\Gamma$.

Покажем, что

(3.7) $$\|K\varphi\|_{L_2(\gamma)} \le \mu \|\varphi\|_{L_2(\Gamma)},$$

где $\mu = \beta_\gamma \beta_\Gamma \delta^{-1}$, если $\sigma \ge 0$ и

(3.8) $$\tau(y, y) \ge \delta \|y\|^2_{W_2^1(\Omega)} \qquad \forall y \in W_2^1(\Omega)$$

при некотором $\delta > 0$.

Действительно, энергетическое соотношение для решения задачи (3.6) имеет вид

$$\tau(y, y) + \int_{\partial\Omega} \sigma |y|^2 dl = \int_\Gamma \varphi y dl.$$

Учитывая условие $\sigma \ge 0$ и неравенства (3.8), (3.5), получаем неравенство (3.7).

Полагаем теперь

(3.9) $$L = \|B\|^2 \|C\|^2 \beta_\gamma^2 \beta_\Gamma^2 \delta^{-2}.$$

2. Для вычисления градиента функционала $J(v) = \frac{1}{2}\int_\gamma |CP_\gamma y - z|^2 dl$ потребуется найти оператор, сопряженный к K.

Через $(\cdot, \cdot)$, $\|\cdot\|$ обозначим скалярное произведение и норму в $L_2(\Omega)$. Полагаем далее

$$\tau^*[p] = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_j} + b_i p\right) + a_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + cp,$$

а распределение $\delta_\gamma(x)\varphi(s)$, где $\varphi(s) \in L_2(\gamma)$, понимается в следующем смысле:

$$\int_\Omega \delta_\gamma(x)\varphi(s) g(x)\, dx = \int_\gamma \varphi(s) g(s)\, ds \qquad \forall g \in W_2^1(\Omega).$$

Лемма 3. *Пусть оператор* K^* *ставит в соответствие функции* $\varphi \in L_2(\gamma)$ *след на* Γ *решения задачи*

$$\tau^* [p] = \delta_\gamma (x)\, \varphi, \qquad \frac{\partial p}{\partial n_{\tau^*}} + \sigma p|_{\partial\Omega} = 0,$$

тогда K^* *является сопряженным к* K.

Подробное доказательство данной леммы можно найти в [13].

3. Теперь нетрудно найти градиент функционала $T_\alpha(v)$. Пусть $\Delta y = y_{v+\Delta v} - y_v$. В силу определения оператора A_Γ находим, что

$$\Delta y = A_\Gamma B \Delta v, \qquad y_v = A_\Gamma (Bv + \psi).$$

Откуда получаем, что

$$T_0 (v + \Delta v) - T_0 (v) = (CP_\gamma y_v - z, CP_\gamma \Delta y)_{L_2(\gamma)} + o\,(\|\Delta v\|_{L_2(\Gamma)}) =$$

$$= (CK (Bv + \psi) - z, CKB\Delta v) + o\,(\|\Delta v\|_{L_2(\Gamma)}) = (B^* K^* C^* \times$$

$$\times [CK (Bv + \psi) - z], \Delta v)_{L_2(\Gamma)} + o\,(\|\Delta v\|_{L_2(\Gamma)}).$$

Таким образом,

$$T_0' (v) = B^* K^* C^* [CK (Bv + \psi) - z].$$

Легко заметить, что выполнено условие 4) теоремы 2, где

$$U = L_2 (\Gamma), \qquad A (u, v) = B^* K^* C^* CKB \qquad \forall\, u, v \in L_2 (\Gamma).$$

Учитывая оценку (3.7) и определение постоянной L в (3.9), получаем, что

$$\|A (u, v)\| = \|CKB\|^2 \le L \qquad \forall\, u, v \in L_2 (\Gamma).$$

4. Если $\alpha > 0$, то для решения задачи (3.1)—(3.3) используем итерационный процесс (2.11), где $\beta_k = 2(L + \alpha)^{-1}$. Если $\alpha = 0$, то $T_0(v) = J(v)$. Тогда для решения задачи (3.1)—(3.3) используем итерационный процесс (2.4). Предположим вначале, что значения операторов C, K, B, P_v вычисляются точно, тогда $\delta_k = 0$, $\gamma_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, и процесс (2.4) примет следующий вид:

(3.10)
$$v_{k+1} = P_U (v_k - \beta_k \{B^* K^* C^* [CK (Bv_k + \psi) - z] +$$
$$+ \alpha_k v_k\}), \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

Обозначим $y_k = KB(v_k + \psi)$. Тогда y_k — решение задачи

(3.11)
$$\tau [y_k] = f (x), \qquad \frac{\partial y}{\partial n_\tau} + \sigma y|_{\partial\Omega} = \psi + Bv_k.$$

Пусть p_k — решение задачи

(3.12)
$$\tau^* [p_k] = \delta_\gamma (x)\, C^* (Cy_k - z), \qquad \frac{\partial p_k}{\partial n_{\tau^*}} + \sigma p|_{\partial\Omega} = 0.$$

В этом случае итерационный процесс (3.10) запишется в виде

$$v_{k+1} = P_U\,[v_k - \beta_k\,(B^* P_\Gamma p_k + \alpha_k v_k)\,], \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{3.13}$$

а итерационный процесс (2.11) примет вид

$$v_{k+1} = P_U\,[v_k - \beta\,(B^* P_\Gamma p_k + \alpha v_k)\,], \qquad k = 1, 2, \ldots . \tag{3.14}$$

Обозначим через $J_\circ$ множество решений задачи (3.1)—(3.3).

Т е о р е м а 3. *Пусть выполнены условия* (3.4), (3.8); *тогда верно следующее.*

1. *Если $\alpha > 0$, то задача* (3.1)—(3.3) *имеет единственное решение $v^* \in \overset{\circ}{U}$ и последовательность $\{v_k\}_{k=1}^\infty$, определенная итерационным процессом* (3.11), (3.12), (3.14), *где $\beta = 2(L+\alpha)^{-1}$, при любом $v_1 \in L_2(\Gamma)$ сходится к v^* при $k \to \infty$ в $L_2(\Gamma)$ с оценкой*

$$\|v_k - v^*\|_{L_2(\Gamma)} \le \left(\frac{L-\alpha}{L+\alpha}\right)^k \|v_1 - v^*\|_{L_2(\Gamma)}.$$

2. *Если $\alpha = 0$ и $J_\circ \ne \varnothing$, то последовательность $\{v_k\}_{k=1}^\infty$, определенная итерационным процессом* (3.11)—(3.13), *где $\beta_k = 2(L+\alpha_k)^{-1}$:*

$$\alpha_k > 0, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \infty, \qquad \lim_{k\to\infty} \frac{\alpha_{k+1} - \alpha_k}{\alpha_k^2} = 0, \tag{3.15}$$

при любом $v_0 \in L_2(\Gamma)$ сходится по норме $L_2(\Gamma)$ к элементу из $J_\circ$ с минимальной нормой.

Вследствие замечания 3 и эквивалентности задач Коши и (1.5), (1.6) получается

Т е о р е м а 4. *Пусть выполнены условия* (3.4), (3.8), *задача* (1.1)—(1.4) *имеет единственное решение $y = W_2^1(\Omega)$.*

Пусть, далее, $v^* = P_\Gamma y$, а последовательности $\{y_k\}_{k=1}^\infty$, $\{v_k\}_{k=1}^\infty$, $\{p_k\}_{k=1}^\infty$ определены с помощью итерационного процесса

$$\tau\,[y_k] = f, \qquad \frac{\partial y_k}{\partial n_\tau}\Big|_{\Gamma_0} = \psi, \qquad \frac{\partial y_k}{\partial n_\tau}\Big|_{\Gamma} = v_k, \tag{3.16}$$

$$\tau^*\,[p_k] = 0, \qquad \frac{\partial p_k}{\partial n_{\tau^*}}\Big|_{\Gamma_0} = P_{\Gamma_0} y_k - z, \qquad \frac{\partial p_k}{\partial n_{\tau^*}}\Big|_{\Gamma} = 0, \tag{3.17}$$

$$v_{k+1} = v_k - \beta_k\,(P_\Gamma p_k + \alpha_k v_k), \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

где $\beta_k = 2\,(L+\alpha_k)^{-1}$, а $\{\alpha_k\}_{k=1}^\infty$ удовлетворяет условиям (3.15). *Тогда при любом $v_1 \in L_2(\Gamma)$.*

$$\lim_{k\to\infty} \|v_k - v^*\|_{L_2(\Gamma)} = 0, \tag{3.18}$$

$$\lim_{k\to\infty} \|y_k - y\|_{W_2^1(\Omega)} = 0. \tag{3.19}$$

Отметим, что в данном случае $\gamma = \Gamma_0$.

Вопрос о единственности решения задачи Коши рассматривался в большом числе работ (см., например, [6], [7]).

Заметим теперь, что задачи (3.16), (3.17) можно решать лишь приближенно. Поэтому возникает вопрос о том, с какой точностью нужно решать указанные задачи, чтобы гарантировать выполнение соотношений (3.18), (3.19).

Пусть

$$\|P_{\Gamma_0}(\bar{y}_k - y_k)\|_{L_2(\Gamma)} \le \mu_k(1 + \|v_k\|_{L_2(\Gamma)}).$$

Обозначим через p_k' решение задачи (3.17) при $y_k = \bar{y}_k$, и пусть

(3.20) $$\|P_\Gamma(\bar{p}_k - p_k')\|_{L_2(\Gamma)} \le \mu_k.$$

Полагаем

(3.21) $$v_{k+1} = v_k - \beta_k(P_\Gamma \bar{p}_k + \alpha_k v_k).$$

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы* 4 *и*

(3.22) $$\lim_{k\to\infty}(\mu_k/\alpha_k) = 0.$$

Тогда при любом $v_1 \in L_2(\Gamma)$ *выполнены соотношения* (3.18), (3.19).

Доказательство. Для доказательства теоремы, в силу теоремы 2 и замечания 2, достаточно установить, что

(3.23) $$\|J'(v_k) - J_k'(v_k)\| = \|P_\Gamma(p_k - \bar{p}_k)\|_{L_2(\Gamma)} \le \delta_k(1 + \|v_k\|_{L_2(\Gamma)}),$$

где

(3.24) $$\lim_{k\to\infty}(\delta_k/\alpha_k) = 0.$$

Действительно,

(3.25) $$\|P_\Gamma(p_k - \bar{p}_k)\|_{L_2(\Gamma)} \le \|P_\Gamma(p_k - \bar{p}_k')\|_{L_2(\Gamma)} + \|P_\Gamma(p_k' - \bar{p}_k)\|_{L_2(\Gamma)}.$$

Заметим, что $\Delta p_k = p_k - p'_k$ — решение задачи

$$\tau^*[\Delta p_k] = 0, \qquad \frac{\partial \Delta p_k}{\partial n_{\tau^*}}\bigg|_{\Gamma_0} = P_{\Gamma_0}(y_k - \bar{y}_k), \qquad \frac{\partial \Delta p_k}{\partial n_{\tau^*}}\bigg|_{\Gamma_0} = 0$$

и, следовательно, удовлетворяет энергетическому соотношению

$$\tau(\Delta p_k, \Delta p_k) = \int_{\Gamma_0}(y_k - \bar{y}_k)\,\Delta p_k dl.$$

Отсюда находим, что

$$\delta\,\|\Delta p_k\|^2_{W_2^1(\Omega)} \le \beta_{\Gamma_0}\mu_k(1 + \|v_k\|_{L_2(\Gamma)})\,\|\Delta p_k\|_{W_2^1(\Omega)},$$

поэтому

$$\|\Delta p_k\|_{W_2^1(\Omega)} \le \delta^{-1}\beta_{\Gamma_0}\mu_k(1 + \|v_k\|_{L_2(\Gamma)}).$$

Учитывая теперь неравенства (3.25), (3.20), получаем неравенство (3.23), где $\delta_k = (1 + \delta^{-1}\beta_{\Gamma_0}\beta_\Gamma)\mu_k$. Тогда из (3.22) следует (3.24), и теорема доказана.

Нетрудно заметить, что решение задачи (1.1), (1.7) также может быть найдено с помощью итерационного процесса (3.11), (3.12), где C — тождественный оператор в $L_2(\gamma), \psi \equiv 0$ на Γ, а $Bv \equiv 0$ на Γ_0 и $Bv = v$ на Γ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильев Ф. П.* Методы решения экспериментальных задач. М.: Наука, 1981.
2. *Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В.* Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988.
3. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
4. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972.
5. *Бабушинский А. Б., Гончаровский А. В.* Итеративные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1989.
6. *Хёрмандер Л.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Мир, 1965.
7. *Исаков В. М.* О единственности решения задачи Коши//Докл. АН СССР. 1989. Т. 255. № 1. С. 18—21.
8. *Латтес Р., Лионс Ж.-Л.* Метод квазиобращения и его приложения. М.: Мир, 1970.
9. *Козлов В. А., Мазья В. Г., Фомин А. В.* Об одном итерационном методе решения задачи Коши для эллиптических уравнений//Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1991. Т. 31. № 1. С. 64—74.
10. *Абдулкеримов М. Ш.* Регуляризация некорректной задачи Коши для эволюционных уравнений в банаховом пространстве//Уч. зап. Азерб. ун-та. Сер. физ.-матем. н. 1977. № 1. С. 23—32.
11. *Вабищевич П. Н.* О численном решении нелокальных эллиптических задач//Изв. вузов. Математика. 1983. № 3. С. 13—19.
12. *Васильев Ф. П.* Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980.
13. *Голичев И. И.* Некоторые итерационные методы решения задач с граничным управлением на основе принципа максимума: Препринт. Уфа: БФАН СССР, 1986. 32 с.

Поступила в редакцию 25.12.92