В. В. Григорьева, Ю. В. Шеретов, О диссипативных свойствах квазигидродинамических уравнений в приближении Стокса,
Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика, 2016, выпуск 2, 95–105

https://www.mathnet.ru/vtpmk14

УДК 532.5, 517.95

О ДИССИПАТИВНЫХ СВОЙСТВАХ КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ПРИБЛИЖЕНИИ СТОКСА

Григорьева В.В.*, **Шеретов Ю.В.** **
* Тверской государственный технический университет, г. Тверь
** Кафедра математического анализа

Поступила в редакцию 27.02.2016, после переработки 10.03.2016.

Для нестационарных квазигидродинамических уравнений в приближении Стокса предложено новое доказательство теоремы о диссипации полной кинетической энергии $E(t)$. Показано, что $E(t)$ не только убывает и стремится к нулю при $t \to +\infty$, но и является выпуклой вниз функцией.

Ключевые слова: квазигидродинамические уравнения, приближение Стокса, диссипативные свойства.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2016. № 2. С. 95–105.

Введение

Линеаризованная система Навье–Стокса, называемая еще системой Стокса, была предметом многочисленных исследований [1]. Она описывает медленные течения вязкой несжимаемой жидкости. В 1993 г. в [2] одним из авторов данной статьи была предложена еще одна система уравнений, получившая название квазигидродинамической (КГД). Она также применялась при аналитическом и численном моделировании движений жидкости. Обзоры полученных в этом направлении результатов представлены в [3–6].

Нестационарная квазигидродинамическая система в приближении Стокса исследовалась в [7, 8]. Доказана теорема о диссипации полной кинетической энергии в ограниченном объеме, установлен факт единственности классического решения, построено решение задачи Коши.

В настоящей работе для КГД системы в приближении Стокса приведено еще одно доказательство теоремы о диссипации полной кинетической энергии $E(t)$. Оно позволило получить новые результаты, касающиеся неотрицательности второй производной функции $E(t)$. Таким образом, $E(t)$ не только убывает и стремится к нулю нулю при $t \to +\infty$, но и является выпуклой вниз функцией.

1. Квазигидродинамическая система в приближении Стокса. Теорема о диссипации кинетической энергии

Квазигидродинамическая система в приближении Стокса без учета внешних массовых сил может быть записана в виде

$$\mathrm{div}\ \vec{u} = \frac{\tau}{\rho}\Delta p, \tag{1.1}$$

$$\rho\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+\nabla p=\eta\big(\Delta\vec{u}+\nabla\ \mathrm{div}\ \vec{u}\big). \tag{1.2}$$

Здесь Δ – трехмерный оператор Лапласа, ∇ – оператор Гамильтона. Коэффициент динамической вязкости η и характерное время релаксации τ считаются заданными положительными константами, причем τ определяется с помощью выражения

$$\tau=\frac{\eta}{\rho c_s^2},$$

где c_s – скорость звука в жидкости. Система (1.1) – (1.2) замкнута относительно неизвестных функций – скорости $\vec{u}=\vec{u}(\vec{x},t)$ и давления $p=p(\vec{x},t)$. Без ограничения общности постоянную среднюю плотность жидкости ρ положим равной единице.

Пусть V – ограниченная объемно и поверхностно односвязная область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3_{\vec{x}}$ с кусочно-гладкой границей ∂V, $\overline{V}=V\cup\partial V$ – ее замыкание, $\vec{n}=\vec{n}(\vec{x})$ – вектор внешней единичной нормали к ∂V в точке $\vec{x}\in\partial V$, $Q=V\times[0,\ T_f]$ – ограниченный или неограниченный цилиндр в $\mathbb{R}^3_{\vec{x}}\times\mathbb{R}_t$, $\overline{Q}=\overline{V}\times[0,\ T_f]$ – его замыкание, T_f – заданное положительное число или символ $+\infty$, соответственно. Параметр $t\in[0,\ T_f]$ будем интерпретировать как время. Дополним систему (1.1) – (1.2) начальным условием

$$\vec{u}\Big|_{t=0}=\vec{u}_0(\vec{x}),\quad \vec{x}\in\overline{V}, \tag{1.3}$$

граничными условиями

$$\vec{u}\Big|_{\partial V}=0,\qquad \frac{\partial p}{\partial\vec{n}}\Big|_{\partial V}=0,\qquad t\in[0,\ T_f], \tag{1.4}$$

а также условием нормировки

$$\int\limits_V p\ dV=0,\qquad t\in[0,\ T_f]. \tag{1.5}$$

Определение 1. *Решением начально–краевой задачи* (1.1) – (1.5) *назовем функции* $\vec{u}=\vec{u}(\vec{x},t)$ *и* $p=p(\vec{x},t)$, *удовлетворяющие при всех* $(\vec{x},t)\in Q$ *уравнениям* (1.1) – (1.2), *а также условиям* (1.3) – (1.5).

Изучим свойства решения $(\vec{u},p)$ поставленной начально-краевой задачи, считая, что при некоторых $\vec{u}_0(\vec{x})$ оно существует. Это решение будем считать достаточно гладким, например, бесконечно дифференцируемым в $\overline{Q}$.

Теорема 1. *На любом решении системы* (1.1) – (1.2) *выполняется уравнение баланса кинетической энергии*

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\vec{u}^2}{2}\Big)+div\ \Big(p\vec{u}-\tau p\nabla p-\eta(\nabla\otimes\vec{u})\cdot\vec{u}-\eta\vec{u}\ div\ \vec{u}\Big)=-\varPhi, \tag{1.6}$$

в котором

$$\varPhi=\eta\big(\nabla\otimes\vec{u}\big)^2+\eta\big(div\ \vec{u}\big)^2+\tau(\nabla p)^2 \tag{1.7}$$

– неотрицательная диссипативная функция,

$$\big(\nabla\otimes\vec{u}\big)^2=\sum_{i,j=1}^{3}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big)^2.$$

Доказательство. Умножим обе части равенства (1.2) скалярно на вектор $\vec{u}$. Это дает

$$\Big(\vec{u}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\Big)+\big(\vec{u}\cdot\nabla p\big)=\eta\big(\vec{u}\cdot\Delta\vec{u}\big)+\eta\big(\vec{u}\cdot\nabla\big)\ \mathrm{div}\ \vec{u}. \tag{1.8}$$

Справедливы равенства

$$\Big(\vec{u}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\Big)=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{u}\cdot\vec{u})=\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\vec{u}^2}{2}\Big), \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned}\big(\vec{u}\cdot\Delta\vec{u}\big)&=\sum_{i=1}^{3}\ u_i\ \sum_{j=1}^{3}\ \frac{\partial^2u_i}{\partial x_j^2}=\sum_{i,j=1}^{3}\ u_i\ \frac{\partial^2u_i}{\partial x_j^2}=\\&=\sum_{i,j=1}^{3}\ \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}u_i\Big)-\sum_{i,j=1}^{3}\ \Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big)^2=\\&=\sum_{j=1}^{3}\ \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}u_i\Big)-\sum_{i,j=1}^{3}\ \Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big)^2=\\&=\ \mathrm{div}\ \big((\nabla\otimes\vec{u})\cdot\vec{u}\big)-\big(\nabla\otimes\vec{u}\big)^2,\end{aligned} \tag{1.10}$$

$$\big(\vec{u}\cdot\nabla\big)\ \mathrm{div}\ \vec{u}=\mathrm{div}\ \big(\vec{u}\ \mathrm{div}\ \vec{u}\big)-\big(\mathrm{div}\ \vec{u}\big)^2. \tag{1.11}$$

Подставив (1.9) – (1.11) в (1.8), будем иметь

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\vec{u}^2}{2}\Big)+\big(\vec{u}\cdot\nabla p\big)-\eta\ \mathrm{div}\ \big((\nabla\otimes\vec{u})\cdot\vec{u}+\vec{u}\ \mathrm{div}\ \vec{u}\big)=\\=-\eta\big(\nabla\otimes\vec{u}\big)^2-\eta\big(\mathrm{div}\ \vec{u}\big)^2.\end{aligned} \tag{1.12}$$

Умножив теперь обе части (1.1) на p, преобразуем результат к виду

$$p\ \mathrm{div}\ \vec{u}=\tau\mathrm{div}\ \big(p\nabla p\big)-\tau(\nabla p)^2. \tag{1.13}$$

Складывая (1.12) и (1.13), получим (1.6). □

Для любого $t\in[0,\ T_f]$ на решении поставленной начально–краевой задачи определим полную кинетическую энергию жидкости в объеме

$$E(t)=\frac{1}{2}\int\limits_V\vec{u}^2\ dV. \tag{1.14}$$

Справедлива следующая теорема о диссипации кинетической энергии.

Теорема 2. *Пусть $\vec{u}=\vec{u}(\vec{x},t)$, $p=p(\vec{x},t)$ – решение начально-краевой задачи* (1.1) – (1.5). *Тогда при каждом $t\in[0,\ T_f]$ имеет место равенство*

$$\frac{dE(t)}{dt}=-\int\limits_V\Phi\ dV. \tag{1.15}$$

На промежутке $[0,\ T_f]$ выполняется неравенство

$$\frac{dE(t)}{dt}\leqslant 0, \tag{1.16}$$

и поэтому функция $E(t)$ является убывающей.

Доказательство. Пусть $(\vec{u}, p)$ – решение начально–краевой задачи (1.1) – (1.5). Подставив его в (1.6), проинтегрируем полученное равенство по множеству V. Принимая во внимание правило Лейбница и формулу Гаусса–Остроградского, будем иметь

$$\frac{dE(t)}{dt} + \iint\limits_{\partial V} (\vec{A} \cdot \vec{n})\, dS = -\int\limits_{V} \Phi\, dV, \tag{1.17}$$

где

$$\vec{A} = p\vec{u} - \tau p \nabla p - \eta(\nabla \otimes \vec{u}) \cdot \vec{u} - \eta \vec{u}\, \mathrm{div}\, \vec{u}.$$

Поверхностный интеграл второго рода в левой части (1.17) равен нулю в силу краевых условий (1.4) и свойств гладкости решения. Соотношение (1.15) непосредственно следует из (1.17). Неравенство (1.16) выполняется в силу неотрицательности Φ. □

2. Характер убывания кинетической энергии

Следующие результаты дают дополнительную информацию о поведении функции $E(t)$.

Теорема 3. *На решении начально-краевой задачи* (1.1) – (1.5) *при любом* $t \in [0,\ T_f]$ *выполняются неравенства*

$$\frac{dE(t)}{dt} + ME(t) \leqslant 0 \tag{2.1}$$

и

$$\frac{dJ(t)}{dt} \leqslant 0, \tag{2.2}$$

где $J(t) = E(t)e^{Mt}$, M *– положительная константа.*

Доказательство. Справедлива следующая цепочка равенств и неравенств:

$$-\frac{dE(t)}{dt} = \int\limits_{V} \Phi\, dV = \eta \int\limits_{V} \left(\nabla \otimes \vec{u}\right)^2 dV + \eta \int\limits_{V} \left(\mathrm{div}\, \vec{u}\right)^2 dV + \tau \int\limits_{V} (\nabla p)^2\, dV \geqslant$$

$$\geqslant \eta \int\limits_{V} \left(\nabla \otimes \vec{u}\right)^2 dV = \eta \int\limits_{V} \sum_{i,j=1}^{3} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2 dV \geqslant \frac{\eta}{c_F} \int\limits_{V} \vec{u}^2\, dV = \frac{2\eta}{c_F} E(t). \tag{2.3}$$

Здесь было использовано (см. [9]) неравенство Фридрихса

$$\int\limits_{V} \vec{u}^2\, dV \leqslant c_F \int\limits_{V} \sum_{i,j=1}^{3} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2 dV.$$

Оно выполняется для вектор-функций $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$, которые при фиксированном $t \in [0,\ T_f]$ принадлежат классу гладкости $\mathbf{C}^1(\overline{V})$ и обращаются в нуль на ∂V. Здесь c_F – положительная константа, зависящая только от геометрических характеристик V. Полагая $M = (2\eta)/c_F$, из (2.3) выводим (2.1).

Представим теперь (2.1) в эквивалентном виде

$$e^{-Mt}\frac{dJ(t)}{dt} \leqslant 0. \tag{2.4}$$

Неравенство (2.2) вытекает из (2.4), поскольку экспонента принимает только положительные значения. □

Следствие 1. *На промежутке* $[0,\ T_f]$ *функция* $J(t)$ *является убывающей.*

Следствие 2. *При любом* $t \in [0,\ T_f]$ *выполняется двойное неравенство*

$$0 \leqslant E(t) \leqslant E(0)e^{-Mt}.$$

Следствие 3. *При* $T = +\infty$ *полная кинетическая энергия* $E(t)$ *убывает на промежутке* $[0,\ +\infty)$ *и стремится к нулю при* $t \to +\infty$.

Теорема 4. *На любом решении системы* (1.1) – (1.2) *выполняется равенство*

$$\Big(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\Big)^2 + div\left(p\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} - \eta(\nabla\otimes\vec{u})\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} - \eta\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\ div\ \vec{u} - \tau p\nabla\Big(\frac{\partial p}{\partial t}\Big)\right) =$$

$$-\frac{\eta}{2}\frac{\partial}{\partial t}\big(\nabla\otimes\vec{u}\big)^2 - \frac{\eta}{2}\frac{\partial}{\partial t}\big(div\ \vec{u}\big)^2 - \frac{\tau}{2}\frac{\partial}{\partial t}\big(\nabla p\big)^2. \tag{2.5}$$

Доказательство. Умножим скалярно (1.2) на $\partial\vec{u}/\partial t$. Это дает

$$\Big(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\cdot\nabla p\Big) = \eta\Big(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\cdot\Delta\vec{u}\Big) + \eta\Big(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\cdot\nabla\Big)\mathrm{div}\ \vec{u}. \tag{2.6}$$

Справедливы равенства

$$\Big(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\cdot\Delta\vec{u}\Big) = \sum_{i=1}^{3}\ \frac{\partial u_i}{\partial t}\ \sum_{j=1}^{3}\ \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} = \sum_{i,j=1}^{3}\ \frac{\partial u_i}{\partial t}\ \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} =$$

$$= \sum_{j=1}^{3}\ \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial t}\Big) - \sum_{i,j=1}^{3}\ \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial t} =$$

$$= \sum_{j=1}^{3}\ \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial t}\Big) - \sum_{i,j=1}^{3}\ \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big) =$$

$$= \sum_{j=1}^{3}\ \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial t}\Big) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\sum_{i,j=1}^{3}\ \Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big)^2 =$$

$$= \ \mathrm{div}\ \Big((\nabla\otimes\vec{u})\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\Big) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\big(\nabla\otimes\vec{u}\big)^2, \tag{2.7}$$

$$\Big(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\cdot\nabla\Big)\mathrm{div}\ \vec{u} = \mathrm{div}\ \Big(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\ \mathrm{div}\ \vec{u}\Big) -\ \mathrm{div}\ \vec{u}\ \mathrm{div}\ \Big(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\Big) =$$

$$= \mathrm{div}\ \Big(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\ \mathrm{div}\ \vec{u}\Big) -\ \mathrm{div}\ \vec{u}\ \frac{\partial}{\partial t}\ \mathrm{div}\ \vec{u} =$$

$$= \text{div}\ \Big(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\ \text{div}\ \vec{u}\Big) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\big(\text{div}\ \vec{u}\big)^2. \tag{2.8}$$

С помощью (2.7) и (2.8) преобразуем (2.6) к виду

$$\Big(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\cdot\nabla p\Big) = \eta\ \text{div}\ \Big((\nabla\otimes\vec{u})\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\ \text{div}\ \vec{u}\Big) -$$

$$-\frac{\eta}{2}\frac{\partial}{\partial t}\big(\nabla\otimes\vec{u}\big)^2 - \frac{\eta}{2}\frac{\partial}{\partial t}\big(\text{div}\ \vec{u}\big)^2. \tag{2.9}$$

Продифференцируем (1.1) по времени, а затем умножим результат на функцию p. Будем иметь

$$p\frac{\partial}{\partial t}\ \text{div}\ \vec{u} = \tau p\frac{\partial}{\partial t}\big(\Delta p\big). \tag{2.10}$$

Эквивалентная запись (2.10) такова:

$$p\ \text{div}\ \Big(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\Big) = \tau p\ \text{div}\nabla\Big(\frac{\partial p}{\partial t}\Big). \tag{2.11}$$

Справедлива цепочка равенств

$$p\ \text{div}\nabla\Big(\frac{\partial p}{\partial t}\Big) = \ \text{div}\bigg(p\nabla\Big(\frac{\partial p}{\partial t}\Big)\bigg) - \bigg(\nabla p\cdot\nabla\Big(\frac{\partial p}{\partial t}\Big)\bigg) =$$

$$= \ \text{div}\bigg(p\nabla\Big(\frac{\partial p}{\partial t}\Big)\bigg) - \bigg(\nabla p\cdot\frac{\partial}{\partial t}\nabla p\bigg) =$$

$$= \ \text{div}\bigg(p\nabla\Big(\frac{\partial p}{\partial t}\Big)\bigg) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\big(\nabla p\big)^2. \tag{2.12}$$

Учитывая (2.12), приведем (2.11) к виду

$$p\ \text{div}\ \Big(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\Big) = \tau\ \text{div}\bigg(p\nabla\Big(\frac{\partial p}{\partial t}\Big)\bigg) - \frac{\tau}{2}\frac{\partial}{\partial t}\big(\nabla p\big)^2. \tag{2.13}$$

Сложив (2.9) и (2.13), получим (2.5). □

Теорема 5. *Пусть* $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$, $p = p(\vec{x}, t)$ *– решение начально-краевой задачи* (1.1) – (1.5). *Тогда при каждом* $t \in [0, T]$ *имеет место равенство*

$$\frac{d\Psi(t)}{dt} = -2\int\limits_V \Big(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\Big)^2\ dV, \tag{2.14}$$

где

$$\Psi(t) = \int\limits_V \Phi\ dV, \tag{2.15}$$

Φ *– неотрицательная диссипативная функция, определяемая формулой* (1.7). *На промежутке* $[0,\ T_f]$ *выполняется неравенство*

$$\frac{d\Psi(t)}{dt} \leqslant 0, \tag{2.16}$$

и поэтому функция $\Psi(t)$ *является убывающей.*

Доказательство. Если $(\vec{u}, p)$ – решение начально–краевой задачи (1.1) – (1.5), то подставив его в (2.5), проинтегрируем полученное равенство по множеству V. Принимая во внимание правило Лейбница и формулу Гаусса–Остроградского, будем иметь

$$\int\limits_V \Big(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}\Big)^2 \, dV + \iint\limits_{\partial V} (\vec{B} \cdot \vec{n}) \, dS = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int\limits_V \varPhi \, dV, \tag{2.17}$$

где

$$\vec{B} = p \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \eta (\nabla \otimes \vec{u}) \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \eta \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \operatorname{div} \vec{u} - \tau p \nabla \Big(\frac{\partial p}{\partial t}\Big).$$

Поверхностный интеграл в (2.17) равен нулю, поскольку

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}\Big|_{\partial V} = 0, \quad (\vec{n} \cdot \nabla)\Big(\frac{\partial p}{\partial t}\Big)\Big|_{\partial V} = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{n} \cdot \nabla p)\Big|_{\partial V} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial p}{\partial \vec{n}}\Big|_{\partial V} = 0, \quad t \in [0, \ T_f]. \tag{2.18}$$

Условия (2.18) вытекают из (1.4) и свойств гладкости решения. Равенство (2.14) следует из (2.17), если принять во внимание обозначение (2.15). Неравенство (2.16) вытекает из (2.14). □

Теорема 6. *На любом решении* $(\vec{u}, p)$ *начально-краевой задачи* (1.1) – (1.5) *при каждом* $t \in [0, T]$ *имеет место соотношение*

$$\frac{d^2 E(t)}{dt^2} = 2 \int\limits_V \Big(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}\Big)^2 \, dV. \tag{2.19}$$

На промежутке $[0, \ T_f]$ *выполняется неравенство*

$$\frac{d^2 E(t)}{dt^2} \geqslant 0 \tag{2.20}$$

и поэтому $E(t)$ *является выпуклой вниз функцией.*

Доказательство. Продифференцируем (1.15) по времени. Будем иметь

$$\frac{d^2 E(t)}{dt^2} = -\frac{d}{dt} \int\limits_V \varPhi \, dV = -\frac{d\varPsi(t)}{dt}. \tag{2.21}$$

Соотношение (2.19) является следствием (2.21) и (2.14). Неравенство (2.20) выполняется, поскольку правая часть (2.19) неотрицательна. □

Заключение

Для классической нестационарной системы Стокса функция $E(t)$ также является убывающей и выпуклой вниз. Кроме того, она стремится к нулю при $t \to +\infty$. Доказательства могут быть проведены по той же схеме. Тем самым, связь между системой Стокса и квазигидродинамической системой в приближении Стокса становится очевидной.

Список литературы

[1] Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970. 288 с.

[2] Шеретов Ю.В. О единственности решений одной диссипативной системы гидродинамического типа // Математическое моделирование. 1994. Т. 6, № 10. С. 35–45.

[3] Шеретов Ю.В. Математическое моделирование течений жидкости и газа на основе квазигидродинамических и квазигазодинамических уравнений. Тверь: Тверской гос. ун–т, 2000. 235 с.

[4] Шеретов Ю.В. Динамика сплошных сред при пространственно–временном осреднении. М., Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. 400 с.

[5] Шеретов Ю.В. Регуляризованные уравнения гидродинамики. Тверь: Тверской гос. ун–т, 2016. 222 с.

[6] Жериков А.В. Применение квазигидродинамических уравнений: математическое моделирование течений вязкой несжимаемой жидкости. Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, 2010. 124 с.

[7] Шеретов Ю.В. Методы построения точных решений квазигидродинамических уравнений // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2011. № 21. С. 5–26.

[8] Григорьева В.В., Шеретов Ю.В. Решение задачи Коши для квазигидродинамических уравнений в приближении Стокса // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь: Тверской гос. ун–т, 2015. С. 50–55.

[9] Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. М.: Мир, 1985. 589 с.

Библиографическая ссылка

Григорьева В.В., Шеретов Ю.В. О диссипативных свойствах квазигидродинамических уравнений в приближении Стокса // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2016. № 2. С. 95–105.

Сведения об авторах

1. **Григорьева Вера Владимировна**
доцент кафедры высшей математики Тверского государственного технического университета.

Россия, 170026, г. Тверь, наб. А. Никитина, 22, ТвГТУ. E-mail: pontida@list.ru.

2. **Шеретов Юрий Владимирович**
заведующий кафедрой математического анализа Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, 33, ТвГУ.
E-mail: Sheretov.YV@tversu.ru.

ON THE DISSIPATIVE PROPERTIES OF QUASI–HYDRODYNAMIC EQUATIONS IN STOKES APPROXIMATION

Grigoryeva Vera Vladimirovna
Associate Professor at Higher Mathematics department,
Tver State Technical University
Russia, 170026, Tver, A. Nikitin emb., 22, TvSTU. E-mail: pontida@list.ru

Sheretov Yurii Vladimirovich
Head of Mathematical Analysis department, Tver State University
Russia, 170100, Tver, Zhelyabov st., 33, TvSU. E-mail: Sheretov.YV@tversu.ru

Received 27.02.2016, revised 10.03.2016.

For non–stationary quasi–hydrodynamic equations in Stokes approximation new proof of the theorem on the dissipation of total kinetic energy $E(t)$ is proposed. It is shown, that $E(t)$ not only decreases and tends to zero under $t \to +\infty$, but it is convex down function.

Keywords: quasi-hydrodynamic equations, Stokes approximation, dissipative properties.

Bibliographic citation

Grigoryeva V.V., Sheretov Yu.V. On the dissipative properties of quasi–hydrodynamic equations in Stokes approximation. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2016, no. 2, pp. 95–105. (in Russian)

References

[1] Ladyzhenskaya O.A. *Matematicheskie Voprosy Dinamiki Vyazkoi Neszhimaemoi Zhidkosti* [Mathematical Theory of Viscous Incompressible Fluid]. Nauka Publ., Moscow, 1970. 288 p. (in Russian)

[2] Sheretov Yu.V. On uniqueness of the solutions for one dissipative system of hydrodynamic type. *Matematicheskoe Modelirovanie* [Mathematical Modeling], 1994, vol. 6(10), pp. 35–45. (in Russian)

[3] Sheretov Yu.V. *Matematicheskoe Modelirovanie Techenii Zhidkosti i Gaza na Osnove Kvazigidrodinamicheskikh i Kvazigazodinamicheskikh Uravnenii* [Mathematical Modeling of Fluid and Gas Flows on the Basis of Quasi-Hydrodynamic Equations]. Tver State University, Tver, 2000. 235 p. (in Russian)

[4] Sheretov Yu.V. *Dinamika Sploshnykh Sred pri Prostranstvenno–Vremennom Osrednenii* [Dynamics of Continuous Media with Spatial-Temporal Averaging]. NITS “Regular and Chaotic Dynamics”, Moscow, Izhevsk, 2009. 400 p. (in Russian)

[5] Sheretov Yu.V. *Regulyarizovannye Uravneniya Gidrodinamiki* [Regularized Equations of Hydrodynamics]. Tver State University, Tver, 2016. 222 p. (in Russian)

[6] Zherikov A.V. *Primenenie Kvazigidrodinamicheskikh Uravnenii: Matematicheskoe Modelirovanie Techeniy Vyazkoi Neszhimaemoi Zhidkosti* [Application of Quasi-Hydrodynamic Equations: Mathematical Modeling of Viscous Incompressible Fluid]. Lambert Academic Publishing, Saarbrücken, 2010. 124 p. (in Russian)

[7] Sheretov Yu.V. Methods for constructing exact solutions of quasi-hydrodynamic equations. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2011, no. 2, pp. 5–26. (in Russian)

[8] Grigoryeva V.V., Sheretov Yu.V. Solution of the Cauchy problem for quasi-hydrodynamic equations in the Stokes approximation. *Primenenie Funktsional'nogo Analiza v Teorii Priblizhenii* [Application of Functional Analysis in Approximation Theory]. Tver State University, Tver, 2015. Pp. 50–55. (in Russian)

[9] Rektoris K. *Variatsionnye Metody v Matematicheskoi Fizike i Tekhnike* [Variational Methods in Mathematical Physics and Engineering]. Mir Publ., Moscow, 1985. 589 p. (in Russian)