Р. И. Григорчук, Сверхаменабельность и проблема вхождения свободных полугрупп, *Функц. анализ и его прил.*, 1987, том 21, выпуск 1, 74–75

Функциональный анализ и его приложения,
1987, т. 21, вып. 1, 74—75

УДК 517.9

СВЕРХАМЕНАБЕЛЬНОСТЬ И ПРОБЛЕМА ВХОЖДЕНИЯ СВОБОДНЫХ ПОЛУГРУПП

Р. И. Григорчук

В связи с исследованиями вокруг парадокса Хаусдорфа—Банаха—Тарского фон Нейман [1] рассмотрел следующую задачу. Пусть G — группа, действующая как группа преобразований на множестве S и пусть $A \subset S$ — непустое подмножество. Требуется выяснить, существует ли нормированная на A конечно-аддитивная G-инвариантная мера μ, определенная на сигма-алгебре всех подмножеств S и принимающая значения в интервале $[0, +\infty]$. Такие меры называют инвариантными мерами для тройки (G, S, A). Группы G, у которых инвариантные меры существуют для тройки (G, G, G), фон Нейман выделил в специальный класс AG — класс аменабельных групп. Теории и приложения аменабельных групп посвящена монография [2].

Даже если группа G аменабельна, проблема существования инвариантной меры для тройки (G, S, A) разрешима не всегда. В работе [3] Д. М. Розенблатт ввел понятие сверхаменабельной группы: группа G называется сверхаменабельной, если проблема существования инвариантной меры разрешима для любой тройки (G, S, A), где A непусто. Розенблатт доказал, что группа неэкспоненциального роста является сверхаменабельной. Он заметил, что если группа G содержит свободную подполугруппу L с двумя образующими, то для тройки (G, G, L) не существует инвариантной меры. Поэтому группа, обладающая свободной подполугруппой с двумя образующими, не является сверхаменабельной. Розенблатт доказал, что разрешимая группа является сверхаменабельной в том и только том случае, если она не содержит свободной подполугруппы с двумя образующими. В этой же работе он высказал следующую гипотезу [3, с. 41] (см. также [9]).

«Группа сверхаменабельна в том и только том случае, если она аменабельна и не содержит свободной подполугруппы с двумя образующими.»

В работе [4] Чжоу доказал эту гипотезу для всех известных к моменту написания этой работы дискретных аменабельных групп, а именно для класса элементарных групп (т. е. групп, конструируемых из конечных и коммутативных групп операциями группового расширения и индуктивного предела).

В работах [5; 6; 7] построена континуальная серия неэлементарных аменабельных групп (вопрос о существовании которых был поставлен Дэем [8]). Свойство периодичности, которым обладают группы работ [5; 6; 7], позволяет построить контрпримеры к сформулированной гипотезе.

Т е о р е м а. *Для любого простого числа p существует конечно-порожденная аменабельная p-группа, которая не является сверхаменабельной.*

Так как периодические группы не содержат свободных подполугрупп, то эта теорема опровергает гипотезу Розенблатта.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть H — бесконечная конечно-порожденная аменабельная p-группа (например, любая из p-групп, построенных в работах [5; 6; 7]), $a_1, \ldots, a_m$ — система образующих элементов группы H. Построим сплетение $\mathbf{Z}_p \wr H$, где $\mathbf{Z}_p$ — циклическая группа порядка p, порождающий элемент которой обозначим через δ. Элементы группы $\mathbf{Z}_p \wr H$ будем записывать в виде пар (h, f), где $h \in H$, f — функция на H со значениями в группе $\mathbf{Z}_p$. Групповая операция определяется соотношением $(h_1, f_1)(h_2, f_2) = (h_1 h_2, f_1^{h_2} f_2)$, где $f^h(x) = f(hx)$. Группа $\mathbf{Z}_p \wr H$ порождается элементами $(a_i, \tilde{1})$, $i = 1, \ldots, m$, $(1, \delta_1)$, где $\tilde{1}$ — функция, принимающая постоянное значение 1, δ_h — функция, принимающая значение δ в точке $h \in H$ и принимающая значение 1 на остальных элементах группы H.

Докажем, что группа $\mathbf{Z}_p \wr H$ является аменабельной p-группой. Действительно, группа $\mathbf{Z}_p \wr H$ является расширением группы $\mathrm{fun}(H, \mathbf{Z})$ функций на H со значениями в $\mathbf{Z}_p$ с помощью группы H. Группа $\mathrm{fun}(H, \mathbf{Z}_p) \cong \prod\limits_H \mathbf{Z}_p$ является коммутативной (а следовательно и аменабельной) p-группой. Но расширение аменабельной группы с помощью аменабельной — аменабельная группа, а расширение p-группы с помощью p-группы является p-группой.

Докажем теперь, что группа $\mathbf{Z}_p \wr H$ не является сверхаменабельной. A-ограниченным множеством для тройки (G, S, A) называется множество, которое накрывается объединением конечного числа сдвигов Ag, $g \in G$. Пусть $B_A(S)$ обозначает множество скалярных функций на S, носитель которых A-ограничен.

П р е д л о ж е н и е [2]. *Для того чтобы существовала G-инвариантная конечно-аддитивная мера μ а S, такая, что $\mu(A) = 1$, необходимо и достаточно, чтобы существо-*

вал неотрицательный G-инвариантный линейный функционал Φ на $B_A(S)$, такой, что $\Phi(\chi_A) = 1$ (χ_A — характеристическая функция множества A).

Сформулируем теперь определение парадоксального дерева для группы G. Пусть группа G содержит конечный набор элементов $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ такой, что однородное дерево Γ с кратностью ветвления 2 может быть раскрашено элементами группы G следующим образом: i) каждая вершина $v \in V(\Gamma)$ раскрашена некоторым элементом $g_v \in G$ причем, если $u, v \in V(\Gamma)$ и $u \neq v$, то $g_n \neq g_v$; ii) каждое ребро $e \in \varepsilon(\Gamma)$ раскрашено некоторым элементом множества $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$, причем, если u и v — соседние вершины и вершина u расположена ближе к корневой вершине, чем вершина v, то ребро, соединяющее эти вершины, раскрашено символом α_i таким, что $g_v = g_u\alpha_i$.

Мы утверждаем, что если группа G обладает хотя бы одним парадоксальным деревом, то она не является сверхаменабельной. Действительно, рассмотрим тройку (G, G, A), где $A = \{g \in G: g = g_u, u \in V(\Gamma)\}$. Определим множества A_i, $i = 1, \ldots, k$ соотношениями $A_i = \{s \in A: s\alpha_i \in A\}$. Тогда множества $A_i\alpha_i$, $i = 1, \ldots, k$ попарно не пересекаются и $A_i\alpha_i \subset A$, $i = 1, \ldots, k$. Кроме того имеет место равенство $2\chi_A = \sum_{i=1}^{k} \chi_{A_i}$. Пусть Φ есть G-инвариантный функционал на $B_A(S)$, о существовании которого говорится в предложении. Тогда

$$2 = \Phi(2\chi_A) = \Phi\left(\sum_{i=1}^{k} \chi_{A_i}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \Phi(\chi_{A_i}) = \sum_{i=1}^{k} \Phi(\chi_{A_i\alpha_i}) = \Phi\left(\sum_{i=1}^{k} \chi_{A_i\alpha_i}\right) \leqslant \Phi(\chi_A) = 1.$$

Полученное противоречие и доказывает, что G не является сверхаменабельной.

Докажем теперь, что группа $\mathbf{Z}_p \wr H$ обладает парадоксальным деревом. Так как группа H бесконечна, то найдется последовательность h_n, $n = 1, 2, \ldots$ элементов множества $\{a_1, \ldots, a_m, a_1^{-1}, \ldots, a_m^{-1}\}$ такая, что длина кратчайшей записи элемента $h_1h_2\ldots h_n$ в виде произведения образующих и их обратных в точности равна n. Однородное дерево с кратностью ветвления 2 реализуем в виде диадического дерева Γ, вершинам которого сопоставлены слова в алфавите $\{0, 1\}$. Вершину $\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n$, $\varepsilon_i = 0, 1$, $i = 1, \ldots, n$ дерева Γ раскрасим элементом $x_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n} = x_1^{(\varepsilon_1)}\ldots x_n^{(\varepsilon_n)}$, где $x_i^{(\varepsilon)} = (h_i, \delta^{\varepsilon}_{h_i^{-1}})$, $\varepsilon = 0, 1$, $i = 1, \ldots, n$, а ребро, соединяющее две соседние вершины $\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n$, $\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n\varepsilon_{n+1}$ раскрасим элементом $x_{n+1}^{(\varepsilon_{n+1})}$. Среди элементов $x_n^{(\varepsilon_n)}$, $\varepsilon_n = 0, 1$, $n = 1, 2, \ldots$ имеется только конечное число различных. Действительно, эти элементы принадлежат множеству $\{(a_i, \delta^{\varepsilon}_{a_i^{-1}}), (a_i^{-1}, \delta^{\varepsilon}_{a_i})$, $\varepsilon = 0, 1$, $i = 1, \ldots, m\}$. Докажем, что различные вершины дерева Γ раскрашены различными элементами группы $\mathbf{Z}_p \wr H$. Действительно,

$$x_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n} = (h_1\ldots h_{n-1}h_n, \delta^{\varepsilon_1}_{h_n^{-1}h_{n-1}^{-1}\ldots h_1^{-1}}\ldots\delta^{\varepsilon_{n-1}}_{h_n^{-1}h_{n-1}^{-1}}\delta^{\varepsilon_n}_{h_n^{-1}}),$$

и так как $h_n^{-1}h_{n-1}^{-1}\ldots h_1^{-1}, \ldots, h_n^{-1}h_{n-1}^{-1}, h_n^{-1}$ — попарно различные элементы, то разным наборам индексов $\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n$ отвечают различные элементы $x_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n}$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Neuman J. von* // Fund. Math.— 1929. V. 13.— P. 83—116. 2. *Гринлиф Ф.* Инвариантные средние на топологических группах. М.: Мир, 1973. 3. *Rosenblatt J. M.* // Trans. Amer. Math. Soc.— 1974. V. 193.— P. 33—53. 4. *Chou C.* // Ill. J. Math.— 1980. V. 24.— P. 396—406. 5. *Григорчук Р. И.* // Функцион. анализ и его прил.— 1980. Т. 14, вып. 1.— С. 53—54. 6. *Григорчук Р. И.* // Изв. АН СССР. Сер. Мат.— 1984. Т. 48.— С. 939—985. 7. *Григорчук Р. И.* // Мат. сб.— 1985. Т. 126.— С. 194—214. 8. *Day M.* // Ill. J. Math.— 1957. V. 1.— P. 509—544. 9. *Wogan S.* The Banach — Tarski Paradox. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. V. 24. Cambridge University Press. 1986.

Московский институт инженеров железнодорожного транспорта

Поступило в редакцию 23 декабря 1985 г.