К. Моралес Мелендес, Бордизмы многообразий с собственным действием дискретной группы, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2010, номер 2, 57–59

УДК 515.164

БОРДИЗМЫ МНОГООБРАЗИЙ С СОБСТВЕННЫМ ДЕЙСТВИЕМ ДИСКРЕТНОЙ ГРУППЫ

К. Моралес Мелендес[1]

В работе строится спектральная последовательность в терминах оснащенных бордизмов многообразий с квазисвободным действием дискретной группы для описания бордизмов многообразий с собственным действием дискретной группы G методом Коннера–Флойда для неподвижных точек действия группы.

Ключевые слова: многообразие, дискретная группа, собственное действие, бордизмы, спектральная последовательность.

A spectral sequence is constructed in the paper in terms of framed bordisms of manifolds with a quasi free action of a discrete group for description of bordisms of manifolds with the proper action of a discrete group G using the Conner–Floyd method of fixed points construction.

Key words: manifold, discrete group, proper action, bordisms, spectral sequence.

1. Постановка задачи. Рассматриваемая задача естественно возникает из конструкции Коннера–Флойда [1] описания бордизмов с действием группы G при помощи описания множеств неподвижных точек. Конструкция Коннера–Флойда сводит задачу описания бордизмов к двум задачам: а) описание множеств неподвижных (или в общем случае стационарных) точек, которые образуют подмногообразия, оснащенные структурой нормального расслоения тоже с действием группы G, однако это действие имеет уже стационарные точки более низкого ранга; б) описание бордизмов с действием группы G более низкого ранга. Предполагается, что группа G является дискретной. Первые результаты в этом направлении были получены еще в 1969 г. в работе [2] для простейшего случая группы $G = \mathbb{Z}_p$, а в дальнейшем в многочисленных работах для других конечных или компактных групп.

В настоящей работе рассмотрен случай бесконечной дискретной группы G с ее собственным действием на некомпактном многообразии. В результате строится спектральная последовательность в терминах оснащенных бордизмов многообразий с квазисвободным действием дискретной группы для описания бордизмов многообразий с собственным действием дискретной группы G.

2. Основные понятия и технические требования. Пусть M — гладкое многообразие с собственным действием $G \times M \to M$ дискретной группы G в соответствии с определением Пале [3], т.е. такое, что каждая стационарная подгруппа конечна, а факторпространство M/G является компактным. Если $H < G$ — конечная подгруппа, то будем обозначать через $M^H \subset M$ множество неподвижных точек и будем предполагать, что оно является подмногообразием многообразия M (см. [4–7]).

Рассмотрим некоторое семейство $\mathfrak{F}$ конечных подгрупп группы G, инвариантное относительно группового сопряжения, т.е. $g^{-1}Hg \in \mathfrak{F}$, если $H \in \mathfrak{F}$. Семейство $\mathfrak{F}$ является частично упорядоченным по вложению, причем действие группы G сохраняет порядок. Поэтому факторсемейство $\mathfrak{F}/G$ наследует порядок, а факторотображение $\mathfrak{F} \to \mathfrak{F}/G$ монотонно.

С любым многообразием с собственным действием можно ассоциировать семейство $\mathfrak{F}_M = \{H < G | M^H \neq \emptyset.\}$ Из равенства $gM^H = M^{g^{-1}Hg}$ непосредственно следует, что на $\mathfrak{F}_M$ действует группа G.

Лемма 1. *Факторсемейство $\mathfrak{F}_M/G$ конечно.*

Значит, в $\mathfrak{F}_M/G$ содержится конечное число максимальных элементов. Обозначим через $\mathrm{Iso}(\mathfrak{F}_M)$ множество максимальных элементов семейства $\mathfrak{F}_M$. Если $K, H \in \mathrm{Iso}(\mathfrak{F}_M)$, $K \neq H$, то $M^K \cap M^H = \emptyset$. Очевидно, что на $\mathrm{Iso}(\mathfrak{F}_M)$ действует G.

Для каждой конечной подгруппы $H < G$ на множестве неподвижных точек $M^H \subset M$ действует нормализатор $N(H)$, $N(H) \times M^H \to M^H$, причем это действие редуцируется к факторгруппе, т.е. имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} N(H) \times M^H & \longrightarrow & M^H \\ \downarrow & & \| \\ N(H)/H \times M^H & \longrightarrow & M^H. \end{array}$$

[1] *Моралес Мелендес Китсе* — асп. каф. высшей геометрии и топологии мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: balamquitzeh@yahoo.com.

Собственное действие $G \times M \to M$ дискретной группы G обладает свойством: для каждой подгруппы $H \in \mathrm{Iso}(\mathfrak{F}_M)$ существует такое G-инвариантное открытое множество $V \supset M^H$, что

$$V \approx G \times_{N(H)} U_{N(H)} \hookrightarrow M,$$

где $U_{N(H)} \supset M^H$ — некоторая $N(H)$-инвариантная окрестность (см. [8, 9]).

Лемма 2. *Для подгрупп $H \in \mathrm{Iso}(\mathfrak{F}_M)$ существует система трубчатых окрестностей, инвариантных относительно действия нормализаторов $N(H)$, причем $U_{N(H)} \cap U_{N(K)} = \emptyset$ для $H \neq K \in \mathrm{Iso}(\mathfrak{F}_M)$ и $gU_{N(H)} = U_{N(g^{-1}Hg)}$ для любого $g \in G$.*

3. Спектральная последовательность. Обозначим через $\Omega_*^{\mathfrak{F},G}$ группу бордизмов многообразий с собственным действием группы G, все стационарные подгруппы которой принадлежат семейству $\mathfrak{F}$. Формально элементами группы $\Omega_*^{\mathfrak{F},G}$ являются классы бордизмов многообразий с собственным действием группы G, для которых $\mathfrak{F}_M \subset \mathfrak{F}$ и пространство орбит которых компактно. Очевидно, каждое многообразие M с собственным действием группы G всегда определяет класс в группе $\Omega_*^{\mathfrak{F}_M,G}$.

Рассмотрим трубчатую окрестность $M^H \subset U_{N(H)}$. Окрестность $U_{N(H)}$ можно отождествить с тотальным пространством нормального к M^H расслоения $U_{N(H)} \approx \nu_H$. Без ограничения общности можно считать, что это отождествление эквивариантно.

Обозначим через $\Omega_*^{[H]}$ группу бордизмов многообразий, оснащенных структурой векторного расслоения с квазисвободным действием группы $N(H)$ и стационарной подгруппой H.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — семейство конечных подгрупп группы G. Если факторсемейство $\mathfrak{F}/G$ конечно, то имеет место длинная точная последовательность*

$$\ldots \to \Omega_*^{\mathfrak{F}-\mathrm{Iso}(\mathfrak{F})} \xrightarrow{i} \Omega_*^{\mathfrak{F}} \xrightarrow{\mathrm{Fix}} \bigoplus_{[H]\in \mathrm{Iso}(\mathfrak{F})/G} \Omega_*^{[H]} \xrightarrow{\partial} \Omega_{*-1}^{\mathfrak{F}-\mathrm{Iso}(\mathfrak{F})} \to \ldots.$$

Определим по индукции $\mathfrak{F}^{k-1} = \mathfrak{F}^k \backslash \mathrm{Iso}(\mathfrak{F}^k)$. Если для семейства $\mathfrak{F}$ конечных подгрупп группы G факторсемейство $\mathfrak{F}/G$ конечно, то можно найти число k, такое, что $\mathfrak{F}^k = \{1\}$.

Следствие. *Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторое семейство конечных подгрупп группы G. Пусть факторсемейство $\mathfrak{F}/G$ конечно. Тогда существует такая спектральная последовательность $E_{p,q}^s$, сходящаяся к $\Omega_*^{\mathfrak{F}}$, что*

$$E_{p,q}^1 \approx \bigoplus_{H\in \mathrm{Iso}(\mathfrak{F}_p)} \Omega_{p+q}^{[H]}. \tag{1}$$

Член $E_{p,q}^\infty$ ассоциирован $\Omega_*^{\mathfrak{F}}$ относительно фильтрации $\{1\} = \mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{F}_k = \mathfrak{F}$.

Обозначим через $\Omega_*(B\mathrm{Aut}_{N(H)}(X(\rho)), N(H)/H)$ группу бордизмов пространства $B\mathrm{Aut}_{N(H)}(X(\rho))$ при ограничении

$$\pi_1(\mathrm{pr}_* \circ f) : \pi_1(X) \hookrightarrow \pi_1(B(N(H)/H)) \approx N(H)/H,$$

где $\mathrm{pr} : \mathrm{Aut}_{N(H)}(X(\rho)) \to N(H)/H$ — эпиморфизм.

Теорема 2. *Имеет место изоморфизм*

$$\Omega_*^{[H]} \approx \bigoplus_{\rho} \Omega_*(B\mathrm{Aut}_{N(H)}(X(\rho)), N(H)/H), \tag{2}$$

где сумма пробегает все неэквивалентные представления группы H.

Таким образом, первый член спектральной последовательности вычисляется по формулам (1), (2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Conner P., Floyd E.* Differentiable Periodic Maps. Berlin: Springer-Verlag, 1964.
2. *Мищенко А. С.* Бордизмы с действием группы Z_p и неподвижные точки // Матем. сб. Новая серия. 1969. **80**, № 3. 307–313.
3. *Palais R.S.* On the existence of slices for actions of non-compact Lie groups // Ann. Math. 2nd Ser. 1961. **73**, N 2. 295–323.
4. *Pawalowski K.* Manifolds as fixed point sets of smooth compact Lie group actions // Current Trends in Transformation Groups. K-Monographs in Mathematics. Vol. 7. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2002. 79–104.

5. *Bredon G.E.* Introduction to Compact Transformation Groups. N.Y.; London: Academic Press, 1972.
6. *Kawakubo K.* The Theory of Transformation Groups. Oxford: Oxford Univ. Press, 1991.
7. *Dieck T.* Transformation groups // Gruyter Stud. Math. Vol. 8. Berlin; N.Y.: Walter de Gruyter, 1987.
8. *Illman S.* Existence and uniqueness of equivariant triangulations of smooth proper G-manifolds with some applications to equivariant whitehead torsion // J. reine und angew. math. 2000. N 524. 129–183.
9. *Korppi T.* Equivariant triangulations of differentiable and real-analytic manifolds with a properly discontinuous action // Annales Academiæ acientiarum fennicæ matematica dissertationes. N 141. Helsinki: Suomalainen Tiedeakatemia, 2005.

Поступила в редакцию
09.10.2009

УДК 539.3

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА И КОЛЬЦЕВОЙ НАКЛАДКИ

В. М. Александров[1], В. Ю. Саламатова[2]

Исследуется пространственная задача о контактном взаимодействии тонкой кольцевой жесткой накладки с упругим полупространством, нагруженным на бесконечности равномерным растягивающим усилием, направленным параллельно границе полупространства. Предполагается, что накладка не сопротивляется изгибу. Задача сводится к интегральному уравнению первого рода с ядром, имеющим логарифмическую особенность. Приближенное решение уравнения находится с помощью метода Мультоппа–Каландии и сравнивается с ранее полученным асимптотическим решением.

Ключевые слова: контактная задача, метод Мультоппа–Каландии, накладка.

The problem of the contact interaction of a thin circular rigid cover plate with an elastic isotropic half-space loaded at infinity by a stretching force directed in parallel to the boundary of the half-space is considered. It is assumed that the cover plate is not resistant to bending deformations. The problem can be reduced to an integral equation of the first kind whose kernel has a logarithmic singularity. The equation is solved approximately by the Multopp–Kalandia method. The approximate solution obtained is compared with the well-known asymptotic solution.

Key words: contact problem, Multopp–Kalandia method, cover plate.

Воспользуемся цилиндрической системой координат $(r,\, \varphi,\, z)$. Пусть граница $z = 0$ упругого полупространства $0 \leqslant r < \infty$, $z \leqslant 0$ усилена кольцевой накладкой, жестко сцепленной с границей полупространства. Область контакта между накладкой и полупространством определяется как $\Omega = \{a \leqslant r \leqslant b,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi\}$. Полупространство на бесконечности нагружено равномерным растягивающим усилием p, направленным параллельно границе полупространства. Предполагается, что накладка жесткая на растяжение, но не сопротивляется изгибным деформациям.

Граничные условия для полупространства имеют вид

$$\sigma_z(r,0) = 0 \quad (0 \leqslant r < \infty), \qquad u(r,0) = 0 \quad (a \leqslant r \leqslant b), \qquad \tau_{rz}(r,0) = 0 \quad (0 \leqslant r < a,\ b < r < \infty), \tag{1}$$

на бесконечности

$$\sigma_r(r,z) = \sigma_\varphi(r,z) = p, \tag{2}$$

а остальные напряжения исчезают. Здесь σ_r, σ_φ, σ_z, τ_{rz} — компоненты тензора напряжений в цилиндрической системе координат, $\tau(r)$ — неизвестное контактное касательное напряжение между нижней

[1] *Александров Виктор Михайлович* — доктор физ.-мат. наук, гл. науч. сотр. Ин-та проблем механики РАН, e-mail: alexand@ipmnet.ru.

[2] *Саламатова Виктория Юрьевна* — асп. каф. теории пластичности мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: salamatova@inbox.ru.