морфизмом из $\mathfrak{S}_p(\Gamma_1, \Gamma_2)$ *в* $\bigoplus_{j=1}^{2} C(\Gamma_1, \mathfrak{A}_p^{(2)}(\Gamma_2))$, *ядром которого является* $\mathfrak{K}(L_p(\Gamma_1 \times \Gamma_2))$.

Индуцированный гомоморфизм $\mathfrak{S}_p(\Gamma_1, \Gamma_2) / \mathfrak{K}(L_p(\Gamma_1 \times \Gamma_2)) \to \bigoplus_{j=1}^{2} C(\Gamma_1, \mathfrak{A}_p^{(2)}(\Gamma_2))$ *является изоморфным вложением. Оператор* D $(\in \mathfrak{S}_p(\Gamma_1, \Gamma_2))$ *является* Ф-*оператором тогда и только тогда, когда для всех* $t_1 (\in \Gamma_1)$ *обратимы операторы* $D^+(t_1)$ *и* $D^-(t_1)$.

Рассмотрим теперь один частный случай. В пространстве $L_p(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$ введем четыре проектора: $P_{\pm\pm} = \frac{1}{4}(I_{L_p(\Gamma_1)} \pm S_{\Gamma_1}) \otimes (I_{L_p(\Gamma_2)} \pm S_{\Gamma_2})$. Возьмем восемь комплексных чисел $a_{\pm\pm}$, $b_{\pm\pm}$. Тогда операторы

$$\begin{aligned} A_0 &= a_{++} P_{++} + a_{+-} P_{+-} + a_{-+} P_{-+} + a_{--} P_{--}, \\ B_0 &= b_{++} P_{++} + b_{+-} P_{+-} + b_{-+} P_{-+} + b_{--} P_{--} \end{aligned} \tag{1}$$

принадлежат алгебре $\mathfrak{A}_p(\Gamma_1, \Gamma_2)$. Мы дадим критерий фредгольмовости оператора $D = A_0 + WB_0$.

Положим $\gamma = 1$, если отображение φ сохраняет ориентацию, и $\gamma = -1$ — в противном случае. Обозначим $T_0 = (\gamma T_\psi S_{\Gamma_1} T_\varphi - S_{\Gamma_2})/2$. Известно ([4], с. 35), что оператор T_0 является компактным. Введем также следующее обозначение: $d_{jk} = a_{\alpha\beta} a_{\gamma\delta} - b_{\alpha\beta} b_{\gamma\delta}$, где индексы $\alpha - \delta$ независимо друг от друга принимают значения $+$ или $-$, а $j(k)$—номер места, занимаемого комбинацией знаков $\alpha\beta$ $(\gamma\delta)$ в последовательности $++$, $+-$, $-+$, $--$. Например, $d_{23} = a_{+-}a_{-+} - b_{+-}b_{-+}$. Обозначим $P_\pm = (I_{L_p(\Gamma_2)} \pm S_{\Gamma_2})/2$.

Имеет место следующий результат.

Теорема 2. *Пусть* $D = A_0 + WB_0$ — *оператор из* $\mathfrak{S}_p(\Gamma_1, \Gamma_2)$, A_0, B_0 — *бисингулярные операторы вида* (1). *Оператор* D *является* Ф-*оператором в пространстве* $L_p(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$ *тогда и только тогда, когда*:

1) *при* $\gamma = 1$ $d_{11} \neq 0$, $d_{23} \neq 0$, $d_{44} \neq 0$ *и операторы*

$$I + \frac{d_{11} - d_{13}}{d_{11}} T_0 P_+ + \frac{d_{12} - d_{23}}{d_{23}} T_0 P_-, \quad I + \frac{d_{23} - d_{34}}{d_{23}} T_0 P_+ + \frac{d_{24} - d_{44}}{d_{44}} T_0 P_-$$

обратимы;

2) *при* $\gamma = -1$ $d_{14} \neq 0$, $d_{22} \neq 0$, $d_{33} \neq 0$ *и операторы*

$$I + \frac{d_{14} - d_{12}}{d_{14}} P_+ T_0 + \frac{d_{24} - d_{22}}{d_{22}} P_- T_0, \quad I + \frac{d_{33} - d_{13}}{d_{33}} P_+ T_0 + \frac{d_{34} - d_{14}}{d_{14}} P_- T_0$$

обратимы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сазонов Л. И. Бисингулярное уравнение со сдвигом в пространстве L_p.—Матем. заметки, 1973, т. 13, № 3, с. 385—393.
2. Симоненко И. Б. К вопросу разрешимости бисингулярных и полисингулярных уравнений.—В сб.: Функц. анализ и его прилож., 1971, т. 5, № 1, с. 93—94.
3. Пилиди В. С. О бисингулярном уравнении в пространстве L_p.—В сб.: Матем. исследования. Кишинев, 1972, т. 7, вып. 3, с. 167—175.
4. Литвинчук Г. С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом.—М., 1977.—448 с.

г. Ростов-на-Дону
г. Грозный

Поступила
10 X 1980

О. М. Теут

УДК 517.95

ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ СМЕШАННО-СОСТАВНОГО ТИПА В ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОМ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКЕ

В [1] (гл. II) исследован ряд краевых задач (в частности, задача IV) для уравнения $(y^m u_{xx} + u_{yy})_x = 0$, где m — нечетное целое положительное число. В данной работе рассматривается аналог задачи IV для системы

$$(K(y) u_x - v_y)_x = 0, \quad (u_y + v_x)_x = 0, \tag{1}$$

где $K(y) = (\operatorname{sgn} y)\,|y|^m$, m — любое положительное (не обязательно целое) число. В области D ([1], гл. II) система (1) принадлежит смешанно-составному типу (гиперболическому при $y < 0$ и составному при $y > 0$).

Решение u, v системы (1), непрерывное в замкнутой области $\bar{D}$, назовем регулярным, если внутри D существуют непрерывные частные производные u_x, u_y, v_x, v_y и функции $\Gamma_1 = K(y)\,u_x - v_y$, $\Gamma_2 = u_y + v_x$ непрерывно дифференцируемы по x.

Нетрудно показать, что любое регулярное решение системы (1) можно представить в виде

$$u(x, y) = u_0(x, y) + G(y), \quad v(x, y) = v_0(x, y) + H(y), \tag{2}$$

где u_0, v_0 — регулярное решение системы

$$K(y)\,u_{0x} - v_{0y} = 0, \quad u_{0y} + v_{0x} = 0, \tag{3}$$

а $G(y)$, $H(y)$ — непрерывно дифференцируемые функции. Очевидно, справедливо и обратное утверждение.

Рассмотрим область D_3, ограниченную характеристиками OC_1, OC_2, CC_1, CC_2 системы (1), проходящими через точки $O(0, 0)$, $C_1(2^{-1}, y_1)$, $C_2(2^{-1}, y_1)$, $C(0, y_c)$, где $y_1 = -(2-4\nu)^{2\nu-1}$, $y_c = -(1-2\nu)^{2\nu-1}$,

$$\nu = m(2m+4)^{-1}, \quad 0 < \nu < 1/2. \tag{4}$$

В области D_3 система (1) принадлежит гиперболическому типу и $K(y) = -(-y)^m = -(-y)^{4\nu/(1-2\nu)}$. По аналогии с задачей IV ([1], гл. II) в данной работе исследуется следующая

Задача. Определить регулярное решение u, v системы (1) в области D_3, удовлетворяющее условиям

$$((-y)^{m/4}u + (-1)^i(-y)^{-m/4}v)\,|_{OC_i} = \gamma_i(y), \quad y_1 \leqslant y < 0, \; i = 1, 2, \tag{5}$$

$$u\,|_{x=0} = \gamma_3(y), \quad v\,|_{x=0} = \gamma_4(y), \quad y_i \leqslant y < 0. \tag{6}$$

Предполагается, что функции $\gamma_i(y)$ представимы в виде

$$\gamma_i(y) = |y|^r \gamma_i^*(y), \quad i = \overline{1, 4}, \tag{7}$$

где γ_1^*, $\gamma_2^* \in C^1[y_1, 0]$, γ_3^*, $\gamma_4^* \in C^1[y_c, 0]$, r — положительное число, значение которого выбирается в зависимости от m.

В силу представления (2) задача сводится к нахождению регулярного в D_3 решения u_0, v_0 системы (3), удовлетворяющего условиям

$$((-y)^{m/4}u_0 + (-1)^i(-y)^{-m/4}v_0)\,|_{OC_i} = \gamma_i(y) - \omega_i(y), \quad i = 1, 2, \tag{8}$$

$$u_0\,|_{x=0} = \gamma_3(y) - G(y), \quad v_0\,|_{x=0} = \gamma_4(y) - H(y), \tag{9}$$

где

$$G(y) = 2^{-1}|y|^{-m/4}(\omega_1(y) + \omega_2(y)), \quad H(y) = 2^{-1}|y|^{m/4}(\omega_2(y) - \omega_1(y)). \tag{10}$$

Решение системы (3), удовлетворяющее условиям вида (8) на характеристиках OC_2 и $C_2B(1, 0)$, построено в [2]. Совершенно аналогично получается решение u_0, v_0 системы (3), удовлетворяющее условиям (8) на OC_1 и OC_2. Оно определяется формулами

$$\begin{aligned} u_0(\xi, \eta) &= \mu(\xi-\eta)^{-\nu}[\varphi(\eta) + \psi(\xi)] + \mu(\xi-\eta)^{-2\nu}[P_1(\xi, \eta) + Q_1(\xi, \eta)], \\ v_0(\xi, \eta) &= (4\mu)^{-1}(\xi-\eta)^{\nu}[\psi(\xi) - \varphi(\eta)] + (4\mu)^{-1}[P_2(\xi, \eta) + Q_2(\xi, \eta)], \end{aligned} \tag{11}$$

$0 \leqslant \xi \leqslant 1$, $-1 \leqslant \eta \leqslant 0$, где $\mu = 2^{\nu-1}(1-2\nu)^{\nu}$,

$$\xi = x + (1-2\nu)(-y)^{1/(1-2\nu)}, \quad \eta = x - (1-2\nu)(-y)^{1/(1-2\nu)}, \tag{12}$$

$$f(t) = -(2-4\nu)^{2\nu-1}t^{1-2\nu}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{13}$$

$$\varphi(\eta) = \gamma_1(f(-\eta)) - \omega_1(f(-\eta)), \quad \psi(\xi) = \gamma_2(f(\xi)) - \omega_2(f(\xi)), \tag{14}$$

$$P_i(\xi, \eta) = -\int_0^1 E_i(\xi, \eta, t)\,M_i(\xi, \eta, t)\,dt, \quad Q_i(\xi, \eta) = \int_0^1 H_i(\xi, \eta, t)\,N_i(\xi, \eta, t)\,dt, \tag{15}$$

$$E_i(\xi, \eta, t) = \varphi(\eta t)\, t^{-\nu} (\xi - \eta t)^{\nu-1}, \quad H_i(\xi, \eta, t) = \psi(\xi t)\, t^{-\nu} (\xi t - \eta)^{\nu-1}, \tag{16}$$

$$M_i(\xi, \eta, t) = (-1)^i \nu^2 \xi F(1-\nu, 2, s_1) + \nu\eta F(1-\nu, -\nu, 1, s_1), \tag{17}$$

$$\begin{gathered} N_i(\xi, \eta, t) = -\nu^2\eta F(1-\nu, 1-\nu, 2, s_2) + (-1)^{i+1}\nu\xi F(1-\nu, -\nu, 1, s_2), \ i = 1, 2, \\ s_1 = \xi(1-t)(\xi - \eta t)^{-1}, \quad s_2 = -\eta(1-t)(\xi t - \eta)^{-1}, \end{gathered} \tag{18}$$

$F(a, b, c, x)$ — гипергеометрическая функция. Формулы (11)—(18) написаны на основании формул (34), (35) из [2] с учетом замечаний, сделанных в [3].

Функции $\varphi(\eta)$, $\psi(\xi)$ выражаются через неизвестные функции ω_1, ω_2 с помощью формул (14). Для определения функций ω_1, ω_2 воспользуемся вытекающими из (9) соотношениями

$$((-y)^{m/4} u_0 + (-1)^i (-y)^{-m/4} v_0)\,|_{x=0} = \gamma_{i+4}(y) - \omega_i(y), \quad i = 1, 2, \tag{19}$$

где

$$\gamma_{i+4}(y) = (-y)^{m/4}\gamma_3(y) + (-1)^i (-y)^{-m/4}\gamma_4(y), \quad i = 1, 2. \tag{20}$$

Подставив в (20) выражения u_0, v_0 из (11), используя (12)—(18) и учитывая, что в силу (13), (12) при $x = 0$ имеют место равенства $\eta = -\xi$, $y = f(2\xi)$, получим систему функциональных уравнений относительно функций ω_1, ω_2. С помощью обозначений

$$\Phi_i(2^{-1}x) = \omega_i(f(x)), \ i = 1, 2, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{21}$$

полученная система приводится к виду

$$\Phi_i(x) - \Phi_i(2^{-1}x) = \int_0^1 [L_i(t)\Phi_1(2^{-1}tx) + K_i(t)\Phi_2(2^{-1}tx)]\,dt + F_i(x), \tag{22}$$

$i = 1, 2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, где

$$\begin{gathered} K_1(t) = L_2(t) = \nu 2^{-\nu} F(1-\nu, -\nu, 1, s)\, t^{-\nu}(1+t)^{\nu-1}, \\ K_2(t) = L_1(t) = \nu^2 2^{-\nu} F(1-\nu, 1-\nu, 2, s)\, t^{-\nu}(1+t)^{\nu-1}, \end{gathered} \tag{23}$$

$$s = s(t) = (1-t)(1+t)^{-1}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{24}$$

$$F_i(x) = \gamma_{i+4}(f(2x)) - \gamma_i(f(x)) - R_i(x), \quad i = 1, 2, \tag{25}$$

$$R_i(x) = \int_0^1 r_i(t, x)\,dt, \quad r_i = L_i(t)\gamma_1(f(tx)) + K_i(t)\gamma_2(f(tx)). \tag{26}$$

В силу (13) и (22) имеем

$$\omega_i(y) = \Phi_i((1-2\nu)(-y)^{1/(1-2\nu)}), \quad i = 1, 2. \tag{27}$$

Таким образом, если будет найдено решение Φ_1, Φ_2 системы (22), то с помощью формул (10), (27) определяются G и H.

Если число r удовлетворяет условию

$$r(1-2\nu) > \nu, \tag{28}$$

то на основании (7), (13), (20), (25), (26) можно доказать, что функции F_i непрерывны на $[0, 1]$ и удовлетворяют неравенствам

$$|F_i(x)| \leqslant C_1 x^{r(1-2\nu)-\nu}, \quad i = 1, 2, \tag{29}$$

где C_1 — положительное число. Решение системы (22) в классе непрерывных функций, удовлетворяющих неравенствам вида (29), можно построить, сочетая метод итераций с методом последовательных приближений подобно тому, как это делается в [1] для одного функционального уравнения.

Нулевое приближение Φ_{10}, Φ_{20} определяется как решение системы

$$\Phi_{i0}(x) - \Phi_{i0}(2^{-1}x) = F_i(x), \quad i = 1, 2, \tag{30}$$

а приближение Φ_{1n}, Φ_{2n} — как решение системы

$$\Phi_{in}(x) - \Phi_{in}(2^{-1}x) = \int_0^1 [L_i(t)\Phi_{1,n-1}(2^{-1}tx) + K_i(t)\Phi_{2,n-1}(2^{-1}tx)]\,dt + F_i(x),$$

$$i = 1, 2, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{31}$$

Решения систем (30), (31) получаются методом итераций в виде рядов, сходящихся абсолютно и равномерно на [0, 1] при условии (28). Методом математической индукции выводятся оценки

$$|\Phi_{i0}(x)| \leqslant C_2 x^{r(1-2\nu)-\nu}, \quad |\Phi_{in}(x) - \Phi_{i,n-1}(x)| \leqslant C_2 \lambda^n x^{r(1-2\nu)-\nu}, \tag{32}$$

$$\lambda = \nu(\nu+1)(2^{r(1-2\nu)} - 2^{\nu})^{-1} \int_0^1 t^{r(1-2\nu)-2\nu}(1+t)^{\nu-1}\,dt, \tag{33}$$

из которых следует, что при $\lambda < 1$ ряды

$$\Phi_i(x) = \Phi_{i0}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} [\Phi_{ik}(x) - \Phi_{i,k-1}(x)], \quad i = 1, 2, \tag{34}$$

абсолютно и равномерно сходятся на отрезке [0, 1]. Переходя в (34) к пределу при $n \to \infty$, убеждаемся, что суммы Φ_1, Φ_2 рядов (34) образуют решение системы функциональных уравнений (22). На основании (29), (32), (34) доказывается, что Φ_1, Φ_2 непрерывны на [0, 1] и удовлетворяют неравенствам вида (29).

Путем применения метода итераций к однородной системе, получаемой из (23) при $F_i \equiv 0$, доказывается единственность решения в классе функций, удовлетворяющих условию (29). Из сказанного следует

Теорема 1. *Если выполнены условия* (7), (28) *и* $\lambda < 1$, *где* λ *определено формулой* (33), *то система функциональных уравнений* (22) *имеет единственное непрерывное решение в классе функций, удовлетворяющих условию* (29).

Следствие. Заключение теоремы 1 справедливо, если имеют место условия

$$r(1-2\nu) > 2\nu, \quad (\nu+1)(2^{\nu}-1) < 2^{r(1-2\nu)} - 2^{\nu} \tag{35}$$

или условие

$$r(1-2\nu) > 1+\nu. \tag{36}$$

В самом деле, из (35) и (33) следуют (28) и $\lambda < 1$, а из (36) можно вывести (35).

Когда решение Φ_1, Φ_2 системы (22) найдено, определим функции u, v с помощью формул (2), (11), (14), (10), (27). Полученную указанным способом пару функций u, v назовем обобщенным решением задачи (1), (5), (6).

Проведя исследование обобщенного решения и используя теорему 1 и ее следствие, убеждаемся в справедливости следующих теорем.

Теорема 2. *Если выполнены условия теоремы* 1, *то задача* (1), (5), (6) *имеет единственное обобщенное решение, причем оно непрерывно на множестве* $\overline{D}_3 \setminus \{(0, 0)\}$ *и непрерывно дифференцируемо на* $\overline{D}_3 \setminus (\overline{OC}_1 \cup \overline{OC}_2)$.

Теорема 3. *Если число* r *удовлетворяет условиям* (35), *то обобщенное решение задачи* (1), (5), (6) *является регулярным.*

Теорема 4. *Если выполнено неравенство* (36), *то производные* u_y, v_x, v_y *регулярного решения и функции* $\Gamma_1 = K(y)u_x - v_y$, $\Gamma_2 = u_y + v_x$ *непрерывны в замкнутой области* $\overline{D}_3$, *а производная* u_x *непрерывна в* $\overline{D}_3 \setminus \{(0, 0)\}$ *и удовлетворяет неравенству*

$$|u_x| \leqslant C_3(-y)^{r-(1+2\nu)/(1-2\nu)}.$$

Примечание при корректуре. Когда статья находилась уже в печати, автором было замечено, что из условия теоремы 1 можно исключить неравенство (28), т. к. оно следует из неравенства $\lambda < 1$; из системы (35) можно исключить первое неравенство, т. к. оно вытекает из второго и условия (4).

ЛИТЕРАТУРА

1. Салахитдинов М. С. Уравнения смешанно-составного типа.—Ташкент, 1974.—156 с.
2. Чекмарев Т. В. Решение системы дифференциальных уравнений смешанного типа в области гиперболичности.—Изв. вузов. Матем., 1967, № 5, с. 108—119.
3. Чекмарев Т. В. Письмо в редакцию.—Изв. вузов. Матем., 1972, № 10, с. 99—101.

г. Усть-Каменогорск

Поступила
31 X 1980