П. Л. Иванков, О неоднородных линейных формах,
Чебышевский сб., 2013, том 14, выпуск 3, 56–64

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 14 Выпуск 3 (2013)

УДК 511.361

О НЕОДНОРОДНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ФОРМАХ

П. Л. Иванков (г. Москва)

Аннотация

В данной работе рассматриваются гипергеометрические функции с иррациональными параметрами и их производные (в том числе и по параметру). С помощью специального выбора степени нулевого многочлена уточнены оценки снизу модулей соответствующих линейных форм.

Ключевые слова: Аппроксимации Паде второго рода, обобщенные гипергеометрические функции, иррациональные параметры, дифференцирование по параметру, оценки снизу линейных форм.

ON HETEROGENEOUS LINEAR FORMS

P. L. Ivankov (Moscow)

Abstract

In this paper we consider hypergeometric functions with irrational parameters and their derivatives (including with respect to parameter). By means of specially chosen degree of zero polynomial more precise low estimates of the moduli of corresponding linear forms are obtained.

Keywords: Padé approximations of the second type, generalized hypergeometric functions, irrational parameters, differentiation with respect to parameter, low estimates of linear forms.

Рассмотрим функции

$$F_{0j}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \nu^{j-1} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{b(x)(x+\lambda)}\,,\ j = 1, \dots, u, \tag{1}$$

где $b(x) = (x+\beta_1)\dots(x+\beta_m)$ — многочлен, первые $v_1 - 1$ корней которого рациональны ($v_1 \geqslant 1$), а $(x+\beta_{v_1})\dots(x+\beta_m) \in \mathbb{I}[x]$; $\mathbb{I}$ — некоторое мнимое квадратичное поле; $u = m+1$. Наряду с функциями (1) будем рассматривать также функции, полученные из них дифференцированием по параметру λ:

$$F_{1j}(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu}\nu^{j-1}\prod_{x=1}^{\nu}\frac{1}{b(x)}\frac{d}{d\lambda}\prod_{x=1}^{\nu}\frac{1}{x+\lambda}=$$
$$=-\sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu}\nu^{j-1}\prod_{x=1}^{\nu}\frac{1}{b(x)(x+\lambda)}\left(\frac{1}{\lambda+1}+\dots+\frac{1}{\lambda+\nu}\right),\ j=1,\dots,u. \quad (2)$$

Будем также считать, что $b(x)(x+\lambda)\neq 0$ при $x=1,2,\dots$.

Теорема 1. *Пусть $v=u-v_1$, и пусть выполнены все перечисленные выше условия; λ является дробным рациональным числом, а ненулевое число ξ лежит в поле $\mathbb{I}$. Пусть, далее, $\epsilon>0$, и пусть h_0, h_{lj}, $l=0,1$, $j=1,\dots,u$, — нетривиальный набор целых чисел из поля $\mathbb{I}$. Обозначим*

$$H=\max(|h_{lj}|,\ l=0,1,\ j=1,\dots,u).$$

Тогда, если H достаточно велико (нижняя граница зависит от ϵ), то выполняется неравенство

$$\left|h_0+\sum_{l=0}^{1}\sum_{j=1}^{u}h_{lj}F_{lj}(\xi)\right|>H^{-2u-\frac{v}{v_1}-\epsilon}. \quad (3)$$

В работах [1] и [2] оценки линейных неоднородных форм от значений гипергеометрических функций с иррациональными параметрами были получены с помощью теории делимости в полях алгебраических чисел. Эти оценки были уточнены (без использования упомянутой теории) в [3]. Во всех перечисленных работах не рассматриваются функции, продифференцированные по параметру (т.е. функции вида (2)). Оценка (3) в некоторых случаях точнее оценки, полученной в более общей ситуации в работе [4]; см. по этому поводу [3].

Пусть n — натуральный параметр,

$$N_1=\left[n\left(1+\frac{1}{2v_1}-\frac{1}{2u}\right)\right],\ N_2=\left[\frac{n}{2}\right]-1,\ N_3=\left[n\left(1+\frac{1}{2v_1}\right)\right].$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\Phi(z)=\prod_{\sigma=0}^{N_2}(z-\lambda-N_3+n+\sigma)^2 \quad (4)$$

и подберем числа ϑ_s так, чтобы тождественно по z выполнялось равенство

$$\Phi(z)=\sum_{s=0}^{n}\vartheta_s\prod_{x=n-s+1}^{n}(z+x). \quad (5)$$

Для этого (см., например, [5, с. 40 - 41]) следует положить

$$\vartheta_s = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{\Phi(z)\,dz}{\prod\limits_{x=n-s}^{n}(z+x)},$$

где положительно ориентированная окружность Γ охватывает все полюсы подынтегральной функции. Заметим, что из (5) следует равенство

$$\Phi(z)\prod_{x=1}^{n}\frac{1}{z+x} = \sum_{s=0}^{n}\vartheta_s\prod_{x=1}^{n-s}\frac{1}{(z+x)}. \tag{6}$$

Рассмотрим некоторые свойства чисел ϑ_s.

Лемма 1. *Пусть $B(s)$ — многочлен от s степени не выше N_2. Тогда*

$$\sum_{s=0}^{n}\vartheta_s B(s)\frac{d^l}{d\lambda^l}\prod_{x=1}^{n-s}\frac{1}{\lambda+N_3-n+x} = 0 \text{ при } l = 0,1\,. \tag{7}$$

Доказательство. Подставим $z = \lambda + N_3 - n - \sigma$ в равенство (6):

$$\left.\frac{\Phi(z)}{\prod\limits_{x=1}^{n}(z+x)}\right|_{z=\lambda+N_3-n-\sigma} = \sum_{s=0}^{n}\vartheta_s\prod_{x=1}^{n-s}\frac{1}{\lambda+N_3-n-\sigma+x} =$$

$$= \sum_{s=0}^{n}\vartheta_s B_\sigma(s)\prod_{x=1}^{n-s}\frac{1}{\lambda+N_3-n+x}\,, \tag{8}$$

где

$$B_\sigma(s) = \prod_{x=0}^{\sigma-1}\frac{\lambda+N_3-s-x}{\lambda+N_3-n-x}\,. \tag{9}$$

Из (4) следует, что если $0 \leqslant \sigma \leqslant N_2$, то

$$\sum_{s=0}^{n}\vartheta_s B_\sigma(s)\prod_{x=1}^{n-s}\frac{1}{\lambda+N_3-n+x} = 0,$$

а поскольку любой многочлен $B(s)$ степени не выше N_2 представляется в виде линейной комбинации многочленов $B_\sigma(s)$, то равенство (7) при $l = 0$ доказано. Чтобы доказать это равенство при $l = 1$ следует продифференцировать обе части (6) и подставить в получившееся равенство $z = \lambda + N_3 - n - \sigma$. Имеем при $0 \leqslant \sigma \leqslant N_2$

$$0=\frac{d}{dz}\frac{\Phi(z)}{\prod\limits_{x=1}^{n}(z+x)}\Bigg|_{z=\lambda+N_3-n-\sigma}=\left(\sum_{s=0}^{n}\vartheta_s\frac{d}{dz}\prod_{x=1}^{n-s}\frac{1}{z+x}\right)_{z=\lambda+N_3-n-\sigma}=$$

$$=\sum_{s=0}^{n}\vartheta_s\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(B_\sigma(s)\prod_{x=1}^{n-s}\frac{1}{\lambda+N_3-n+x}\right)=$$

$$=\sum_{s=0}^{n}\vartheta_s\left(\frac{\partial B_\sigma(s)}{\partial\lambda}\prod_{x=1}^{n-s}\frac{1}{\lambda+N_3-n+x}+B_\sigma(s)\frac{d}{d\lambda}\prod_{x=1}^{n-s}\frac{1}{\lambda+N_3-n+x}\right). \quad (10)$$

По доказанному

$$\sum_{s=0}^{n}\vartheta_s\frac{\partial B_\sigma(s)}{\partial\lambda}\prod_{x=1}^{n-s}\frac{1}{\lambda+N_3-n+x}=0\,,$$

поэтому из (10) можно, как показано выше, вывести утверждение леммы при $l=1$. Лемма доказана.

С помощью чисел ϑ_s определим многочлен

$$P(z)=\sum_{s=0}^{n}p_sz^s,$$

где

$$p_s=\vartheta_s\prod_{x=N_3-n+1}^{N_3-s}b(x)\,. \quad (11)$$

Пусть

$$r^*_{lj}(z)=P(z)F_{lj}(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}c_{lj\nu}z^\nu\,. \quad (12)$$

Лемма 2. *В равенстве* (12)

$$c_{lj\nu}=0,\ N_1+2\leqslant\nu\leqslant N_3,\ l=0,1,\ j=1,\dots,u\,. \quad (13)$$

Доказательство. Имеем при $l=0$, учитывая (11),

$$c_{lj\nu}=\sum_{s=0}^{n}p_s(\nu-s)^{j-1}\prod_{x=1}^{\nu-s}\frac{1}{b(x)(x+\lambda)}=$$

$$=\prod_{x=1}^{N_3-n}\frac{1}{b(x)(\lambda+x)}\sum_{s=0}^{n}\vartheta_sQ_{j\nu}(s)\prod_{x=1}^{n-s}\frac{1}{\lambda+N_3-n+x}\,, \quad (14)$$

где

$$Q_{j\nu}(s)=(\nu-s)^{j-1}\prod_{x=\nu+1}^{N_3}b(x-s)(x+\lambda-s) \quad (15)$$

— многочлен от s степени не выше N_2. Из леммы 1 следует, что $c_{lj\nu} = 0$ при указанных значениях индексов. Аналогично проверяются равенства (13) и при $l = 1$. Лемма доказана.

Последняя лемма показывает, что с помощью многочлена $P(z)$ можно построить совместные приближения для функций (1) и (2). Определим при $l = 0, 1,\ j = 1, \ldots, u$ многочлены степени не выше $N_1 + 1$

$$-P_{lj}(z) = \sum_{\nu=0}^{N_1+1} c_{lj\nu} z^{\nu}. \tag{16}$$

Наименьшим общим знаменателем некоторого множества чисел X из поля $\mathbb{I}$ будем называть наименьшее по модулю ненулевое целое число из этого поля, после умножения на которое любое число из X становится целым в упомянутом поле. Через $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ будем обозначать положительные постоянные, не зависящие от n (они могут зависеть от параметров функций (1) и (2), от поля $\mathbb{I}$ и от числа ξ).

Лемма 3. *Модуль общего наименьшего знаменателя коэффициентов*

$$c_{lj\nu},\ l = 0, 1,\ j = 1, \ldots, u,\ \nu = 0, 1, \ldots, N_1 + 1,$$

многочленов (16) *не превосходит* $(n!)^{\frac{v}{2v_1}} e^{\gamma_1 n}$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $l = 0$. Запишем и преобразуем выражение для коэффициента $c_{0j\nu}$; имеем при $0 \leqslant \nu \leqslant n$

$$c_{0j\nu} = \sum_{s=0}^{\nu} p_s (\nu - s)^{j-1} \prod_{x=1}^{\nu-s} \frac{1}{b(x)(x+\lambda)} = \prod_{x=1}^{N_3-n} \frac{1}{b(x)(x+\lambda)} \times$$
$$\times \left(\sum_{s=0}^{n} \vartheta_s Q_{j\nu}(s) \prod_{x=1}^{n-s} \frac{1}{\lambda + N_3 - n + x} - \sum_{s=\nu+1}^{n} \vartheta_s Q_{j\nu}(s) \prod_{x=1}^{n-s} \frac{1}{\lambda + N_3 - n + x} \right), \tag{17}$$

где $Q_{j\nu}(s)$ определяется равенством (15). При $\nu > n$ выражение для $c_{0j\nu}$ было получено ранее (см. (14) и (15)). Многочлен $Q_{j\nu}(s)$ можно записать в виде линейной комбинации многочленов (9); при $0 \leqslant \nu \leqslant N_1 + 1$ степень многочлена $Q_{j\nu}(s)$ равна $j + u(N_3 - \nu) - 1$. Поэтому существуют такие числа $A_{j\nu\sigma}$, что тождественно по s выполняется равенство

$$Q_{j\nu}(s) = \sum_{\sigma=0}^{j+u(N_3-\nu)-1} A_{j\nu\sigma} B_{\sigma}(s).$$

Отсюда, используя (как и в случае с числами ϑ_s) теорию рядов Ньютона, получаем формулы для коэффициентов $A_{j\nu\sigma}$:

$$A_{j\nu\sigma} = -\prod_{x=0}^{\sigma-1} (\lambda + N_3 - n - x) \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C} \frac{Q_{j\nu}(z)}{\prod\limits_{x=0}^{\sigma} (\lambda + N_3 - z - x)}\, dz\,, \tag{18}$$

где положительно ориентированная окружность C охватывает все нули подынтегральной функции. С помощью (18) преобразуем первую сумму в скобках в правой части (17). Имеем

$$\prod_{x=1}^{N_3-n}\frac{1}{b(x)(x+\lambda)}\sum_{s=0}^{n}\vartheta_s Q_{j\nu}(s)\prod_{x=1}^{n-s}\frac{1}{\lambda+N_3-n+x}=$$

$$=\prod_{x=1}^{N_3-n}\frac{1}{b(x)(x+\lambda)}\sum_{\sigma=0}^{j+u(N_3-\nu)-1}A_{j\nu\sigma}\sum_{s=0}^{n}\vartheta_s B_\sigma(s)\prod_{x=1}^{n-s}\frac{1}{\lambda+N_3-n+x}=$$

$$=-\prod_{x=1}^{N_3-n}\frac{1}{b(x)(x+\lambda)}\sum_{\sigma=N_2+1}^{j+u(N_3-\nu)-1}\prod_{x=0}^{\sigma-1}(\lambda+N_3-n-x)\frac{\Phi(\lambda+N_3-n-\sigma)}{\prod\limits_{x=1}^{n}(\lambda+N_3-n-\sigma+x)}\times$$

$$\times\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{Q_{j\nu}(z)}{\prod\limits_{x=0}^{\sigma}(\lambda+N_3-z-x)}\,dz\,. \qquad (19)$$

По ходу преобразований мы использовали (8) и (18). В последней сумме отброшены нулевые слагаемые. Теперь можно оценить модуль общего наименьшего знаменателя чисел $c_{0j\nu}$. Дальнейшие рассуждения изложим схематично, поскольку они стандартны и носят чисто технический характер. Воспользуемся тем, что при рациональных ω_1 и ω_2 общий наименьший знаменатель дробей

$$\frac{(\omega_1+1)\ldots(\omega_1+s)}{(\omega_2+1)\ldots(\omega_2+s)},\ s=0,1,\ldots,N, \qquad (20)$$

оценивается сверху величиной порядка $e^{O(N)}$. Постоянная в показателе степени зависит от ω_1 и ω_2. Доказательство см. в [6, с. 186]. Нам, возможно, потребуются различные модификации этого утверждения (например, в каждой скобке числителя добавляется одно и то же целое рациональное слагаемое и т.п.). Подробно на этом не останавливаемся.

В сумме (19) интеграл можно записать в виде вычета относительно $z=\infty$; ясно поэтому, что модуль общего наименьшего знаменателя таких интегралов (при всех допустимых значениях индексов) оценивается сверху величиной $e^{\gamma_2 n}$. Общий наименьший знаменатель остальных выражений оценивается (ввиду рациональности числа λ) с помощью упомянутого выше утверждения об общем знаменателе чисел (20). В конечном итоге остается лишь множитель

$$\frac{1}{\prod\limits_{x=1}^{N_3-n}(\beta_{v_1}+x)\ldots(\beta_m+x)}, \qquad (21)$$

к которому это утверждение неприменимо по причине возможной иррациональности чисел $\beta_{v_1},\ldots,\beta_m$ (а также по причине того, что в числителе уже <почти ничего не осталось>). Поэтому в формируемый общий знаменатель в качестве множителя целиком включаем знаменатель дроби (21).

Для последней суммы, входящей в (17), все обстоит благополучно: в силу условия $s \geqslant \nu + 1$ в числителе, как легко видеть, достаточно множителей, чтобы <почти все сократилось>. Здесь общий наименьший знаменатель оценивается сверху величиной $e^{O(n)}$; при получении этой оценки следует записать ϑ_s в виде суммы соответствующих вычетов. Таким образом, для модуля общего наименьшего знаменателя чисел $c_{0j\nu}$ справедлива указанная в лемме оценка.

Рассмотрение случая $l = 1$ несколько сложнее в техническом отношении. Здесь одной лишь оценки общего наименьшего знаменателя дробей (20) недостаточно. Поскольку

$$\frac{d}{d\lambda}\frac{1}{(\lambda+1)\dots(\lambda+N)} = -\frac{1}{(\lambda+1)\dots(\lambda+N)}\left(\frac{1}{\lambda+1}+\dots+\frac{1}{\lambda+N}\right),$$

то надо знать оценку наименьшего общего кратного чисел

$$q(\lambda+1),\dots,q(\lambda+N), \tag{22}$$

где q — знаменатель числа λ. Известно, что общее наименьшее кратное чисел $1,\dots,N$ есть величина порядка $e^{O(N)}$. Нетрудно проверить, что аналогичная оценка справедлива и для общего наименьшего кратного чисел (22).

В целом рассуждения аналогичны случаю $l = 0$. Ограничимся лишь записью аналога равенства (17):

$$\begin{aligned} c_{1j\nu} = \prod_{x=1}^{N_3-n}\frac{1}{b(x)}\Biggl(\sum_{s=0}^{n}\vartheta_s(\nu-s)^{j-1}\prod_{x=\nu+1}^{N_3} b(x-s)\times \\ \times\frac{d}{d\lambda}\left(\prod_{x=1}^{N_3-n}\frac{1}{\lambda+x}\prod_{x=\nu+1}^{N_3}(\lambda+x-s)\prod_{x=1}^{n-s}\frac{1}{\lambda+N_3-n+x}\right)- \\ -\sum_{s=\nu+1}^{n}\vartheta_s(\nu-s)^{j-1}\prod_{x=\nu+1}^{N_3} b(x-s)\frac{d}{d\lambda}\left(\prod_{x=1}^{n-s}\frac{1}{x+\lambda}\prod_{x=\nu+1}^{n}(x+\lambda-s)\right)\Biggr). \end{aligned}$$

Заметим, что последнее выражение годится лишь при $0 \leqslant \nu \leqslant n$. Оценка общего наименьшего знаменателя проводится по рассмотренной выше схеме; к полученному там значению добавляется общее наименьшее кратное чисел вида (22). На окончательной оценке это не сказывается. Лемма доказана.

Предыдущие рассмотрения показывают, что линейная форма

$$r_{lj}(z) = P_{lj}(z) + P(z)F_{lj}(z) \tag{23}$$

имеет порядок нуля близкий к максимально возможному; это следует из леммы 2 и определения многочлена $P_{lj}(z)$ (используемый метод позволяет без особого труда получить здесь и максимально возможный порядок нуля).

Лемма 4. *Справедливы оценки*

$$|P(\xi)| \leqslant (n!)^u e^{\gamma_3 n}, \ \ |r_{lj}(\xi)| \leqslant (n!)^{-\frac{u}{2v_1}} e^{\gamma_4 n}, \ l=0,1, \ j=1,\ldots,u. \tag{24}$$

Подробное доказательство здесь не требуется. Оценка модуля числа $P(\xi)$ следует непосредственно из оценки

$$|p_s| \leqslant \left(\frac{n!}{s!}\right)^u e^{\gamma_5 n}, \tag{25}$$

которая получается из (11). Вторая из оценок (24) также следует из (25); соответствующая вычислительная процедура не представляет трудностей.

Таким образом, мы имеем совместные приближения (23) для функций (1) и (2). Функция $F_{01}(z)$ удовлетворяет уравнению

$$b(\delta)(\delta+\lambda)y = zy + \lambda b(0), \ \delta = z\frac{d}{dz}\,.$$

Пользуясь этим, нетрудно составить систему уравнений, которой удовлетворяют функции (1) и (2). Далее, по схеме, предложенной в работе [7], можно построить целую совокупность совместных функциональных приближений для рассматриваемых функций. При этом определитель, составленный из коэффициентов таких форм будет отличен от тождественного нуля. Затем осуществляется переход к числовым линейным приближающим формам. Соответствующий результат оформим в виде леммы.

Лемма 5. *В поле $\mathbb{I}$ существуют числа*

$$w^{(k)}, \, w_{lj}^{(k)}, \, l=0,1, \ j=1,\ldots,u, \ k=0,1,\ldots,2u, \tag{26}$$

обладающие следующими свойствами

1) определитель $\left| w^{(k)} \ w_{lj}^{(k)} \right|_{\substack{k=0,1,\ldots,2u \\ l=0,1,\, j=1,\ldots,u}}$ *отличен от нуля;*

2) справедливы оценки $\left|w^{(k)}\right| \leqslant (n!)^u e^{\gamma_6 n}, k=0,1,\ldots,2u;$

3) все числа $w^{(k)}$ являются целыми в поле $\mathbb{I}$, а модуль общего наименьшего знаменателя остальных чисел (26) не превосходит $(n!)^{\frac{v}{2v_1}} e^{\gamma_7 n}$*;*

4) $\left|w_{lj}^{(k)} + w^{(k)} F_{lj}(\xi)\right| \leqslant (n!)^{-\frac{u}{2v_1}} e^{\gamma_8 n}.$

С помощью последней леммы нетрудно получить утверждение теоремы — соответствующее рассуждение хорошо известно.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галочкин А. И. Об арифметических свойствах значений некоторых целых гипергеометрических функций // Сибирский математический журнал. 1976. Т. XVII, № 6. С. 1220—1235.

2. Галочкин А. И. О некотором аналоге метода Зигеля // Вестник Московского университета. Сер. Математика, механика. 1986. № 2. С. 30—34.

3. Иванков П. Л. Уточнение оценок некоторых неоднородных линейных форм // Математические заметки. 2005. Т. 77, вып. 4. С. 515—521.

4. Иванков П. Л. Об использовании совместных приближений для изучения арифметической природы значений гипергеометрических функций // Наука и образование: электронное научно-техническое издание. 2012. № 12. С. 135—142. URL: technomag.edu.ru/doc/500464.html(дата обращения: 20.08.2013)

5. Фельдман Н. И. Седьмая проблема Гильберта. М.: Изд-во Московского университета, 1982.

6. Шидловский А. Б. Трансцендентные числа. М.: Наука, 1987.

7. Chudnovsky D. V., Chudnovsky G. V. Applications of Padé approximation to Diophantine inequalities in values of G-function // Lect. Notes in Math. 1985. Vol. 1135. P. 9—51.

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана
Поступило 21.08.2013