Доклады Академии наук СССР
1978. Том 240, № 3

УДК 517.11 *МАТЕМАТИКА*

В. Б. ШЕХТМАН

НЕРАЗРЕШИМОЕ СУПЕРИНТУИЦИОНИСТСКОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

(*Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 2 II 1978*)

Исчисление высказываний, содержащее правило подстановки, называется разрешимым в сильном смысле (р.с.с.), если присоединение к нему любой аксиомы дает разрешимое исчисление. Проблема, является ли исчисление Гейтинга H р.с.с., была поставлена Р. Харропом ([1]) и А. В. Кузнецовым ([2]). Оказалось, что существуют обширные семейства р.с.с. суперинтуиционистских логик, например конечнослойные логики ([3]), «конечномерные H-логики» ([4]) и др. С другой стороны, были найдены примеры неразрешимых исчислений слабее H (см. ([1])). В настоящей работе приводится окончательное решение проблемы Харропа — Кузнецова: не является р.с.с. даже позитивный фрагмент H с 7 переменными. Построенная нами логика аксиоматизируется конечным числом формул, описывающих работу машины Тьюринга, подобно тому, как формулы из ([5]) и ([6]) задают движение по натуральному ряду.

Обозначения: T_2 — множество конечных последовательностей из 0 и 1; Λ — пустая последовательность; lh — длина; $\varepsilon \preccurlyeq \delta$, если ε — начало δ; $\bar{\varepsilon}$ — обращение последовательности ε; R_2 — множество $\varepsilon \in T_2$ таких, что ε сравнима с 10 и не содержит двух вхождений 0 подряд; $\overline{R_2} = \{\bar{\varepsilon} \mid \varepsilon \in T_2\}$, $R_2^+ = R_2 - \{\Lambda\}$; $\overline{R}_2^+ = \overline{R}_2 - \{\Lambda\}$, $T_2(1) = \{\varepsilon 1 \mid \varepsilon \in T_2\} \cup \{\Lambda\}$, $T_2^+ = T_2 - \{\Lambda\}$.

По индукции определим 4 функции из T_2 и 3 функции из $T_2(1)$ в множество интуиционистских формул:

$$B_i(\Lambda) = p_i, \quad C_j(\Lambda) = q_j, \quad B_i(\varepsilon 0) = B_{i+2}(\varepsilon) \wedge B_{i+3}(\varepsilon) \to B_i(\varepsilon) \vee B_{i+1}(\varepsilon),$$
$$B_i(\varepsilon 1) = B_{i+3}(\varepsilon) \to B_i(\varepsilon) \vee B_{i+1}(\varepsilon) \vee B_{i+2}(\varepsilon),$$
$$C_j(0\lambda\varepsilon) = C_{j+1}(\lambda\varepsilon) \wedge C_{j+2}(\lambda\varepsilon) \to C_{j+2}(\varepsilon) \vee C_j(\lambda\varepsilon),$$
$$C_j(1\varepsilon) = C_{j+2}(\varepsilon) \to C_j(\varepsilon) \vee C_{j+1}(\varepsilon)$$

($\varepsilon \in T_2$, $i \in \mathbf{Z}/(4)$, $j \in \mathbf{Z}/(3)$, $\lambda = 0$ или $\lambda = 1$).

Для $\varepsilon \in T_2$, $\delta \in T_2(1)$ полагаем

$$A(\varepsilon, \delta) = \bigwedge_{\substack{i \in \mathbf{Z}/(4),\ \lambda \in \{0,1\}, \\ \varepsilon\lambda \in R_2}} B_i(\varepsilon\lambda) \wedge \bigwedge_{\substack{i \in \mathbf{Z}/(3),\ \lambda \in \{0,1\}, \\ \lambda\delta \in \overline{R}_2}} C_i(\lambda\delta) \to$$
$$\to \bigvee_{i \in \mathbf{Z}/(4)} B_i(\varepsilon) \vee \bigvee_{i \in \mathbf{Z}/(3)} C_i(\delta);$$
$$D(\varepsilon, \delta) = B_0(\varepsilon 1) \vee A(\varepsilon, \delta).$$

Если $\alpha \in T_2$, $\beta \in T_2(1)$, рассматриваем примеры формулы X:

$${}^{\alpha}X = X(B_0(\alpha)/p_0, \ldots, B_3(\alpha)/p_3), \quad X^{\beta} = X(C_0(\beta)/q_0, \ldots, C_2(\beta)/q_2).$$

Лемма 1.

$${}^{\alpha}B_i(\varepsilon) = B_i(\alpha\varepsilon); \quad C_j(\varepsilon)^{\beta} = C_j(\varepsilon\beta); \quad {}^{\alpha}D(\varepsilon, \delta)^{\beta} = D(\alpha\varepsilon, \delta\beta).$$

Доказательство первых двух утверждений — индукцией по $lh(\varepsilon)$. Третье следует из них.

Определение 1. Пусть $\mathfrak{A}$ — алфавит, $\mathfrak{A}^*$ — множество всех слов в нем. Полусистемой Туэ с запятой (п.Т.з) над $\mathfrak{A}$ назовем множество четверок $\langle \varepsilon_1, \delta_1, \varepsilon_2, \delta_2 \rangle$, $\varepsilon_i, \delta_i \in \mathfrak{A}^*$. Каждой такой четверке соответствуют правила вывода $\dfrac{(\alpha\varepsilon_1, \delta_1\beta)}{(\alpha\varepsilon_2, \delta_2\beta)}$ $\alpha, \beta \in \mathfrak{A}^*$. П.Т.з $\mathcal{T}$ над $\{0, 1\}$ называется удобной, если для всех $\langle \varepsilon_1, \delta_1, \varepsilon_2, \delta_2 \rangle$ из $\mathcal{T}$ $\delta_1, \delta_2 \in T_2(1)$ и $lh(\varepsilon_i)$, $lh(\delta_i) \leqslant 4$.

Лемма 2. *Пусть $\mathcal{T}$ — п.Т.з. над $\mathfrak{A} = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Положим* $\varphi(\Lambda) = \Lambda$, $\varphi(a_m) = 101^{m+2}01$, $\varphi(a_{m_1} \ldots a_{m_k}) = \varphi(a_{m_1}) \ldots \varphi(a_{m_k})$,

$$\varphi(\mathcal{T}) = \{\langle \varphi(\varepsilon_1), \varphi(\delta_1), \varphi(\varepsilon_2), \varphi(\delta_2) \rangle \mid \langle \varepsilon_1, \delta_1, \varepsilon_2, \delta_2 \rangle \in \mathcal{T}\}.$$

Тогда для любых $u_1, v_1, u_2, v_2 \in \mathfrak{A}^*$

$$(u_1, v_1) \vdash_{\mathcal{T}} (u_2, v_2) \Leftrightarrow (\varphi(u_1), \varphi(v_1)) \vdash_{\varphi(\mathcal{T})} (\varphi(u_2), \varphi(v_2)).$$

Доказательство. $\Rightarrow$ тривиально; $\Leftarrow$ доказывается индукцией по построению вывода в $\varphi(\mathcal{T})$.

Определение 2. Пусть $\mathcal{T}$ — удобная п.Т.з. Логика $L(\mathcal{T})$ получается присоединением к H множества аксиом $\{D(\varepsilon', \delta') \to D(\varepsilon, \delta) \mid \langle \varepsilon, \delta, \varepsilon', \delta' \rangle \in \mathcal{T}\}$.

Лемма 3. *Пусть $\mathcal{T}$ — удобная п.Т.з.* $(\varepsilon, \delta) \vdash_{\mathcal{T}} (\varepsilon', \delta')$, $\varepsilon', \delta' \in T_2(1)$. *Тогда* $L(\mathcal{T}) \vdash D(\varepsilon', \delta') \to D(\varepsilon, \delta)$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда длина вывода (ε', δ') из (ε, δ) равна 2. Но тогда $D(\varepsilon', \delta') \to D(\varepsilon, \delta)$ есть пример аксиомы $L(\mathcal{T})$ (лемма 1).

Некоторые обозначения, касающиеся моделей Крипке: $\models$ обозначает общезначимость формулы на шкале и истинность формулы в точке модели Крипке; пишем $x \models X_1, \ldots, X_n \mid Y_1, \ldots, Y_m$, если в точке x истинна $\bigwedge_{i=1}^{n} X_i$ и ложна $\bigvee_{i=1}^{m} Y_i$; x опровергает $(X \to Y)$ $(x \dashv X \to Y)$, если $x \models X \mid Y$.

Лемма 4. *Пусть $\theta \in T_2^+$, x — точка некоторой модели Крипке.*

а) *Если $x \dashv B_i(\theta)$, то* $x \models \bigwedge_{j \neq i} B_j(\theta) \wedge \bigwedge_j (B_j(\theta 0) \wedge B_j(\theta 1))$.

б) *Если $\theta \in T_2(1)$, $x \dashv C_i(\theta)$, то* $x \models \bigwedge_{j \neq i} C_j(\theta) \wedge \bigwedge_j (C_j(0\theta) \wedge C_j(1\theta))$.

Доказательство легко следует из определений.

Определение 3. Канвой называется множество $CNV = CNV_l \cup CNV_r$, где $CNV_l = \{b_i(\varepsilon) \mid i \in \mathbf{Z}/(4),\ \varepsilon \in R_2\}$, $CNV_r = \{c_i(\varepsilon) \mid i \in \mathbf{Z}/(3),\ \varepsilon \in \overline{R}_2\}$.

Зададим на CNV наименьший порядок, удовлетворяющий условиям:

1) $b_i(\varepsilon 0) \leqslant b_i(\varepsilon)$, $b_{i+1}(\varepsilon)$;
2) $b_i(\varepsilon 1) \leqslant b_i(\varepsilon)$, $b_{i+1}(\varepsilon)$, $b_{i+2}(\varepsilon)$;
3) $c_i(01\varepsilon) \leqslant c_i(1\varepsilon)$, $c_{i+2}(\varepsilon)$;
4) $c_i(1\varepsilon) \leqslant c_i(\varepsilon)$, $c_{i+1}(\varepsilon)$.

Будем рассматривать следующие группы: $\mathbf{S}_n$ — группа всех перестановок $\mathbf{Z}/(n)$; $\mathbf{C}_n \subset \mathbf{D}_{2n} \subset \mathbf{S}_n$, причем

$$\sigma \in \mathbf{C}_n \Leftrightarrow \forall i\ \sigma(i+1) - \sigma(i) = 1, \qquad \sigma \in \mathbf{D}_{2n} \Leftrightarrow \forall i\ |\sigma(i+1) - \sigma(i)| = 1.$$

Лемма 5. *Рассмотрим модель Крипке над $(CNV, \leqslant)$.*

а) *Пусть $\sigma \in \mathbf{D}_8$; θ_μ $\mu \in R_2$; $\theta \neq \Lambda$; $\forall i\ b_{\sigma(i)}(\gamma) \dashv B_i(\theta)$. Тогда*

$$\exists \tau \in \mathbf{D}_8\ \forall i\ b_{\tau(i)}(\gamma\mu) \dashv B_i(\theta\mu).$$

б) *Пусть $\sigma \in \mathbf{S}_3$; $\mu\theta$, $\mu\gamma \in \overline{R}_2$; $\theta \neq \Lambda$; $\bar{\mu} \geqslant 1$; $\forall i\ c_{\sigma(i)}(\gamma) \dashv C_i(\theta)$. Тогда*

$$\exists \tau \in \mathbf{S}_3\ \forall i\ c_{\tau(i)}(\mu\gamma) \dashv C_i(\mu\theta).$$

Доказательство. а) Индукция по $lh(\mu)$. Разберем лишь случай $\mu=1$. Выберем τ, чтобы для всех i $\tau(i)=\sigma(i)$ при $\sigma\in\mathbf{C}_4$, $\tau(i)=\sigma(i)+2$ при $\sigma\notin\mathbf{C}_4$. Пусть $z_i=b_{\sigma(i)}(\gamma)$, $y_i=b_{\tau(i)}(\gamma 1)$. Ясно, что $\tau\in\mathbf{D}_8$; $y_i\leqslant z_i$, z_{i+1}, z_{i+2} (откуда $y_i\models|\bigvee_{j\neq i+3} B_j(\theta)$). Если бы $y_i\models|B_{i+3}(\theta)$, то $y_i\dashv B_{i+3}(\theta)$ (так как $z_j\models B_{i+3}(\theta)$ при $j\neq i+3$ — по лемме 4). Если $\theta=\eta 0$, то $y_i\models B_{i+1}(\eta)$, откуда $z_i\models B_{i+1}(\eta)$, что не так ($z_i\dashv B_i(\eta 0)$). Если $\theta=\eta 1$, то имеем $z_i\models B_{i+2}(\eta)$, что неверно, так как $z_i\dashv B_i(\eta 1)$. Утверждение б) доказывается аналогично.

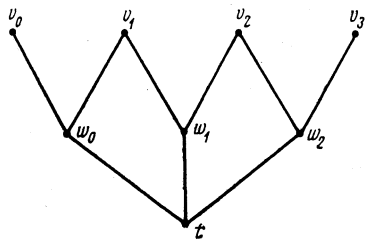

Рис. 1

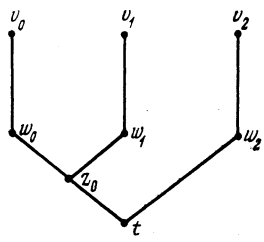

Рис. 2

Определение 4. Пусть $\mathcal{T}$ — п.Т.з. над $\{0, 1\}$. Полагаем $CODE(\mathcal{T})=(CNV\cup\mathcal{A}\cup\mathcal{D}, \leqslant)$, где

$$\mathcal{A}=\{a(\varepsilon, \varepsilon')\,|\,\varepsilon\in R_2,\ \varepsilon'\in\overline{R_2}\},\quad \mathcal{D}=\{d(\varepsilon, \varepsilon')\,|\,\varepsilon\in R_2,\ \varepsilon'\in\overline{R_2}\},$$

$\leqslant$ есть наименьший порядок, удовлетворяющий условиям:

1) $a(\varepsilon, \varepsilon')\leqslant b_i(\varepsilon)$, $c_j(\varepsilon')$, при $i\in\mathbf{Z}/(4)$, $j\in\mathbf{Z}/(3)$;
2) $(\varepsilon, \varepsilon')\vdash_{\mathcal{T}}(\delta, \delta')\Rightarrow d(\varepsilon, \varepsilon')\leqslant a(\delta, \delta')$;
3) $d(\varepsilon, \varepsilon')\leqslant b_i(\delta)$, при $i\in\mathbf{Z}/(4)$, $\delta\in R_2$,

и индуцирующий на канве ее порядок.

Лемма 6. *Пусть дана модель Крипке над $CODE(\mathcal{T})$. Обозначим:*

$$V_l(\varepsilon)=\{x\,|\,\exists i\ x\leqslant b_i(\varepsilon)\},\quad V_r(\varepsilon)=\{x\,|\,\exists j\ x\leqslant c_j(\varepsilon)\}.$$

а) *Пусть $\varepsilon\in R_2$, $lh(\varepsilon)\geqslant 3$, $y\dashv B_0(\varepsilon)$, $y\in CNV$. Тогда*

$$\exists\alpha\in R_2\ (y\in V_l(\alpha 1)\,\&\,\forall\gamma\in R_2{}^+\ \exists\tau\in\mathbf{D}_8\ \forall i\in\mathbf{Z}/(4)$$
$$V_l(\alpha 1)\cup\{x\,|\,x\dashv B_i(\gamma)\}=\{b_{\tau(i)}(\alpha\gamma)\}).$$

б) *Пусть $\varepsilon\in\overline{R_2}$, $lh(\varepsilon)\geqslant 4$, $y\dashv C_0(\varepsilon)$, $y\in CNV$. Тогда*

$$\exists\beta\in\overline{R_2}(y\in V_r(1\beta)\,\&\,\exists\gamma\in\overline{R_2}{}^+\ \exists\tau\in\mathbf{S}_3\ \forall\in\mathbf{Z}/(3)$$
$$V_r(1\beta)\cap\{x\,|\,x\dashv C_i(\gamma)\}=\{c_{\tau(i)}(\gamma\beta)\}).$$

Доказательство. а) Так как $101\preccurlyeq\varepsilon$, то $B_0(101)$ опровергается в некоторой точке $t\geqslant y$. Поэтому в канве найдутся точки, составляющие диаграмму, изображенную на рис. 1, и такие, что $w_j\dashv B_j(10)$, $v_j\dashv B_j(1)$. Из строения канвы получается, что $\exists\alpha_1\in R_2$, $\exists\sigma\in\mathbf{S}_4$, $\forall j\ v_j=b_{\sigma(j)}(\alpha_1)$. Так как $w_j\dashv B_j(10)$, то легко видеть, что $\sigma\in\mathbf{D}_8$. Ясно также, что $\alpha_1 0\in R_2$ (а потому $\alpha_1=\alpha 1$ для некоторого $\alpha\in R_2$). Из леммы 5 следует, что $\forall\gamma\in R_2{}^+$ $\exists\tau_\gamma\in\mathbf{D}_8$ $\forall i\ b_{\tau_\gamma(i)}(\alpha\gamma)\dashv B_i(\gamma)$. Обратно, индукцией по $lh(\gamma)$ нетрудно показать, что если $x\dashv B_i(\gamma)$ и $\exists j\ x\leqslant b_j(\alpha_1)$, то $x=b_{\tau_\gamma(i)}(\alpha\gamma)$.

б) Так как $101\lambda\preccurlyeq\varepsilon$, $\lambda\in\{0, 1\}$, то $C_0(\lambda 101)$ опровергается в некоторой точке $t\in CNV$. В канве найдутся точки, составляющие диаграмму на рис. 2 и такие, что $w_j\dashv C_j(01)$, $v_j\dashv C_j(1)$. Тогда $\exists\beta'\exists\sigma(\forall j\ v_j=c_{\sigma(j)}(\beta')\ \&\ \beta' 0\in R_2)$. Далее рассуждаем аналогично а).

Лемма 7. *Пусть $\mathcal{T}$ — п.Т.з. над $\{0, 1\}$; ε, $\delta\in R_2$; ε', $\delta'\in\overline{R_2}$; $lh(h)\geqslant 3$, $lh(\delta)\geqslant 4$, $(\varepsilon, \delta)\vdash_{\mathcal{T}}(\delta', \delta')$.*

Тогда $CODE(\mathcal{T})\models D(\varepsilon', \delta')\to D(\varepsilon, \delta)$.

Доказательство. Выберем оценку на $CODE(\mathcal{T})$. Допустим, что $x\models|A(\varepsilon, \delta)$, $B_0(\varepsilon 1)$; тогда $\exists y\geqslant x\ y\dashv A(\varepsilon, \delta)$. Так как $y\models B_0(\varepsilon 1)\,|\bigvee_{i=0}^{\vdots} B_i(\varepsilon)$,

$\bigvee_{j=0}^{2} C_j(\delta)$, то $y \neq x$, поэтому $y \in \mathscr{A} \cup CNV$; кроме того, все формулы $B_i(\varepsilon)$, $C_j(\delta)$ опровергаются в канве. Выберем α, β согласно лемме 6. Так как $y \in V_l(\alpha 1) \cap V_r(1\beta)$, то по лемме 6 $y \in V_l(\alpha\varepsilon) \cap V_r(\delta\beta)$; если $\lambda \in \{0, 1\}$, то $y \notin V_l(\alpha\varepsilon\lambda)$ при $\alpha\varepsilon\lambda \in R_2$, $y \notin V_r(\lambda\delta\beta)$ при $\lambda\delta\beta \in \overline{R_2}$. Отсюда $y = a(\alpha\varepsilon, \delta\beta)$. Так как $x < y$, то $x = d(u, v)$, причем $(u, v) \vdash_{\mathscr{T}} (\alpha\varepsilon, \delta\beta)$. По условию $(\varepsilon, \delta) \vdash \vdash_{\mathscr{T}} (\varepsilon', \delta')$, откуда $(\alpha\varepsilon, \delta\beta) \vdash_{\mathscr{T}} (\alpha\varepsilon', \delta'\beta)$, и, значит, $x \models | A(\varepsilon', \delta')$ по лемме 6.

Лемма 8. *Пусть $\mathscr{T}$ — п.Т.з. над $\{0, 1\}$, $CODE(\mathscr{T}) \models D(\varepsilon', \delta') \to D(\varepsilon, \delta)$; $\varepsilon, \varepsilon' \in R_2$; $\delta, \delta' \in R_2$.*

Тогда $(\varepsilon, \delta) \vdash_{\mathscr{T}} (\varepsilon', \delta')$.

Доказательство. Выберем оценку на $CODE(\mathscr{T})$, полагая $x \models | p_i \Leftrightarrow \Leftrightarrow x \leqslant b_i(\Lambda)$, $x \models | q_j \Leftrightarrow x \leqslant c_j(\Lambda)$. Из лемм 5 и 6 следует что для всех x $x \dashv B_i(\varepsilon) \Leftrightarrow x = b_i(\varepsilon)$, $x \dashv C_j(\delta) \Leftrightarrow x = c_j(\delta)$, поэтому $d(\varepsilon, \delta) \models | D(\varepsilon, \delta)$. По условию тогда $d(\varepsilon, \delta) \models | D(\varepsilon', \delta')$, откуда $d(\varepsilon, \delta) \leqslant a(\varepsilon', \delta')$, т. е. $(\varepsilon, \delta) \vdash_{\mathscr{T}} (\varepsilon', \delta')$.

Теорема. *Пусть $\mathscr{T}$ — удобная п.Т.з. $\varepsilon, \varepsilon' \in R_2$; $\delta, \delta' \in \overline{R_2}$. Тогда*

$$L(\mathscr{T}) \vdash D(\varepsilon', \delta') \to D(\varepsilon, \delta) \Leftrightarrow (\varepsilon, \delta) \vdash_{\mathscr{T}} (\varepsilon', \delta').$$

Доказательство. $\Leftarrow$ доказано в лемме 3. Обратно, если $L(\mathscr{T}) \vdash \vdash D(\varepsilon', \delta') \to D(\varepsilon, \delta)$, то, так как $\mathscr{T}$ удобная, все аксиомы $L(\mathscr{T})$ общезначимы на $CODE(\mathscr{T})$ (лемма 7) и $CODE(\mathscr{T}) \models D(\varepsilon', \delta') \to D(\varepsilon, \delta)$, откуда $(\varepsilon, \delta) \vdash_{\mathscr{T}} (\varepsilon', \delta')$ (лемма 8).

Следствие *. *Существует конечно аксиоматизируемая суперинтуиционистская логика, имеющая полную степень неразрешимости.*

Доказательство. Пусть машина Тьюринга $\mathscr{M}$ вычисляет функцию $f(x) \simeq 0 \cdot \mu y T_1(x, x, y)$. Пусть п.Т.з. $\mathscr{T}$ состоит из четверок вида $\langle u_1 q_a, q_a v_1, u_2 q_b, g_b v_2 \rangle$, для $\dfrac{U u_1 q_a v_1 V}{U u_2 q_b v_2 V}$ — правило обычной полусистемы Туэ для $\mathscr{M}$ ([8], стр. 340). Имеем:

$$\exists y\, T_1(x, x, y) \Leftrightarrow (h s_1^{x+1} q_1, q_1 h) \vdash_{\mathscr{T}} (h s_1^{x+1} s_0 s_1 q_0, q_0 h). \quad \varphi(\mathscr{T})$$

(лемма 2) удобна, и образ φ содержится в $R_2 \cap \overline{R_2}$.

$$(u_1, v_1) \vdash_{\mathscr{T}} (u_2, v_2) \Leftrightarrow (\varphi(u_1), \varphi(v_1)) \vdash_{\varphi(\mathscr{T})} (\varphi(u_2), \varphi(v_2)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow L(\varphi(\mathscr{T})) \vdash D(\varphi(u_2), \varphi(v_2)) \to D(\varphi(u_1), \varphi(v_1)).$$

Итак, проблема самоприменимости примитивно рекурсивно сводится к проблеме выводимости в $L(\varphi(\mathscr{T}))$.

Результаты работы докладывались 20 X 1977 г. на семинаре по конструктивной математике в Вычислительном центре АН СССР.

Автор признателен А. Г. Драгалину и чл.-корр. АН СССР А. А. Маркову за внимание к работе и С. К. Соболеву за полезные замечания.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
11 I 1978

ЛИТЕРАТУРА

[1] *R. Harrop*, J. Symbolic Logic, v. 30, 271 (1965). [2] *А. В. Кузнецов*, Алгебра и логика, т. 2, в. 4 (1963). [3] *А. В. Кузнецов*, XII Всесоюзн. алгебр. коллоквиум, Свердловск, 1973, стр. 281. [4] *С. К. Соболев*, Изв. АН СССР, т. 41, № 5, 963 (1977). [5] *K. Fine*, Theoria, v. 40, 23 (1974). [6] *В. Б. Шехтман*, ДАН, т. 235, № 3, 542 (1977). [7] *С. В. Попов*, ИПМ АН СССР, препринт № 95, 1977. [8] *С. К. Клини*, Введение в метаматематику, М., 1957.

* Когда эта работа уже была написана, появился препринт ([7]), где сообщается аналогичный результат. Аксиомы построенного там исчисления содержат более 75 переменных; на стр. 28 — неточность: формула $\mathfrak{A}_1'$ выводима интуиционистски.