В. В. Ишханов, Б. Б. Лурье, Гипотеза Хассе для циклических расширений, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2005, том 321, 197–204

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 321, 2005 г.

В. В. Ишханов, Б. Б. Лурье

ГИПОТЕЗА ХАССЕ ДЛЯ ЦИКЛИЧЕСКИХ РАСШИРЕНИЙ

В свое время Х. Хассе высказал гипотезу о том, что условие, впоследствие названное условием согласности, является достаточным для погружения в случае коммутативного ядра [1]. Эта гипотеза была позднее независимо опровергнута Д. К. Фаддеевым и И. Р. Шафаревичем [2, 3], причем в [2] в качестве ядра выступала циклическая группа восьмого порядка. Однако до последнего времени не было ясно, справедлива ли гипотеза Хассе в случае погружения циклического расширения в циклическое. Убедительные соображения в пользу того, что условие согласности не гарантирует погружаемость и в этом случае, привел А. В. Яковлев [5]. В настоящей работе явно строится соответствующий пример для полей алгебраических чисел, когда погружаемое поле является квадратичным расширением.

§1. Условия погружения

Пусть k – поле, $a \in k^*$ и не является квадратом в k, тогда $K = k(\sqrt{a})$ – квадратичное расширение поля k. Рассмотрим задачу погружения поля K в циклическое расширение степени 2^n. Такая задача рассматривалась в [4, 5]. Для полей алгебраических чисел эта задача конкретизировалась в [6], но в этой последней работе была допущена неточность в формулировке и доказательстве теоремы 2, на которую указал А. В. Яковлев.

Будем предполагать, что k – поле алгебраических чисел. Пусть k_1 – поле, полученное присоединением к k первообразных корней степени 16 из 1. Будем предполагать, что k_1/k – расширение степени 8, группа Галуа F которого – нециклическая абелева группа с образующими σ и γ и соотношениями $\sigma^4 = 1$, $\gamma^2 = 1$, причем действие автоморфизмов σ и γ на корни задается

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда РФФИ, грант 03-01-00633 и 03-01-00349.

формулами:

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^{\sigma} = \sqrt{2-\sqrt{2}} \qquad \sqrt{-1}^{\,\sigma} = \sqrt{-1},$$
$$\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^{\gamma} = \sqrt{2+\sqrt{2}} \qquad \sqrt{-1}^{\,\gamma} = -\sqrt{-1}.$$

Как было показано в [6] (см. теорему 1), если в рассматриваемой задаче $n > 4$ и выполнено условие согласности, то достаточно рассмотреть сопутствующую задачу погружения с циклической группой порядка 16, поэтому в дальнейшем будем предполагать, что $n = 4$.

Напомним условие погружения для рассматриваемой задачи, полученное в [4] и [5].

Теорема 1. *Пусть k – поле, характеристика которого не равна 2 и $k_0 = k(\sqrt{-1})$. Пусть F_0 – подгруппа группы F, соответствующая подполю k_0 и $b \in k_0$ – такой элемент, что $N_{k_0/k}b = a$ не является квадратом. Обозначим через $x, y \in H^0(F_0, k_1^*)$ классы элементов a, b по модулю $N_{k_1/k_0}k_1^*$. Тогда расширение $k(\sqrt{a})$ погружается в циклическое расширение степени 16 тогда и только тогда, когда в группе $H^0(F_0, k_1^*)$ существует такой элемент z, что $y + 2z \in H^0(F_0, k_1^*)$ инвариантен относительно группы F.*

Доказательство см. в [4] и [5].

Используя теорему 1, мы переформулируем условия погружения рассматриваемой задачи в случае полей алгебраических чисел. Пусть $k_2 = k(\sqrt{-1}, \sqrt{2})$ и S – множество простых дивизоров поля k, группа разложения которых в расширении k_1/k совпадает с F_0. Можно считать, что σ – образующий элемент группы F_0, которая является циклической группой порядка 4. Для $p \in S$ k_p – пополнение k в точке p и θ_p – локальный гомоморфизм Артина $k_p^* \to F_0$.

Теорема 2. *Пусть $K = k(\sqrt{a})$ – квадратичное расширение поля алгебраических чисел k. Если $H^3(F, k_1^*) = 0$, то для погружения K в циклическое расширение степени 16 необходимо и достаточно выполнения условия согласности. Если $H^3(F, k_1^*) \neq 0$, необходимо следующее дополнительное условие погружения. Когда a является нормой в расширении k_2/k, то $\prod_{p \in S} \theta_p(a) = 1$, иначе, т.е. когда a не* *является нормой в расширении k_2/k, то* $\prod\limits_{p\in S}\theta_p(a)=\sigma^2$.

Доказательство. Заметим, что если $H^3(F,k_1^*)=0$, то достаточность условия согласносности для разрешимости абелевой задачи погружения была доказана в [7], поэтому мы рассмотрим случай, когда $H^3(F,k_1^*)\neq 0$.

Заметим, что нетривиальность группы $H^3(F,k_1^*)$ означает, что группа разложения простого дивизора $\overline{p}\in k_2$ либо циклическая порядка 2, либо единичная.

Пусть рассматриваемая задача погружения разрешима, тогда согласно теореме 1 найдутся такие элементы $u\in k_0$ и $v\in k_1$, что $ab^{-2}=\left(u^{1-\gamma}\right)^2N_{k_1/k_0}v$. Тогда $ab^{-2}u^{2(\gamma-1)}=ab^{-2}u_0^2u^{-4}$ является нормой в расширении k_1/k_0, где $u_0=N_{k_0/k}v$ и, следовательно, $ab^{-2}u_0^2$ также является нормой в расширении k_1/k_0.

Если a является нормой в расширении k_2/k, то элемент b можно выбрать так, чтобы он был нормой в расширении k_2/k_0, т.е. b^{-2} является нормой в k_1/k_0. Таким образом, au_0^2 является нормой в расширении k_1/k_0, следовательно, $\theta_p(au_0^2)=1$ для всех $p\in S$ и $\prod\limits_{p\in S}\theta_p(au_0^2)=1$. Следовательно, условие $\prod\limits_{p\in S}\theta_p(a)=1$ эквивалентно условию $\prod\limits_{p\in S}(u_0,2)_{k_p}=1$, где $(u_0,2)_{k_p}$ – символ Гильберта в поле k_p. Заметим, что если $p\in k$ и группа разложения дивизора p в расширении k_2/k либо единичная, либо $\{\gamma\}$, то символ $(u_0,2)_{k_p}$ равен 1. Если группа разложения дивизора p есть $\{\sigma\gamma\}$, то символ $(u_0,2)$ равен 1, так как u_0 является нормой в расширении k_0/k. Таким образом, если $p\overline{\in}S$, то $(u_0,2)_{k_p}=1$, следовательно, $\prod\limits_{p\in S}(u_0,2)_{k_p}=1$.

Пусть теперь a не является нормой в расширении k_2/k. Тогда $\prod\limits_{p\in S}(b,2)_{k_{0p}}=-1$ (здесь в произведении мы берем один из дивизоров, лежащих над p в поле k_0), ибо в противном случае существовал бы элемент $d\in k$ такой, что $(bd,2)_{k_{0p}}=1$ для всех $p\in S$ и являющийся нормой в k_0/k, т.е. bd – норма в k_2/k_0, следовательно, ad^2 – норма в k_2/k_0 и a – норма в k_2/k (d^2 – норма в k_2/k, так как d является нормой в k_0/k).

Обратно, пусть квадратичное расширение $k(\sqrt{a})/k$ выбрано так, что для рассматриваемой задачи погружения выполнено условие согласности, и кроме того, выполнено дополнительное условие погружения. Выполнение условия согласности равносильно разрешимости всех сопутствующих брауэровских задач. Поскольку ядро рассматриваемой задачи погружения является циклической группой порядка 8, то достаточно рассмотреть три брауэровские задачи, а именно, задачи соответствующие характерам χ_1, χ_2, χ_3 ядра, определенным на образующем элементе α ядра следующим образом: $\chi_1(\alpha) = -1$, $\chi_2(\alpha) = i$ и $\chi_3(\alpha) = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$. Разрешимость брауэровских задач погружения, соответствующих характерам χ_1, χ_2 и χ_3, равносильна распадению алгебр кватернионов $[a, -1]$ над полем k, $[a, 2]$ над полем k_0 и $\left[a, \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right]$ над полем k_2, соответственно.

Таким образом, выполнение условия согласности влечет распадение алгебры $[a, -1]$ над полем k, что означает, что a является нормой в расширении k_0/k, т.е. существует $b \in k_0$ и $Nb = a$. Рассмотрим элемент ab^{-2}. Если a – норма в k_2/k и $\prod\limits_{p \in S} \theta_p(a) = 1$, то выберем b так, чтобы оно было нормой в k_2/k_0, тогда b^{-2} является нормой в k_1/k_0 и остается выбрать $t \in k^*$ так, чтобы at^2 было бы нормой в k_1/k_0. Если $\overline{p}$ – простой дивизор поля k_0 и группа разложения делителя $\overline{p}$ в расширении k_1/k_0 есть $\{\sigma^2\}$, то at^2 – локальная норма при любом выборе t, так как выполнено условие согласности (алгебра кватернионов $\left[a, \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right]$ распадается над полем k_2). Если p лежит над дивизором из S, то выбор t возможен в силу условия $\prod\limits_{p \in S} \theta_p(a) = 1$.

Пусть a не является нормой в расширении k_2/k, тогда b может не быть локальной нормой в расширении k_2/k_0 только в точках, лежащих над $p \in S$, причем число пар делителей $p \in S$, в которых символ Гильберта $(b, 2)$ равен -1, нечетно, ибо в противном случае можно выбрать $u_0 \in k^*$ так, чтобы оно было нормой в k_0/k и символы $(bu_0, 2)$ стали бы равными 1. Таким образом, если a не является нормой в расширении k_2/k, то $\prod\limits_{p \in S} \theta_p(b^{-2}) = \sigma^2$. По условию, $\prod\limits_{p \in S} \theta_p(a) = \sigma^2$, следовательно, $\prod\limits_{p \in S} \theta_p(ab^{-2}) = 1$, и существует такой элемент $u_0 \in k^*$, что u_0 является нормой в расширении k_0/k и $ab^{-2}u_0^2$ является нормой в расширении k_1/k_0, т.е. по теореме 1 рассматриваемая задача погружения разрешима. Теорема доказана.

Замечание. Множество S состоит из бесконечного числа дивизоров. Однако, почти все символы в произведении $\prod\limits_{p\in S}\theta_p(a)$ равны 1. Достаточно рассматривать только те дивизоры p, которые делят главный дивизор (a) и являются делителями дивизора 2.

§2. Пример неразрешимой задачи погружения

В настоящем параграфе мы построим пример задачи погружения, для которой выполнено условие согласности, но тем не менее, она неразрешима. Заметим, что впервые подобный пример был построен в [2].

Пусть $k = Q(\sqrt{47})$ – квадратичное расширение поля рациональных чисел Q. Поля k_0, k_1, k_2 имеют тот же смысл, что в предыдущем параграфе. Положим $a = 8+\sqrt{47}$ и $K = k(\sqrt{a})$. Возникает задача погружения квадратического расширения K/k в циклическое расширение степени 16. Покажем, что для рассматриваемой задачи погружения выполнено условие согласности, которое эквивалентно разрешимости сопутствующих локальных задач погружения. Заметим, что k/Q – разветвленное в точке 2 расширение и можно считать, что главный дивизор (a) – простой делитель дивизора 17 из Q. Кроме того, $a > 0$, следовательно, достаточно проверить локальные условия погружения в двух точках p_1 и p_2 поля k, соответствующих делителям 17 и 2, соответственно. Так как локальное поле Q_{17}, и следовательно, k_{p_1} содержит первообразный корень из 1 степени 16, то соответствующая локальная задача погружения разрешима. Остается рассмотреть локальную задачу погружения, соответствующую точке p_2.

Заметим, что k_{p_2}/Q_2 – вполне разветвленное квадратичное расширение. Пусть π – простой элемент поля k_{p_2}. Тогда $a = 8+\sqrt{47} \equiv \sqrt{-1}\alpha^2 (\operatorname{mod} \pi^6)$, где α – единица поля Q_2 (-47 является четвертой степенью в Q_2). По лемме Хензеля, $a(\sqrt{-1})^{-1}$ является квадратом в поле k_{p_2}, следовательно, $a = \sqrt{-1}\,\varepsilon_1^2$, где ε_1 – единица поля k_{p_2}. Таким образом, условие разрешимости локальной задачи погружения в точке p_2 состоит в распадении алгебр $[\sqrt{-1}, -1]$ над полем k_{p_2}, $[\sqrt{-1}, 2]$ над полем k_{p_2} и $\left[\sqrt{-1}, \dfrac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right]$ над полем $k_{p_2}(\sqrt{2})$. Ясно, что все три алгебры распадаются. Таким образом, условие согласности для рассматриваемой задачи выполнено.

Порядок группы $H^3(F_2, k_2^*)$ равен 2, где F_2 – группа Галуа расширения k_2/k, так как каждый простой дивизор поля k имеет, по крайней мере, два простых делителя в поле k_2.

Покажем, что a не является нормой в расширении k_2/k. Положим $L = k\big(\sqrt{-1}, \sqrt[4]{2}\big)$. Группа Галуа H расширения L/k – группа диэдра с образующими γ и σ, причем $\sqrt{-1}^{\,\gamma-1} = -1$, $\sqrt{-1}^{\,\sigma-1} = 1$, $\sqrt[4]{2}^{\,\gamma-1} = 1$, $\sqrt[4]{2}^{\,\sigma-1} = \sqrt{-1}$. Расширение L/k имеет ветвление только в точке p_2. Так как a является локальной единицей во всех пополнениях поля k, кроме k_{p_1}, то a является локальной нормой в расширении L/k во всех точках, исключая разве лишь точки p_1 и p_2.

Ясно, что 2 и -1 являются квадратами в поле k_{p_1}, так как разрешимы сравнения $x^2 \equiv 2(\operatorname{mod} 17)$ и $x^2 \equiv -1(\operatorname{mod} 17)$, причем решением первого сравнения является 6. Так как сравнение $x^2 \equiv 6(\operatorname{mod} 17)$ неразрешимо, то группой разложения дивизора $\overline{p}_1 \in L$, лежащего над p_1, является циклическая группа второго порядка. Заметим, что расширение $L_{\overline{p}_1}/k_{p_1}$ является неразветвленным, следовательно, a не является нормой в этом расширении.

Убедимся, что a является нормой в расширении $L_{\overline{p}_2}/k_{p_2}$, где $\overline{p}_2$ – дивизор поля L, лежащий над p_2. Заметим, что это циклическое расширение четвертой степени, т.к. -1 является квадратом в поле k_{p_2} $(-1 \equiv 47(\operatorname{mod} 8))$. При этом $a = \sqrt{-1}\varepsilon_1^2$, где ε_1 – единица поля k_{p_2}. Заметим, что $N_{k_{p_2}/Q_2} a = 17$, следовательно, $N_{k_{p_2}/Q_2} \varepsilon_1^2$ – четвертая степень в Q_2, т.е. $N_{k_{p_2}/Q_2} \varepsilon_1$ является квадратом в Q_2, или $\varepsilon_1 = \alpha_1 \varepsilon_2^2$, где α_1 – единица поля Q_2, а ε_2 – единица поля k_{p_2}. Таким образом, $a = \sqrt{-1}\alpha_1^2\varepsilon_2^4$. Заметим, что символ Гильберта $(\alpha_1, 2)$ в поле k_{p_2} равен 1, т.е. α_1 – норма в расширении $k_{p_2}(\sqrt{2})/k_{p_2}$, следовательно, $\alpha_1^2\varepsilon_2^4$ является нормой в расширении $k_{p_2}(\sqrt[4]{2})/k_{p_2}$.

Остается показать, что $\sqrt{-1}$ является нормой в расширении $k_{p_2}(\sqrt[4]{2})/k_{p_2}$. Положим $L_1 = Q(\sqrt{-1})$ и $L_2 = Q(\sqrt{-1}, \sqrt{2})$. Тогда $\sqrt{-1} = N_{L_2/L_1} \dfrac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$. Рассмотрим алгебру кватернионов $\Big(\dfrac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\Big)$ над полем L_2. Так как в поле L_2 над 2 лежит единственный простой дивизор p'_2, а инварианты этой алгебры равны 0 во всех остальных точках поля L_2, то инвариант этой алгебры равен 0 и в точке p'_2, т.е. $\dfrac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$ является нормой в расширении $L_2(\sqrt[4]{2})/L_2$ и $\sqrt{-1}$ – норма в расширении $k_{p_2}(\sqrt[4]{2})/k_{p_2}$. Таким образом, мы показали, что a является локальной нормой в расширении $k(\sqrt{-1}, \sqrt[4]{2})/k$ во всех точках, исключая p_1.

Убедимся, что a не является нормой в расширении k_2/k. Заметим, что a является нормой в k_0/k некоторого элемента $b \in k_0$. С другой стороны, a как главный идель поля k является нормой иделя $\overline{b}$ поля k_0, имеющего следующий вид: простой элемент в точке $\overline{p}_1$, лежащей над p_1, и локальные единицы, являющиеся нормами в пополнениях поля k_2 относительно пополнений поля k_0 в остальных точках. Так как $N_{k_0/k}\overline{b}b^{-1} = 1$, то существует идель w поля k_0 со свойством $\overline{b}b^{-1} = w^{\gamma-1}$, причем в качестве w можно взять простой элемент некоторой точки поля k_0. Таким образом, $b = \overline{b}w^{1-\gamma}$. Пусть H_0 – группа Галуа расширения $k_0(\sqrt[4]{2})/k_0$, h – образующий элемент этой группы и θ_0 – гомоморфизм Артина $J_{k_0} \to H_0$. Тогда $\theta_0(b) = 1$, $\theta_0(\overline{b}) = h^2$, следовательно, $\theta_0(w^{1-\gamma}) = h^2$, т.е. либо $\theta_0(w) = h$, либо $\theta_0(w) = h^3$. Таким образом, b не является нормой в расширении $k_0(\sqrt{2})/k_0$. Заметим, что существует некоторый произвол в выборе элемента b, а именно, b можно заменить на $bc^{1-\gamma}$, где $c \in k_0$. Если идель c имеет вид $c = ww_1$, то $\theta_0(w_1)$ равно h или h^3, и так как $H^3(F, k_2^*) \neq 0$, то $bc^{1-\gamma}$ также не является нормой в расширении k_2/k_0. Таким образом, a не является нормой в k_2/k.

Покажем теперь, что дополнительное условие теоремы 2 не выполняется. Пусть S – множество простых дивизоров поля k, чьи делители в поле k_1 имеют группу разложения F_0. Положим $k_3 = k(\sqrt{2+\sqrt{2}})$ и покажем, что a является локальной нормой в расширении k_{3p}/k_p для всех $p \in S$. Заметим, что $p_2 \in S$ и во всех точках $p \in S$, кроме p_2, k_{3p}/k_p – неразветвленное расширение и a – локальная единица, следовательно, если $p \neq p_2$, то a – норма в k_{3p}/k_p. Если $p = p_2$, то достаточно показать, что $17 = N_{k/Q}a$ является нормой в расширении $Q_2(\sqrt{2+\sqrt{2}})/Q_2$, что верно, так как 17 – четвертая степень в Q_2. Значит, $\prod\limits_{p\in S}\theta_p(a) = 1 \neq \sigma^2$. Таким образом, по теореме 2 рассматриваемая задача погружения неразрешима.

Авторы благодарны профессору А. В. Яковлеву за внимание к работе и полезные обсуждения.

Литература

1. H. Hasse, *Existenz und Mannigfaltigkeit abelscher Algebren mit vorgegebener Gruppe über einem Teilkörper des Grundkörpers.* I, II, III. — Math. Nachrichten **Bd 1** (1948), 40–61, 213–217, 277–283.
2. Д. К. Фаддеев, *Об одной гипотезе Хассе.* — ДАН СССР **94,** No. 6 (1954), 1013–1016.
3. И. Р. Шафаревич, *О задаче погружения полей.* — ДАН СССР **95** (1954), 459–461.
4. А. В. Яковлев, *Погружение циклического расширения в циклическое.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **275** (1999), 447–448.
5. А. В. Яковлев, *Еще о погружении циклических расширений в циклические.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **319** (2004), 293–299.
6. В. В. Ишханов, Б. Б. Лурье, *Об одной задаче погружения с циклическим ядром.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **305** (2003), 144–152.
7. С. П. Демушкин, И. Р. Шафаревич, *Второе препятствие для задачи погружения полей алгебраических чисел.* — Изв. АН СССР, Сер. мат. **26,** No. 6 (1962), 911–921.

Ishkhanov V. V., Lur'e B. B. The Hasse conjecture for cyclic extensions.

In the present paper, embedding conditions for a quadratic extension of an algebraic number field into a cyclic 2-extension are presented. An example of an unsolvable embedding problem for which the compatibility condition is fulfilled is constructed.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 10 декабря 2004