А. В. Жучин, Локальные нётеровы скрещенные групповые кольца,
Матем. заметки, 1980, том 28, выпуск 5, 655–664

https://www.mathnet.ru/mzm6396

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 28, № 5 (1980)

ЛОКАЛЬНЫЕ НЁТЕРОВЫ СКРЕЩЕННЫЕ ГРУППОВЫЕ КОЛЬЦА

А. В. Жучин

§ 1. Основные определения. Пусть R — ассоциативное кольцо с единицей, G — группа. Предположим, что задано отображение γ: $G \times G \to R^*$, где $R^* = \{r \in \in R \mid rs = sr = 1$ для некоторого элемента $s \in R\}$ — группа единиц кольца R. Скрещенное групповое кольцо $R_\gamma G$ — это свободный R-модуль с базисом $\{\bar{g} \mid g \in G\}$, на котором определено умножение по формуле $r\bar{g} \times s\bar{h} = = rs\gamma(g, h)\,\overline{gh}$. Для того чтобы кольцо $R_\gamma G$ было ассоциативным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

а) $\gamma(f, g)\,\gamma(fg, h) = \gamma(g, h)\,\gamma(f, gh)$ для любых элементов f, g, h группы G;

б) $\gamma(g, h) \in C(R)$ — центру кольца R для любых элементов g, h группы G.

С отображением γ можно связать некоторое центральное расширение группы $U(R) = R^* \cap C(R)$ с помощью группы G с системой факторов γ. Если системы факторов γ и δ эквивалентны, то кольца $R_\gamma G$ и $R_\delta G$ изоморфны. Будем говорить в дальнейшем, что кольцо $R_\gamma G$ расщепляется, если расщепляется расширение $0 \to U(R) \to \overline{G} \to G \to 1$ с системой факторов γ; в этом случае кольцо $R_\gamma G$ изоморфно групповому кольцу RG. Заметим, что множество центральных расширений группы $U(R)$ с помощью группы G описывается группой $H^2(G, U(R))$, где $U(R)$ — тривиальный G-модуль. Кольцо R называется локальным, если $R/r(R)$ — тело, где $r(R)$ — радикал Джекобсона кольца R.

§ 2. **Поля расщепления.** В этом параграфе будет доказано, что кольцо $F_\gamma G$ является локальным, если $\mathrm{char}\ F = p > 0$, F — поле, G — локально конечная p-группа. Для конечных групп этот результат был доказан Вильямсон [1] с помощью поля расщепления.

Определение. Расширение K поля F называется полем расщепления кольца $F_\gamma G$, если кольцо $K_\gamma G = K \otimes_F F_\gamma G$ расщепляется.

ТЕОРЕМА 2.1. *Пусть F — поле, $\mathrm{char}\ F = p > 0$, G — локально конечная p-группа. Существует поле расщепления K кольца $F_\gamma G$, являющееся чисто несепарабельным расширением поля F.*

Доказательство. Для каждого элемента $g \in G$ рассмотрим множество конечных подгрупп M_g группы G: $M_g = \{H \subseteq G \mid g \in H, \ |H| < \infty\}$. Положим $\alpha_{H,g} = \prod_{h \in H} \gamma(g, h)$. Легко проверить, что

$$\gamma(g, h)^{p^n} \alpha_{H,gh} = \alpha_{H,g}\alpha_{H,h}, \text{ где } |H| = p^n,\ g, h \in H.$$

Рассмотрим теперь поле K, являющееся полем разложения системы многочленов $\{X^{p^n} - \alpha_{H,g} \mid g \in H,\ |H| = p^n\}$. Очевидно, K — чисто несепарабельное расширение поля F. Покажем, что поле K искомое. Для каждого элемента $g \in G$ существует элемент $\beta_g \in K$ такой, что $(e - \beta_g \bar{g})^{p^n} = 0$, где p^n— порядок элемента g. Действительно,

$$(e - \beta_g \bar{g})^{p^n} = [\gamma(1,1)^{-1}\bar{1}]^{p^n} - \beta_g^{p^n} \gamma(g, g) \ldots \bar{1} = \gamma(1,1)^{-1}\bar{1} - \beta_g^{p^n} \prod_{i=1}^{p^n-1} \gamma(g, g^i)\, \bar{1};$$

ясно, что если β_g^{-1} удовлетворяет уравнению $X^{p^n} - \alpha_{\langle g \rangle, g} = 0$, то равенство $(e - \beta_g \bar{g})^{p^n} = 0$ выполняется. Пусть I — правый идеал кольца $K_\gamma G$, порожденный множеством $\{e - \beta_g \bar{g} \mid g \in G\}$. Докажем, что I — нильидеал кольца $K_\gamma G$. Пусть $a = \sum_{i=1}^{m} (e - \beta_{g_i} \bar{g}_i) r_i$ — элемент идеала I, и H — подгруппа, порожденная элементами g_i и элементами из носителей элементов r_i. Кольцо $K_\gamma H$ расщепляется, так как все корни многочленов $X^{p^k} - \alpha_{H,g}$ принадлежат полю K, следовательно, существует изоморфизм Δ: $K_\gamma H \to KH$. Кольцо KH локальное, причем $r(KH) = \omega H$ — фундаментальный идеал кольца KH, следовательно,

$$\Delta(a) = \sum_{i=1}^{m} \Delta(e - \beta_{g_i}\bar{g}_i)\,\Delta(r_i) \in \omega H,$$

так как $\Delta(e - \beta_{g_i}\bar{g}_i) \in \omega H$, откуда следует, что a — нильпотентный элемент. Итак, $I \neq K_\gamma G$. Теперь имеем $(e - \beta_g\bar{g})\,\beta_h\bar{h} = \beta_h\bar{h} - \beta_g\beta_h\gamma(g, h)\,\overline{gh}$ — элемент из идеала I, следовательно, элемент $e - \beta_g\beta_h\gamma(g, h)\,\overline{gh}$ также принадлежит идеалу I, поэтому $\beta_g\beta_h\gamma(g, h) = \beta_{gh}$, т. е. система факторов γ расщепляется.

Замечание. Из доказательства теоремы 2.1 следует, что поле, порожденное над F множеством $\{\beta_g \mid g \in G\}$, будет полем расщепления кольца $F_\gamma G$.

Следствие 2.1. *Пусть F — поле,* $\mathrm{char}\,F = p > 0$, *G — локально конечная p-группа, тогда кольцо $F_\gamma G$ является локальным кольцом.*

Доказательство. Пусть K — поле расщепления кольца $F_\gamma G$. Рассмотрим гомоморфизм

$$\varphi\colon\ F_\gamma G \to K_\gamma G/r\,(K_\gamma G).$$

Так как $r\,(F_\gamma G)$ — нильидеал и $r\,(K_\gamma G) \cap F_\gamma G \subseteq r\,(F_\gamma G)$, то

$$\mathrm{Ker}\,\varphi = r\,(K_\gamma G) \cap F_\gamma G = r\,(F_\gamma G).$$

Аналогично, если H — конечная подгруппа в G, то $r\,(F_\gamma H) = r\,(F_\gamma G) \cap F_\gamma H$, следовательно, $F_\gamma G/r\,(F_\gamma G)$ — поле, так как $F_\gamma H\,/r\,(F_\gamma H)$ — поле согласно [1].

Замечание. Очевидно, поле $F_\gamma G/r\,(F_\gamma G)$ является чисто несепарабельным расширением поля F.

Следствие 2.2. *Пусть F — поле,* $\mathrm{char}\,F = p > 0$, *G — локально конечная p-группа, тогда поле $F_\gamma G/r(F_\gamma G)$ является наименьшим полем расщепления кольца $F_\gamma G$.*

Доказательство. Так как $(\bar{g})^{p^n} = \alpha_{\langle g\rangle, g}$, то поле $F_\gamma G/r\,(F_\gamma G)$ содержит все элементы β_g, поэтому оно является полем расщепления кольца $F_\gamma G$ в силу замечания к теореме 2.1. Согласно доказательству следствия 2.1 поле $F_\gamma G/r\,(F_\gamma G)$ вкладывается над F в любое поле расщепления кольца $F_\gamma G$.

§ 3. **Коммутативные кольца.** Коммутативность кольца $R_\gamma G$ означает, то R — коммутативное кольцо, G — абелева группа и система факторов γ симметрична, т. е. $\gamma(g, h) = \gamma(h, g)$ для любых элементов $g, h \in G$. В этом случае множество центральных расширений группы $U\,(R) = R^*$ с помощью группы G описывается группой $\mathrm{Ext}_Z\,(G, R^*)$.

Изоморфизм

$$\Delta\colon \operatorname{Ext}_Z(G_1 \times G_2,\ R^*) \cong \operatorname{Ext}_Z(G_1,\ R^*) \times \operatorname{Ext}_Z(G_2,\ R^*)$$

допускает следующее описание:

$$\Delta\ (\operatorname{cls}\gamma) = \operatorname{cls}\gamma_1 \times \operatorname{cls}\gamma_2,$$

где γ_1 и γ_2 — ограничения системы факторов γ на $G_1 \times G_1$, $G_2 \times G_2$; $\Delta^{-1}(\operatorname{cls}\gamma_1) \times (\operatorname{cls}\gamma_2) = \operatorname{cls}\gamma$, где

$$\gamma\,(g_1 \times g_2,\ h_1 \times h_2) = \gamma_1\,(g_1,\ h_1)\ \gamma_2\,(g_2,\ h_2)$$

для любых элементов $g_1, h_1 \in G_1$ и $g_2, h_2 \in G_2$.

Предложение 3.1. *Пусть $R_\gamma G$ — коммутативное кольцо, $G = G_1 \times G_2$, тогда*

$$R_\gamma G \cong (R_{\gamma_1}G_1)_{\gamma_2}\, G_2 \cong (R_{\gamma_2}G_2)_{\gamma_1}\, G_1 \cong R_{\gamma_1}G_1 \otimes_R R_{\gamma_2}G_2.$$

Доказательство. Рассмотрим кольцо $R_\delta G$, где

$$\delta\,(g_1 \times g_2,\ h_1 \times h_2) = \\ = \gamma_1\,(g_1,\ h_1)\ \gamma_2\,(g_2,\ h_2),\ g_1, h_1 \in G_1,\ g_2, h_2 \in G_2.$$

Очевидно, отображение

$$\varphi\colon R_{\gamma_1}G_1 \otimes_R R_{\gamma_2}\, G_2 \to R_\delta G$$

такое, что $\varphi\,(\bar g_1 \otimes \bar g_2) = \overline{g_1 \times g_2}$, является R-линейным изоморфизмом R-алгебр. Из замечания следует, что системы факторов γ и δ эквивалентны, следовательно, $R_\gamma G \cong R_\delta G$. Последние два изоморфизма строятся непосредственно.

Предложение 3.2. *Пусть $R_\gamma G$ — локальное кольцо, тогда для любой подгруппы H группы G кольцо $R_\gamma H$ также локальное, и G — периодическая группа.*

Доказательство. Хорошо известно (см. [2]), что для любой подгруппы H группы G имеет место включение $r\,(R_\gamma G) \cap R_\gamma H \subseteq r\,(R_\gamma H)$, кроме того, если элемент $x \in R_\gamma H$ и обратим в кольце $R_\gamma G$, то он обратим и в кольце $R_\gamma H$. Пусть теперь элемент $x \in R_\gamma H$, $x \notin r\,(R_\gamma H)$, тогда элемент $x \notin r\,(R_\gamma G)$ в силу включения $r\,(R_\gamma G) \cap R_\gamma H \subseteq r\,(R_\gamma H)$, следовательно, элемент x обратим в кольце $R_\gamma G$ и в кольце $R_\gamma H$. Если элемент $g \in G$ имеет бесконечный порядок, то $R_\gamma \langle g\rangle \cong R\,\langle g\rangle$, так как группа $\langle g\rangle$ свободная, и расширение $0 \to U\,(R) \to \langle \bar g\rangle \to \langle g\rangle \to 1$ расщепляется. Так как кольцо $R\,\langle g\rangle$ локальное, то группа $\langle g\rangle$ должна быть p-группой (см. [3]), следовательно, получаем противоречие.

Отметим, что группа G не обязана быть p-группой, если кольцо $R_\gamma G$ локальное.

Предложение 3.3. *Пусть G — абелева группа, тогда $R_\gamma G$ — локальное кольцо тогда и только тогда, когда G — периодическая группа, и $(R/r(R))_\gamma H$ — локальное кольцо для любой конечной подгруппы H группы G.*

Доказательство. Пусть $R_\gamma G$ — локальное кольцо. Согласно предложению 3.2 в этом случае $R_\gamma H$ — локальное кольцо для любой подгруппы H группы G и G — периодическая группа. Рассмотрим эпиморфизм

$$\psi\colon\ R_\gamma H \to (R/r(R))_\gamma H,$$

где $\psi(r\bar{h}) = \bar{r}\bar{h}$, $\bar{r} \in R/r(R)$. Так как группа H — локально конечная, то $r(R)_\gamma H \subseteq r(R_\gamma H)$ (см. [4]), поэтому локальность кольца $R_\gamma H$ эквивалентна локальности кольца $(R/r(R))_\gamma\, H$. Обратно, пусть G — периодическая группа и $(R/r(R))_\gamma\, H$ — локальное кольцо для любой конечной подгруппы H группы G. Согласно замечанию кольцо $R_\gamma H$ также будет локальным. Пусть элемент $a \notin r(R_\gamma G)$, тогда $a \notin r(R_\gamma H)$, где H — конечная подгруппа, порожденная элементами из носителя элемента a, так как $r(R_\gamma H) \subseteq r(R_\gamma G)$ (см. [4]), следовательно, элемент a обратим.

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть $R_\gamma G$ — коммутативное кольцо. Тогда кольцо $R_\gamma G$ локальное тогда и только тогда, когда G — периодическая группа, $(R/r(R))_\gamma H$ — поле для любой конечной подгруппы $H \subseteq G$ такой, что* $\operatorname{char} R/r\ (R) \nmid |\,H\,|$.

Доказательство. Очевидно, $R/r(R)$ — поле, если кольцо $R_\gamma G$ локальное, следовательно, кольцо $(R/r(R))_\gamma H$ полупросто, так как $|H| < \infty$ и $\operatorname{char} R/r(R) \nmid |\,H\,|$, поэтому в силу предложения 3.2, кольцо $(R/r(R))_\gamma H$ является полем. Обратно, пусть H — конечная подгруппа группы G, $\operatorname{char}\ R/r(R) = p$. Докажем, что $(R/r(R))_\gamma H$ — локальное кольцо. Очевидно, $H = H_0 \times H_p$, где H_p — наибольшая p-подгруппа группы H и $p \nmid |H_0|$. В силу предложения 3.1 имеем $(R/r(R))_\gamma H \cong ((R/r(R))_{\gamma_0} H_0)_{\gamma_p} H_p$. Так как $(R/r(R))_{\gamma_0} H_0$ — поле характеристики p, то кольцо $(R/r(R))_\gamma H$ является локальным в силу результата работы [1].

Пусть G — конечная абелева группа и $G = G_1 \times G_2 \times \times \ldots \times G_k$ — разложение G в произведение циклических подгрупп, $n_i = | G_i |$, $G_i = \langle g_i \rangle$.

Предложение 3.4. *Пусть F — поле,* $\mathrm{char}\, F \nmid |G|$, *тогда $F_\gamma G$ — поле тогда и только тогда, когда многочлен $X^{n_i} - \alpha_{\langle g_i \rangle, g_i}$ неприводим в кольце $F[X]$ для любых $i = 1, 2, \ldots, k$ и неприводим в кольце $F_i[X]$, где F_i — композит полей $F[X] / X^{n_l} - \alpha_{\langle g_l \rangle, g_l}$ для всех $l \neq i$.*

Доказательство. Согласно теореме 3.1 $F_\gamma H$ — поле для любой подгруппы $H \subseteq G$, следовательно, многочлен $X^{n_i} - \alpha_{\langle g_i \rangle, g_i}$ неприводим в кольце $F[X]$, так как

$$F_\gamma G_i \cong F[X]/X^{n_i} - \alpha_{\langle g_i \rangle, g_i}.$$

Зафиксируем индекс i. Пусть $\varphi_l \colon F_\gamma G_l \to \bar{F}$ — произвольные вложения поля $F_\gamma G_l$ над F в $\bar{F}$ $(l \neq i)$, тогда, очевидно, композит полей $\varphi_l (F_\gamma G_l)$ по всем $l \neq i$ в $\bar{F}$ будет изоморфен полю

$$F_\gamma (G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_{i-1} \times G_{i+1} \ldots \times G_k) \cong$$
$$\cong F_\gamma G_1 \otimes_F F_\gamma G_2 \otimes_F \ldots F_\gamma G_{i-1} \otimes_F F_\gamma G_{i+1} \ldots \otimes_F F_\gamma G_k = F_i.$$

Так как $F_\gamma G \cong F_i \otimes_F F_\gamma G_i$, то многочлен $X^{n_i} - \alpha_{\langle g_i \rangle, g_i}$ неприводим в кольце $F_i[X]$.

Обратно, если известно, что F_i — поле, то F_i — композит полей $F[X]/X^{n_l} - \alpha_{\langle g_l \rangle, g_l}$ $(l \neq i)$, поэтому кольцо $F_\gamma G \cong F_i \otimes_F F_\gamma G_i$ также является полем. Для F_i далее проводится аналогичное доказательство.

§ 4. Нётеровы кольца.

ЛЕММА 4.1. *Пусть $I \subseteq R$ — нильпотентный идеал кольца R, I_R — конечно порожденный R-модуль. Если кольцо R/I — нётерово справа, то кольцо R также нётерово справа.*

Доказательство. Идеалы I^n конечно порождены, как правые R-модули. Докажем индукцией по n, что R/I^n — нётеров правый R-модуль. По условию R/I — нётеров правый R-модуль. Пусть R/I^n — нётеров R-модуль, тогда

$$(R/I^{n+1})/(I^n/I^{n+1}) \cong R/I^n,$$

причем I^n/I^{n+1} — конечно порожденный модуль над нётеровым справа кольцом R/I, следовательно, I^n/I^{n+1} и R/I^{n+1} — нётеровы R-модули.

Замечание. Очевидно, лемма остается справедливой, если слово «нётерово» заменить на «артиново».

ТЕОРЕМА 4.1. *Пусть F — поле, $\mathrm{char}\, F = p > 0$, G — локально конечная p-группа. Следующие условия эквивалентны:*

1) *$F_\gamma G$ — нётерово справа кольцо;*
2) *$F_\gamma G$ — артиново справа кольцо;*
3) *$r(F_\gamma G)$ — нильпотентный идеал;*
4) *$r(F_\gamma G) = r(F_\gamma H)\cdot F_\gamma G$, где H — конечная подгруппа группы G, $H \supseteq [G, G]$.*

Доказательство. Согласно следствию 2.1 $F_\gamma G$ — локальное кольцо, поэтому из 1) следует 2) в силу леммы 4.1. Очевидно, из 2) следует 3). Пусть выполнено условие 3). Существует элемент $\alpha \neq 0$ такой, что $\alpha r(F_\gamma G) = 0$. Пусть H_1 — конечная подгруппа, порожденная элементами из носителя элемента α. Если $x = \sum r_i \bar{h}_i$, где $r_i \in F_\gamma H_1$, а h_i — представители правых смежных классов G по H_1, то $\alpha x = \sum \alpha r_i \bar{h}_i = 0$, откуда следует, что $\alpha r_i = 0$ для всех r_i. Так как $F_\gamma H_1$ — локальное кольцо, то $r_i \in r(F_\gamma H_1)$. Таким образом,

$$r(F_\gamma G) \subseteq r(F_\gamma H_1) F_\gamma G.$$

Обратное включение следует из доказательства следствия 2.1. Итак,

$$r(F_\gamma G) = r(F_\gamma H_1)\ F_\gamma G.$$

Покажем, что $|[G, G]| < \infty$. Так как кольцо $F_\gamma G/r(F_\gamma G)$ является полем, то $\bar{g}\bar{h} - \bar{h}\bar{g} \in r(F_\gamma G)$ для любых элементов $g, h \in G$. Отсюда следует, что для любого элемента $g \in [G, G]$ найдется такой элемент $\alpha \in F$, что $e - \alpha\bar{g} \in r(F_\gamma G)$, т. е.

$$\mathrm{codim}_F\, r(F_\gamma [G, G]) = 1$$

в кольце $F_\gamma [G, G]$. Легко видеть, что в этом случае кольцо $F_\gamma [G, G]$ расщепляется, поэтому $|[G, G]| < \infty$ в силу нильпотентности $r(F_\gamma [G, G])$. Теперь ясно, что $H = \langle H_1, [G, G]\rangle$ удовлетворяет условию 4). Наконец, условие 1) следует из условия 4) в силу леммы 4.1.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть R —*коммутативное локальное кольцо*, $\mathrm{char}\, R/r\,(R) = p > 0$, G — *локально конечная p-группа. Кольцо $R_\gamma G$ артиново тогда и только тогда, когда R — артиново кольцо и*

$$r\,(R_\gamma G) = r\,(R_\gamma H) R_\gamma G$$

для некоторой конечной подгруппы H группы G.

Доказательство. Кольцо $R_\gamma G$ будет локальным, так как $(R/r\,(R))_\gamma G$ — локальное кольцо и $r\,(R)_\gamma G \subseteq \subseteq r\,(R_\gamma G)$. Достаточность условий теоремы следует теперь из леммы 4.1 и нильпотентности $r\,(R)$. Если кольцо $R_\gamma G$ артиново, то кольцо $(R/r\,(R))_\gamma G$ также артиново, и необходимость условий теоремы следует из теоремы 4.1.

Рассмотрим некоторые примеры. Пусть $G = Z_{p^\infty} = (g_n \parallel g_{n+1}^p = g_n,\ g_1^p = 1,\ n = 1,\ 2 \ldots)$ — квазициклическая группа типа p^∞, F — поле характеристики p.

Предложение 4.1. *Кольцо $F_\gamma Z_{p^\infty}$ нётерово тогда и только тогда, когда оно не расщепляется.*

Доказательство. Существует такое число k, что кольцо $F_\gamma Z_{p^n}$ не расщепляется для всех $n > k$. Действительно, если кольцо $F_\gamma Z_{p^n}$ расщепляется для всех n, то поле F содержит все элементы β_g, $g \in Z_{p^\infty}$, следовательно, оно будет полем расщепления кольца $F_\gamma Z_{p^\infty}$ согласно замечанию к теореме 2.1. Выберем наибольшее число k такое, что кольцо $F_\gamma Z_{p^k}$ расщепляется. Покажем, что

$$r\,(F_\gamma Z_{p^\infty}) = r\,(F_\gamma Z_{p^k})\ F_\gamma Z_{p^\infty}.$$

Отсюда будет следовать нётеровость кольца $F_\gamma Z_{p^\infty}$ в силу теоремы 4.1. Достаточно показать, что

$$r\,(F_\gamma Z_{p^n}) = r\,(F_\gamma Z_{p^k})\, F_\gamma Z_{p^n}$$

для всех $n > k$. Можно считать, что система факторов γ задана следующим образом на $Z_{p^n} \times Z_{p^n}$: $\gamma\,(g_n^s,\ g_n^t) = 1$, если $s + t < p^n$, и $\gamma\,(g_n^s,\ g_n^t) = \alpha$, если $s + t \geqslant p^n$. Имеем изоморфизм колец $F_\gamma Z_{p^n}$ и $(F_\gamma Z_{p^k})_{\gamma_1} Z_{p^n}/Z_{p^k}$, где γ_1 определяется так: $\gamma_1\,(g^s,\ g^t) = 1$, если $s + t < p^{n-k}$, и $\gamma_1\,(g^s,\ g^t) = \bar{g}_k$, если $s + t \geqslant p^{n-k}$. Рассмотрим гомоморфизм σ:

$$(F_\gamma Z_{p^k})_{\gamma_1} Z_{p^n}/Z_{p^k} \to (F_\gamma Z_{p^k}/r\,(F_\gamma Z_{p^k}))_{\bar{\gamma}_1} Z_{p^n}/Z_{p^k},$$

где $\bar{\gamma}_1$ есть образ γ_1 в кольце $F_\gamma Z_{p^k}/r\,(F_\gamma Z_{p^k})$. Так как кольцо $F_\gamma Z_{p^k}$ расщепляется, то существует элемент $\beta \in F$ такой, что $\beta^{p^k} = \alpha$ и $F_\gamma Z_{p^k}/r(F_\gamma Z_{p^k}) \cong F$, поэтому $\beta - \bar{g}_k \in r(F_\gamma Z_{p^k})$, следовательно, образ гомоморфизма σ равен $F_{\bar{\gamma}_1} Z_{p^n}/Z_{p^k}$, где $\bar{\gamma}_1(g^s, g^t) = 1$, если $s + t < p^{n-k}$, и $\bar{\gamma}_1(g^s, g^t) = \beta$, если $s + t \geqslant p^{n-k}$. Очевидно, β не является p-й степенью в поле F в силу выбора числа k, поэтому многочлен $X^{p^{n-k}} - \beta$ неприводим в поле $F[X]$ (см. [5]). Итак, образ гомоморфизма σ является полем, следовательно,

$$r(F_\gamma Z_{p^n}) = r(F_\gamma Z_{p^k})\ F_\gamma Z_{p^n}.$$

Следствие 4.1. *Если кольцо $F_\gamma Z_{p^\infty}$ не расщепляется, то все идеалы этого кольца имеют вид $(\beta - \bar{g}_k)^{p^l} F_\gamma Z_{p^\infty}$, где $0 \leqslant l \leqslant k$ и k — наибольшее число такое, что кольцо $F_\gamma Z_{p^k}$ расщепляется.*

Доказательство следует из того, что $r(F_\gamma Z_{p^k}) = (\beta - \bar{g}_k) F_\gamma Z_{p^k}$.

Предложение 4.2. *Кольцо $F_{\gamma_1} Z_{p^\infty} \otimes_F \ldots \otimes_F F_{\gamma_n} Z_{p^\infty}$ нётерово тогда и только тогда, когда для любого $i = 1, 2 \ldots n$ композит полей*

$$F_l = F_{\gamma_l} Z_{p^\infty}/r(F_{\gamma_l} Z_{p^\infty}) \qquad (l \neq i)$$

не является полем расщепления кольца $F_{\gamma_i} Z_{p^\infty}$.

Доказательство. Пусть

$$R_i = F_{\gamma_1} Z_{p^\infty} \otimes_F \ldots \otimes_F F_{\gamma_{i-1}} Z_{p^\infty} \otimes_F F_{\gamma_{i+1}} Z_{p^\infty} \otimes_F \ldots F_{\gamma_n} Z_{p^\infty},$$

тогда кольцо

$$R = F_{\gamma_1} Z_{p^\infty} \otimes_F \ldots \otimes_F F_{\gamma_n} Z_{p^\infty} = (R_i)_{\gamma_i} Z_{p^\infty}.$$

Имеем эпиморфизм колец

$$\sigma\colon (R_i)_{\gamma_i} Z_{p^\infty} \to (R_i/r(R_i))_{\bar{\gamma}_i} Z_{p^\infty}.$$

Легко видеть, что поле $R_i/r(R_i)$ является композитом полей F_l $(l \neq i)$, поэтому из нётеровости кольца R следует, что композит полей F_l $(l \neq i)$ не является полем расщепления кольца $F_{\gamma_i} Z_{p^\infty}$ в силу предложения 4.1.

Обратно, если известно, что R_i — нётерово кольцо, то кольцо $(R_i/r(R_i))_{\bar{\gamma}_i} Z_{p^\infty}$ будет нётеровым в силу предложения 4.1, а ядро эпиморфизма σ будет конечно порожденным нильпотентным идеалом кольца R, следовательно, кольцо R будет нётеровым по лемме 4.1. Для кольца R_i доказательство проводится аналогично.

Московский институт стали
и сплавов

Поступило
27.V.1978

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Williamson S., П-principal hereditary orders, Nagoya Math. J., 32 (1968), 41—65.
[2] Connell I. G., On the group ring, Can. J. Math., 15, № 4 (1963), 650—685.
[3] Woods S. H., Some results on semi-perfect group rings, Can. J. Math., 26, № 1 (1974), 121—129.
[4] Renault G., Sur les anneaux de groupes, C. R. Acad. Sci., 273, № 2 (1971), 84—87.
[5] Ленг С., Алгебра, М., «Мир», 1968.