



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. P. Kiselev, Excitation of modulated waves in inhomogenous media, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1981, Volume 104, 111–122

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.81

January 16, 2025, 09:31:29



ВОЗБУЖДЕНИЕ МОДУЛИРОВАННЫХ КОЛЕБАНИЙ
В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

Статья посвящена асимптотической теории возбуждения модулированных по фазе и амплитуде колебаний неподвижными точечными источниками. С помощью техники пограничного слоя рассматривается скалярное волновое уравнение и две задачи теории упругости. Среды предполагаются стационарными и недиспергирующими. Результатом является построение лучевых разложений. Рассматриваются высшие приближения.

В § I исследуется задача в трехмерном пространстве

$$\Delta_{\vec{x}} u - \frac{1}{c^2(\vec{x})} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u = \delta(\vec{x}) \Phi(t; \rho), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \quad (0.1)$$

$$\rho \rightarrow \infty,$$

$$\Phi(t, \rho) = \mathcal{A}(t) \mathcal{F}(\rho \varphi(t)), \quad (0.2)$$

$\mathcal{A} \neq 0$, $\mathcal{F}, \varphi \neq \text{const}$. Скорость $c(\vec{x}) > 0$ гладкая (бесконечно дифференцируемая), функции \mathcal{A} , φ и \mathcal{F} — тоже $*$, $\mathcal{A}|_{t < 0} \equiv 0$. Единственное решение задачи (0.1) выделяется условием $u|_{t < 0} \equiv 0$.

Классические модулированные колебания (например, [1], [2], [3]) получаются, если выбрать высокочастотное заполнение \mathcal{F} квазигармоническим

$$\mathcal{F}(\rho \varphi(t)) = e^{i\rho \varphi(t)}. \quad (0.3)$$

Элементарные (причем пригодные как вблизи источника, так и в лучевой области) формулы для $u(\vec{x}, t; \rho)$ легко получить, свернув (0.2) с построенным Адамаром [4] разложением функции Грина. Однако, техника Адамара не перенесена еще в теорию упругости.

Мы строим (при некоторых ограничениях на \mathcal{F} и φ) разложение для u вблизи источника и сливаем его с лучевым. Эти построения в скалярной задаче обобщают прием, описанный в [5] для стационарного высокочастотного случая. Стационарным прототипом рассмотрений в § 2, посвященного теории упругости, является работа [6], [7].

Ограничения, которые пришлось наложить на функции (0.2) для

$*$) От гладкости \mathcal{F} , по-видимому, можно отказаться.

построения схемы сшивания высших приближений таковы: при всех t

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} \neq 0, \quad (0.3)$$

нули $\mathcal{F}(s)$ изолированы, а также существуют гладкие функции $\bar{C}_m(t) > 0, C_m(t) > 0$ такие, что

$$\bar{C}_m(s) \rho^m |\mathcal{F}(\rho\varphi(s))| \leq \left| \frac{d^m}{ds^m} \mathcal{F}(\rho\varphi(s)) \right| \leq C_m(s) \rho^m |\mathcal{F}(\rho\varphi(s))| \quad (0.4)$$

для всех целых m . Производные отрицательного порядка суть интегралы: $(\partial/\partial t)^{-1} h(t) = \int_0^t h(t') dt'$.

§ I. Скалярные волны

I. Лучевое решение. Для построения асимптотики решения задачи о стационарном точечном источнике требуются пространственно-временные лучевые решения (о них см., например, [3]) специального вида, являющиеся естественным обобщением нестационарных сферических волн.

Выпустим из источника $\vec{x}=0$ центральное поле лучей. Будем рассматривать \vec{x} только в ограниченной области $\Omega \in \mathbb{R}^3$, для которой 0 - единственная особенность лучевого семейства. Пусть $\tau(\vec{x})$ соответствующий эйконал ($\tau(\vec{x}) = \int_0^{|\vec{x}|} c^{-1}(\vec{x}') d\sigma(\vec{x}')$ вдоль луча; $d\sigma$ - элемент его длины, следовательно, ([4], [5]) $(\nabla\tau)_i^2 = c^{-2}$).

При не слишком малых $r = |\vec{x}|$ ищем u в виде

$$u(\vec{x}, t; \rho) \sim \sum_{j \geq 0} \frac{f^{(-j)}(\rho\theta)}{\rho^j} u^{(j)}(\vec{x}, t), \quad (I.1)$$

где θ - функция только от разности, $\theta = \theta(t - \tau(\vec{x}))$, $\frac{d\theta(s)}{ds}$ не обращается в нуль, функции $f^{(-j)}$ определены рекуррентным соотношением

$$\frac{f^{(-j)}(\rho s)}{\rho} = \int_0^s f^{(k-j)}(\rho s) ds. \quad (I.2)$$

Функции θ и $f^{(0)}$ предполагаются бесконечно дифференцируемыми, $\frac{d\theta(s)}{ds}$ не имеет нулей, а нули $f^{(0)}$ изолированы.

Для квазигармонического заполнения $f^{(0)}(s) = e^{is}$ (I.I) - разложение по обратным степеням большого параметра ρ .

Ряд (I.I) можно считать асимптотическим по определению (подходящее определение дано в [8]), однако нам удобнее иметь дело со степенной шкалой. Потребуем поэтому, чтобы нашлись такие гладкие функции c_m , c_m , $c_m > c_{m+1} > 0$, что

$$c_m^- \rho^{-m} |f^{(0)}(\rho \vartheta(s))| \ll |f^{(-m)}(\rho \vartheta(s))| \ll c_m^+ \rho^{-m} |f^{(0)}(\rho \vartheta(s))|, \quad (I.3)$$

$m = 0, 1, 2, \dots$. Для построения собственно лучевых формул эти условия не требуются (см., например, [9]), однако трудно представить себе процедуру сшивания высших приближений без какого-либо аналога (I.3).

Подставим (I.I) в (0.I), $\vec{x} \in \Omega/0$,

$$Lu \sim \rho f \sum_{m \geq 0}^{(0)} \rho^{-m} (Lu^{(m+1)} + lu^{(m)}) \cdot f^{(-m)}, \quad (I.4)$$

$$L = -\theta' \cdot \left\{ 2 \langle \nabla \tau, \nabla \rangle - \frac{2}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} + \Delta \tau \right\}, \quad (I.5)$$

$$\langle \vec{f}, \vec{g} \rangle = f_1 g_1 + f_2 g_2 + f_3 g_3; \quad \rho f^{(0)}(\rho s) = \frac{d}{ds} f^{(0)}(\rho s); \quad \theta'(s) = \frac{d\theta(s)}{ds}.$$

Если u - асимптотическое решение (0.I), то коэффициенты при $f^{(m)}$ необходимо аннулируются, и

$$Lu^{(0)} = 0; \quad Lu^{(j)} = -lu^{(j-1)}; \quad j \geq 1. \quad (I.6)$$

Введем лучевые координаты $(\tau, \vec{\eta})$, где $\vec{\eta} = \vec{\eta}(\vec{x})$ - единичный вектор, параметризующий приходящий в \vec{x} луч (например, касательный к нему в источнике). Пусть η_1, η_2 - координаты $\vec{\eta}$, вы-
бранные так, что геометрическое расхождение $\gamma(\vec{x}) =$

$= c^2(\vec{x}) \mathcal{D}(x_1, x_2, x_3) / \mathcal{D}(\eta_1, \eta_2)$ имеет при $\tau \equiv |\vec{x}| \rightarrow 0$ асимптотику

$$\gamma = \tau^2 (1 + O(\tau)), \quad \tau \rightarrow 0. \quad (I.7)$$

Преобразуем оператор L , пользуясь известным [4], [5] тождеством $\Delta \tau = (c\gamma)^{-1} d/d\tau (c\gamma)$ и независимостью $c, \gamma, \vec{\eta}$ от t :

$$L\psi = \theta' \cdot \left\{ 2 \frac{\partial \psi}{c^2 \partial(t+\tau)} - \frac{\psi}{c\gamma} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{c}{\gamma} \right) \right\} = -\frac{2\theta'}{c^2} \frac{\partial}{\partial(t+\tau)} (\sqrt{\frac{c}{\gamma}} \psi).$$

Отсюда

$$u^{(0)} = \sqrt{\frac{c}{\gamma}} \Psi^{(0)}(\vec{r}, t-\tau), \quad (I.8)$$

$$u^{(j)} = \sqrt{\frac{c}{\gamma}} \left\{ \Psi^{(j)}(\vec{r}, t-\tau) + \int_0^{t+\tau} \frac{c^2}{2} \sqrt{\frac{\gamma}{c}} \ell(u^{(j-1)}) d(t+\tau) \right\}, \quad (I.9)$$

интегрирование ведется вдоль пространственно-временного луча. Мы предполагаем, что $\Psi^{(0)} \in C^\infty(S^2 \times \mathbb{R}^1)$ (S^2 - единичная сфера).

Из асимптотики $\tau(\vec{x}) \sim c^{-1}(\omega)\tau + o(\tau^2)$, $\tau \rightarrow 0$ и (I.7) нетрудно найти, что при $\tau \rightarrow 0$, $u^{(j)}(\vec{x}, t) = O(\tau^{-1+j})$. Следовательно, ряд заведомо имеет асимптотический характер при

$$\tau \equiv |\vec{x}| > C_-(t) \rho^{-1+\varepsilon}, \quad C_-(t) > 0, \quad 1 > \varepsilon > 0. \quad (I.10)$$

Условие (I.10) гарантирует, как нетрудно проверить, и асимптотическое выполнение уравнения (0.1).

2. Решение вблизи источника. Разложим переменный коэффициент уравнения в ряд Тейлора

$$\frac{1}{c^2(\vec{x})} \sim \gamma^2 + C_1(\vec{x}) + C_2(\vec{x}) + \dots, \quad \gamma \equiv \frac{1}{c(0)} > 0. \quad (I.11)$$

C_m однородны степени m . Будем искать асимптотику поля около источника в виде

$$u(\vec{x}, t; \rho) \sim V^{(0)}(\vec{x}, t; \rho) + V^{(1)}(\vec{x}, t; \rho) + \dots \quad (I.12)$$

где

$$(\Delta - \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}) V^{(0)} = \delta(\vec{x}) \Phi(t, \rho), \quad (I.13)$$

$$(\Delta - \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}) V^{(j)} = \sum_{s=1}^{s=j} C_s(\vec{x}) \frac{\partial^2}{\partial t^2} V^{(j-s)}; \quad j \geq 1, \quad (I.14)$$

$$V^{(0)} \Big|_{t<0} \equiv V^{(j)} \Big|_{t<0} \equiv 0, \quad V^{(0)} \neq 0. \quad (I.15)$$

В стационарном случае $\Phi(t, \rho) = e^{-ipt}$ уравнения (I.13)-(I.14) получа-

ются с необходимостью путем перехода к переменным $\vec{X} = \rho \vec{x}$ и предположения, что $\rho V^{(0)}, V^{(1)}, \rho^{-1} V^{(2)}, \dots$ зависят от ρ только через \vec{X} (см. [5]).

Преобразование Фурье $t \rightarrow \omega$

$$\hat{V}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-i\omega t} V(t) dt \quad (I.16)$$

переводит задачи (I.13)–(I.15) в

$$(\Delta + \omega^2 \gamma^2) \hat{V}^{(0)}(\vec{x}, \omega; \rho) = \delta(\vec{x}) \Phi(\omega; \rho), \quad (I.17)$$

$$(\Delta + \omega^2 \gamma^2) \hat{V}^{(j)}(\vec{x}, \omega; \rho) = -\omega^2 \sum_{s=1}^{s=j} C_j^s(\vec{x}) V^{(s-j)}(\vec{x}, \omega; \rho), \quad (I.18)$$

$$\hat{V}^{(m)}(\vec{x}, \omega; \rho) \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty \text{ , если } \text{Im } \omega > 0, m=0, 1, \dots \quad (I.19)$$

Очевидно, $\hat{V}^{(0)}(\vec{x}, \omega; \rho) = -(4\pi r) e^{-i\gamma\omega r} \hat{\Phi}(\omega; \rho)$ откуда

$$\begin{aligned} V^{(0)}(\vec{x}, t; \rho) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{4\pi r} \int e^{i\omega \gamma r - i\omega t} \hat{\Phi}(\omega; \rho) d\omega = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{2\pi} \iint e^{i\omega(t-t-\gamma r)} \hat{\Phi}(t'; \rho) d\omega dt = \\ &= \frac{\Phi(t-\gamma r)}{-4\pi r} = -\frac{A(t-\gamma r) F(\rho \varphi(t-\gamma r))}{4\pi r}. \end{aligned} \quad (I.20)$$

Не составляет труда проверить, что

$$\hat{V}^{(j)}(\vec{x}, \omega; \rho) = \omega^{1-j} \sum_{m=0}^{m=j} (\omega r)^{-m} \mathcal{V}_{jm}(\vec{\xi}; \rho) \hat{\Phi}(\omega; \rho), \quad (I.21)$$

$$\vec{\xi} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \equiv \frac{\vec{x}}{r}, \quad (I.22)$$

\mathcal{V}_{jm} гладки на единичной сфере S^2 . (Детальные сведения об их структуре можно извлечь из [5]). Очевидно,

$$V^{(j)}(\vec{x}, t; \rho) = \sum_{m=0}^{j-1} r^m \mathcal{V}_{jm}(\vec{\xi}; \rho) \left(i \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\ell+1-j} \Phi(t-\gamma r; \rho).$$

Для $\rho \rightarrow \infty$, $\tau \rho \rightarrow \infty$

$$V^{(j)}(\vec{x}, t; \rho) = \sum_{m=0}^{2j-1} O(\tau^m \rho^{m+1-j}) = \sum_{m=0}^{2j-1} O(\rho^{\frac{m}{2}+1-j} (\tau\sqrt{\rho})^m). \quad (I.23)$$

Следовательно (поскольку $\frac{m}{2}+1-j \leq 0$), при условии

$$\tau < C_+(t)\rho^{-\frac{1}{2}-\varepsilon_+}, \quad \frac{1}{2} > \varepsilon_+ > 0, \quad C_+(t) > 0 \quad (I.24)$$

справедлива оценка $|V^{(j)}| < C_+(t)\rho^{-\frac{\varepsilon_+}{2}(2j-1)}$ и ряд (I.II) имеет асимптотический характер. Так же легко проверить, что он является в области (I.24) при всех t асимптотическим решением (0.I).

3. Сшивание. Как и для стационарной задачи [5], ряды (I.3) и (I.II) пригодны в области, определенной неравенствами (I.I0), (I.24) при $\varepsilon_+ + \varepsilon_- < \frac{1}{2}$.

Для сшивания главных членов достаточно заметить, что $\mathcal{U}(\vec{x}) \sim \gamma \tau$ и воспользоваться (I.20). Потребовав близости $V^{(0)}$ и $f^{(0)} U^{(0)}$ в (I.I0), (I.24), получаем

$$\Theta(T) = \varphi(T), \quad f^{(0)}(y) = \mathcal{F}(y). \quad (I.25)$$

Если выбрано $f^{(0)}$, то начальные данные определяются однозначно:

$$\Psi^{(0)}(\vec{\eta}, T) = \frac{1}{-4\pi\sqrt{C(0)}} \mathcal{A}(T). \quad (I.26)$$

Рассмотрим вкратце процедуру, ведущую к определению начальных данных $\Psi^{(1)}, \Psi^{(2)}, \dots$ дальнейших для приближений лучевого метода. Для этого нам придется распространить условие (I.3) на отрицательные индексы (т.е. воспользоваться (0.4) и (I.24)).

Из [5] следует, что при $\tau \rightarrow 0$ $U^{(0)} \sim \sum_{m \geq -j} \tau^m \sum_{n \geq 0} \ln^n \tau$. $W_{j,m,n}(\vec{\xi}, t+\tau, t-\tau)$, где $W_{j,m,n} \in C^\infty(S^2 \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1)$. Используя аналитические свойства эйконала \mathcal{U} , разложим функции $f^{(-j)}$ в асимптотические при $\tau \rightarrow 0$ ряды

$$f^{(-j)}(\rho\theta(t-\tau(\vec{x}))) \sim \sum_{m \geq 0} f^{(-j)(m)}(\rho\theta(t-\tau z)) \rho^m \left(\sum_{n \geq 1} \frac{\partial^n \theta(t-\tau z)}{\partial t^n} \tau_{n+1}(\vec{x}) \right)^{m\tau}$$

где $\tau_m(\vec{x})$ однородны по \vec{x} степени m . Аналогично поступим с функциями $W_{j,m,n}$. В результате получим

$$u \sim \sum_S \rho^S W^{(S)}, \quad (I.27)$$

$$W^{(S)} \sim \sum_f \rho^f f^{(-j)} (\rho \theta(t - \gamma z)) \Phi^{(S,j)}, \quad \Phi^{(S,j)} \sim \sum_m \sum_{n \geq 0} \tau^m \ln^n \tau W_{S,j,m,n} \quad (I.28)$$

$$W_{S,j,m,n} = W_{S,j,m,n}(\vec{x}, t - \gamma z, t + \gamma z), \quad W_{S,j,m,n} \in C^\infty(S^2 \times R^1 \times R^1), \quad (I.29)$$

причем при любых S, j значок m ограничен сверху. Этот ряд является асимптотическим решением (O.I) в слое (I.IO), (I.24). Такая же структура ряда (I.II).

Имеет место следующая лемма единственности.

Пусть ряд вида (I.27)–(I.29) асимптотически удовлетворяет (O.I) в слое (I.IO), (I.24). Тогда он однозначно определяется заданием функций $W_{S,j,-1,n}$, которые не зависят от $t + \gamma z$ а в остальном произвольны.

Это утверждение (как и его доказательство) аналогично леммам единственности работы [5].

Можно проследить, начальные данные $\Psi^{(0)}, \Psi^{(1)}, \dots$ входят в (I.27)–(I.29) таким образом, что их действительно можно последовательно определить сшиванием с (I.II).

Как и в стационарной задаче [5], оказывается, что

$$\Psi^{(1)} \equiv \Psi^{(2)} \equiv \dots \equiv 0,$$

(это специфика трехмерного случая), и что логарифмические члены отсутствуют, $W_{S,j,m,n} \equiv 0, n \neq 0$ (это верно в любой размерности).

§ 2. Возбуждение упругих волн

Рассмотрим две задачи вида

$$\vec{L}(\vec{u}) = \vec{F}(\vec{x}) \Phi(t; p); \quad p \rightarrow \infty, \quad (2.1)$$

$$L_i(\vec{u}) = -\rho(\vec{x}) \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \mu(\vec{x}) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda(\vec{x}) \operatorname{div} \vec{u}), \quad (2.2)$$

с векторами \vec{F} сосредоточенными при $\vec{x} = 0$, $\operatorname{supp} \vec{F} = \{0\}$, $\Phi(t; p) = \mathcal{A}(t) \mathcal{F}(p \mathcal{G}(t))$; $\lambda + 2\mu > \mu > 0$; $\rho > 0$; $\lambda, \mu, \rho \in C^\infty(R^3)$.

Лучевое разложение имеет вид суммы

$$\vec{u}(\vec{x}, t; \rho) \sim \vec{u}^a(\vec{x}, t; \rho) + \vec{u}^b(\vec{x}, t; \rho); \quad (2.3)$$

$$\vec{u}^c \sim \sum_{j \geq 0} \frac{f^{c,j}(\rho \theta^c)}{\rho^j} \vec{u}^{c,j}(\vec{x}, t); \quad \theta^c = \theta^c(t - \tau^c(\vec{x})) \quad (2.4)$$

$$|\vec{u}^{a,0}| + |\vec{u}^{b,0}| \neq 0$$

здесь $a = a(\vec{x}) = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$, $b = b(\vec{x}) = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ - продольная и поперечная скорости, значок c заменяет a или b , τ^a, τ^b - эйконалы отвечающие центральным полям лучей.

Если $\vec{u}^{a,m}$ и $\vec{u}^{b,n}$ - первые ненулевые члены рядов (2.4),

то

$$\vec{u}^{a,m}(\vec{x}, t) = \frac{\Psi(\vec{\eta}^a, t - \tau^a(\vec{x}))}{\sqrt{\rho(\vec{x}) a(\vec{x}) \gamma^a(\vec{x})}} \vec{s}^a(\vec{x}); \quad \vec{u}^{b,n} = \frac{1}{\sqrt{\rho b \gamma^b}} \vec{H} \vec{\chi}^n(\vec{\eta}^b, t - \tau^b) \quad (2.5)$$

где $\vec{\eta}^a$ и $\vec{\eta}^b$ введены аналогично § I, $\vec{s}^a = a \text{grad} \tau^a$ (откуда $|\vec{s}^a| = 1$). В базисе $\vec{s}^b(\vec{x}), \vec{n}^b(\vec{x}), \vec{\gamma}^b(\vec{x})$ (соответственно: единичные касательная, нормаль и бинормаль к поперечному лучу в точке \vec{x}) элементы матрицы \vec{H} таковы: $H_{ij} = H_{ji} = 0, j = 1, 2, 3; H_{22} = H_{23} = \cos \Xi, H_{32} = -H_{23} = \sin \Xi$, где $\Xi = \int_{\gamma^b} \Gamma b d\sigma^b$, Γ - кручение поперечного луча, вдоль которого идет интегрирование.

Скалярную функцию $\Psi^{(m)}$ и векторную $\vec{\chi}^n$, которую можно считать ортогональной к $\vec{s}^b = b \text{grad} \tau^b$, предполагаем гладкими на $S^2 \times \mathbb{R}^1$. Формулы для высших приближений см. в [9].

I. Рассмотрим задачу о тензоре Грина

$$\vec{F} = -4\pi \vec{e}_1 \delta(\vec{x}), \quad (2.6)$$

\vec{e}_1 - орт оси x_1 . Вблизи источника, аналогично § I,

$$\vec{u} \sim \vec{V}^0 + \vec{V}^1 + \dots \quad (2.7)$$

причем для \vec{V}^0 получаем уравнение с постоянными коэффициентами

$$(\lambda(\omega) + 2\mu(\omega)) \text{grad} \text{div} \vec{V}^0 - \mu(\omega) \text{rot} \text{rot} \vec{V}^0 - \rho(\omega) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{V}^0 = \vec{F}(\vec{x}) \Phi(t; \rho) \quad (2.8)$$

Преобразование Фурье дает

$$(\lambda(\omega) + 2\mu(\omega)) \text{grad} \text{div} \hat{\vec{V}}^0 - \mu(\omega) \text{rot} \text{rot} \hat{\vec{V}}^0 + \rho(\omega) \omega^2 \hat{\vec{V}}^0 = \hat{\vec{F}}(\vec{x}) \hat{\Phi}(\omega; \rho) \quad (2.9)$$

откуда

$$\vec{V}^0(\vec{x}, \omega; \rho) = \frac{\hat{\Phi}(\omega; \rho)}{\rho(\omega)} \left\{ (\beta^2 \vec{e}_1 - \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial}{\partial x_1} \text{grad}) \frac{e^{i\beta\omega z}}{z} - \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial}{\partial x_1} \text{grad} \frac{e^{i\alpha\omega z}}{z} \right\} \quad (2.10)$$

$$\alpha = \frac{1}{a(\omega)} = \sqrt{\frac{g(\omega)}{\lambda(\omega) + 2\mu(\omega)}}, \quad \beta = \frac{1}{b(\omega)} = \sqrt{\frac{g(\omega)}{\mu(\omega)}}.$$

Из (2.10) нетрудно получить, что

$$\vec{V}^0(\vec{x}, t; \rho) = \mathcal{P} \vec{V}^0 + \vec{R},$$

где

$$\mathcal{P} \vec{V}^0 = \frac{1}{\rho(\omega)} \left\{ \beta^2 (\vec{e}_1 - \langle \vec{e}_1, \vec{\xi} \rangle \vec{\xi}) \frac{\Phi(t - \beta z; \rho)}{z} - \alpha^2 \langle \vec{e}_1, \vec{\xi} \rangle \vec{\xi} \frac{\Phi(t - \alpha z; \rho)}{z} \right\}$$

а $|\vec{R}| = O(z^{-2})$ при $z \rightarrow \infty, z > 0$. В области (I.10), (I.24) $|\vec{R}| = O(\mathcal{P} \vec{V}^0)$. Сшивая $u^{a,0} f^{a,0} + u^{b,0} f^{b,0}$ с $\vec{V}^0 \sim \mathcal{P} \vec{V}^0$, находим, что

$$\theta^a(\tau) = \theta^b(\tau) = \varphi(\tau); \quad f^{a,0}(\tau) = f^{b,0}(\tau) = \mathcal{F}(\tau). \quad (2.11)$$

При фиксированных функциях $f^{a,0}$ и $f^{b,0}$, $\Psi^{(0)}$ и $\vec{\chi}^0$ находятся однозначно:

$$\Psi^{(0)}(\vec{s}, \tau) = \langle \vec{s}, \vec{e}_1 \rangle a^{-\frac{3}{2}}(\omega) \rho^{-\frac{1}{2}}(\omega) \mathcal{A}(\tau), \quad (2.12)$$

$$\vec{\chi}^0(\vec{s}, \tau) = (\vec{e}_1 - \langle \vec{s}, \vec{e}_1 \rangle \vec{s}) b^{-\frac{3}{2}}(\omega) \rho^{-\frac{1}{2}}(\omega) \mathcal{A}(\tau) \quad (2.13)$$

(мы полагаем, что при $z \rightarrow 0, \vec{h}^{a,b} \vec{\xi} = \frac{\vec{x}}{z}$).

Для источника (2.1), (2.6), возбуждающего в нулевом приближении обе волны (продольную и поперечную), их частотные характеристики оказываются одинаковыми.

2. Рассмотрим центр расширения

$$\vec{F} = -4\pi \text{grad} \delta(\vec{x}). \quad (2.14)$$

Для нулевого приближения имеем $\vec{V}^0(\vec{x}, \omega; \rho) = \hat{\Phi}(\omega; \rho) \text{grad} (\vec{r} e^{i\alpha\omega z}) / \alpha \omega^2$

$$\vec{V}^0(\vec{x}, t; \rho) = \frac{1}{\rho(\omega) a^2(\omega)} \text{grad} \frac{\Phi(t - \alpha r)}{r} = \rho \vec{V}^0 + \vec{R},$$

$$\rho \vec{V}^0 = - \frac{\mathcal{A}(t - \alpha r) \varphi'(t - \alpha r) \rho F'(\rho(\varphi(t - \alpha r)))}{\rho(\omega) a^3(\omega)} \vec{\xi} \quad (2.15)$$

а $\vec{R} = o(\rho \vec{V}^0)$ в слое (I.10), (I.24). Следовательно,

$$\vartheta^{\alpha}(\Gamma) = \varphi(\Gamma), \quad f^{\alpha, 0}(\Gamma) = F'(\Gamma) \cdot \rho, \quad (2.16)$$

$$\Psi^{(0)}(\vec{s}, \Gamma) = - \mathcal{A}(\Gamma) a^{-3/2}(\omega) \vartheta^{-1/2}(\omega) \varphi'(\Gamma). \quad (2.17)$$

Следующее приближение $\vec{V}^1(\vec{x}, t; \rho)$, построенное по схеме § I последовало (для стационарной постановки) в [6], [7]. Было найдено, что

$$\vec{V}^1(\vec{x}, \omega; \rho) = \vec{V}^{\alpha 1}(\vec{x}, \omega; \rho) + \vec{V}^{\beta 1}(\vec{x}, \omega; \rho) \quad (2.18)$$

причем $\vec{V}^{\alpha 1}$ (а, следовательно, и $\vec{V}^{\alpha}(\vec{x}, t; \rho)$) сшивается в слое (I.10), (I.24) с продольной волной, а

$$\vec{V}^{\beta 1}(\vec{x}, \omega; \rho) = e^{i\omega\beta r} \sum_{s=-4}^{s=1} \vec{W}_s^{\beta 1}(\vec{x}, \omega) \hat{\Phi}'(\omega; \rho), \quad (2.19)$$

$$\hat{\Phi}'(t; \rho) = d/dt \Phi(t; \rho),$$

где $\vec{W}_s^{\beta 1}$ однородны по \vec{x} степени s . При условии (I.10), (I.24) слагаемое $\vec{W}_{-1}^{\beta 1}$ является старшим, оно равно (см. [7])

$$\vec{W}_{-1}^{\beta 1}(\vec{x}, \omega; \rho) = \frac{\vec{Q} - \langle \vec{Q}, \vec{\xi} \rangle \vec{\xi}}{-i\omega r}, \quad (2.20)$$

$$\vec{Q} = \frac{2^2 \beta^2}{\rho^2(\omega)(a^2 - \beta^2)} (2\beta^2 \text{grad} \mu - \text{grad} \rho) \Big|_{\vec{x}=0}. \quad (2.21)$$

Сшивая $\vec{u}^{\beta 1}, f^{\beta 1}$ с фурье-образом $\rho \vec{V}^{\beta 1}$ функции $e^{i\omega\beta r} \vec{W}_{-1}^{\beta 1} \hat{\Phi}'$,

$$\rho \vec{V}^{\beta 1}(\vec{x}, t; \rho) = \left\{ \vec{Q} - \langle \vec{Q}, \vec{\xi} \rangle \vec{\xi} \right\} \frac{\int_0^{t-\beta r} \hat{\Phi}'(\Gamma; \rho) d\Gamma}{r}$$

и замечая, что

$$\int_0^{t-\beta z} \Phi'(T; \rho) dT = \frac{q(t-\beta z)}{q'(t-\beta z)} \cdot F(\rho \varphi(t-\beta z)) (1 + O(\frac{1}{\rho}))$$

находим:

$$f^{b,-1}(T) = F(T) \tag{2.22}$$

$$\Theta^b(T) = \varphi(T), \tag{2.23}$$

тогда

$$\vec{\chi}'(\vec{s}, T) = (\vec{Q} - \langle \vec{Q}, \vec{\xi} \rangle \vec{\xi}) b^{-1/2} (0) q^{-1/2} (0) \cdot F(T). \tag{2.24}$$

Таким образом, форма импульса поперечной волны иная, чем у продольной. Поперечная волна ведет себя как интеграл от продольной. Для источника, порождающего в нулевом приближении только поперечную волну (см. [7]), картина обратная.

3. Лемма единственности, (которой мы неявно пользовались выше), обобщающая подобный результат для стационарной задачи [6], [7] такова.

Пусть

$$\vec{u} \sim \sum_s \rho^s \vec{W}^s, \quad \vec{W}^s \sim \sum_j \frac{f^{s,-j}(\rho \theta(t-\gamma z))}{\rho^j} \sum_m \sum_{n \geq 0} z^m \ln z^n \vec{W}^{s,-j,m,n},$$

$$\vec{W}^{s,-j,m,n} = \vec{W}^{s,-j,m,n}(\vec{\xi}, t-\gamma z, t+\gamma z) \in \vec{C}^\infty(S^2 \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1),$$

$$\frac{f^{s,-j}(\rho \xi)}{\rho} = \int_0^\xi f^{s,-j+1}(\rho \sigma) d\sigma,$$

причем в каждом ряде $\vec{W}^s \quad m \leq M(s, j) < +\infty$. Если ряд \vec{u}^c асимптотически удовлетворяет (2.1) в слое (I.10), (I.24), то имеется ровно две возможности:

а) $\alpha = \gamma$, тогда функции $\langle \vec{W}^{s,-j,-1,n}, \vec{\xi} \rangle$ можно задавать произвольно, но так, чтобы они не зависели от $t+\gamma z$; остальные $\vec{W}^{s,-j,m,n}$ по ним определяются.

в) $\alpha = \beta$, тогда произвольны, но не зависят от $t+\gamma z$ функции $\vec{W}^{s,-j,-1,n} - \langle \vec{W}^{s,-j,-1,n}, \vec{\xi} \rangle \vec{\xi}$, а остальные выражаются через них.

Литература

1. Рнгов С.М. Модулированные колебания и волны. Труды ФИАН, 1940, т.2, № I, с. 40-133.
2. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны, М., 1977, 622 с.
3. Орлов Ю.И. Пространственно-временная дифракция импульсов. В кн.: "Прямые и обратные задачи дифракции", М., 1979, с.5-144.
4. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа, М., 1978, 352 с.
5. Бабич В.М., Кирпичникова Н.Я. Метод пограничного слоя в задачах дифракции, Л., 1974, 124 с.
6. Киселев А.П. О высокочастотных точечных источниках в неоднородных изотропных упругих средах. - Докл. АН СССР, 1974, т.219, № 4, с.829-831.
7. Киселев А.П. О начальных данных для лучевых формул, описывающих поля точечных источников в неоднородных упругих средах. - Вopr.дин.теории распр. сейсм.волн, 1975, т.15, с.6-27.
8. Бурбаки Н. Функции действительного переменного, М., 1965. с.424.
9. Бабич В.М. О пространственно-временном лучевом методе в теории упругих волн. - Изв.АН СССР, Физика Земли, 1979, № 2, с.3-13.

A.P.Kiselev. Excitation of modulated waves in inhomogeneous media.

Excitation of scalar and elastic waves by point sources is treated by boundary layer technique. Higher terms of asymptotics are discussed.