Математические заметки

Том 81 выпуск 5 май 2007

УДК 515.142.221

Локальные гомологии и размерная полноценность

Д. В. Артамонов

Дается естественный критерий размерной полноценности локально компактных пространств с конечно порожденными локальными гомологиями.

Библиография: 19 названий.

При всем обилии информации о механизме нарушения логарифмического закона поведения размерности компактов по отношению к их декартовым произведениям до сих пор практически не выделено каких-либо общих условий, обеспечивающих выполнение этого закона. Как известно, локально компактные пространства X, для которых логарифмический закон $\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$ выполнен по отношению к любым другим локально компактным пространствам Y, называются *размерно полноценными*. Предполагалось, что размерная полноценность может быть обеспечена гомологической локальной связностью X [1], однако даже предположение К. Борсука (названное им в [2] проблемой № 1), что логарифмический закон имеет место для произведений конечномерных ANR-компактов, было опровергнуто А. Н. Дранишниковым [3], [4]. И это несмотря на то, что такие компакты локально стягиваемы, имеют гомотопический тип полиэдров [5] и характеризуются как делители Q-многообразий [6]. В примерах Дранишникова оба множителя X и Y являются AR.

Было замечено, однако (теорема 8 в [7]), что размерно полноценными оказываются гомологические многообразия над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$ (локально компактные пространства с локальными гомологиями многообразий). Более того, при условии гомологической локальной связности размерно полноценными оказываются и $(\mathbb{Z}-n)$-пространства в смысле [8] – конечномерные локально компактные пространства X, чьи локальные гомологии $H_p^x = H_p(X, X \setminus x; \mathbb{Z})$ не имеют кручения и отличны от нуля только при $p = n$ (предложение 4.1 и замечание к нему в [9]).

В настоящей работе показывается, что гомологическая локальная связность X не обеспечивает его размерную полноценность даже при дополнительном требовании периферической гомологической локальной связности над $\mathbb{Z}$. Пространство X называется *периферически гомологически локально связным* над некоторой группой коэффициентов G, если для любой окрестности U произвольной точки $x \in X$ и всякого числа $k \geqslant 0$ можно подобрать такую окрестность $V \subset U$ этой точки, что при $p \leqslant k$ отображения гомологий $H_p^c(X \setminus x, U \setminus x; G) \to H_p^c(X \setminus x, V \setminus x; G)$ имеют нулевые образы. Двойственным образом в терминах когомологий $H^p(X \setminus x, U \setminus x; G)$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 06-01-00463.

© Д. В. Артамонов, 2007

определяется периферическая когомологическая локальная связность X над G (см. [10; п. 5]). Естественность этих определений оправдывается равенством нулю соответствующих пределов используемых групп (см., в частности, [11]).

Известно [12], что гомологическая локальная связность конечномерного пространства X над любым счетным кольцом R эквивалентна счетности всех локальных гомологий X над R. Аналогичным образом периферическая когомологическая локальная связность X над R эквивалентна счетности всех локальных когомологий $H^p(X, X\setminus x; R)$ пространства X (предложение 2 в [3]). Как оказалось, наличие для X обоих условий локальной связности вместе эквивалентно конечной порожденности всех локальных гомологий $H_p^x(R) = H_p(X, X \setminus x; R)$ (следствие 1 в [13]).

В работе показывается, что пространства с конечнопорожденными гомологиями над $R = \mathbb{Z}$ тогда и только тогда размерно полноценны, когда их локальные гомологии в старшей размерности не имеют кручения. Естественно называть такие пространства гомологическими полиэдрами. Устанавливается наличие компактов с конечнопорожденными локальными гомологиями (тем самым одновременно гомологически и периферически гомологически локально связных над $\mathbb{Z}$), для размерности произведений которых логарифмический закон не имеет места. В конце работы обсуждается сложность по сравнению с гомологическими многообразиями локального устройства гомологических полиэдров.

1. Гомологические полиэдры

Всюду в работе X – конечномерное метризуемое локально компактное пространство, $n = h\dim_{\mathbb{Z}} X$ – гомологическая размерность X над $\mathbb{Z}$. Известно [14], что n – максимальное число, для которого $H_n^x = H_n^x(\mathbb{Z}) \neq 0$ в некоторых точках $x \in X$.

Пространство X, все локальные гомологии H_p^x которого конечно порождены, будем называть *квазиполиэдром*. Как отмечено выше, квазиполиэдры – это в точности гомологически и периферически гомологически локально связные пространства. Квазиполиэдр, старшие локальные гомологии H_n^x которого не содержат кручения, будем называть *гомологическим полиэдром*.

Теорема. *Квазиполиэдр X тогда и только тогда размерно полноценен, когда он является гомологическим полиэдром. В этом случае $n = h\dim_{\mathbb{Z}} X = \dim_{\mathbb{Z}} X = \dim X$.*

Доказательство. Будем пользоваться тем, что размерная полноценность пространства X эквивалентна совпадению всех его когомологических размерностей $\dim_G X$ с $\dim X$ (теорема В. Г. Болтянского). В соответствие с [15] в рассматриваемых условиях когомологическая размерность $\dim_G X$ совпадает с максимальным числом k, для которого в некоторых точках $x \in X$ отличны от нуля локальные когомологии

$$H_x^k = \varprojlim_{x\in U} H^k(X, X \setminus U; G),$$

где U – окрестности x. Кроме того, в силу следствия 1 в [13] группы $H_x^p(\mathbb{Z})$ конечно порождены, а в соответствии с теоремой 4 в [13] имеют место формулы универсальных коэффициентов:

$$0 \to H_x^p(\mathbb{Z}) \otimes G \to H_x^p(G) \to \operatorname{Tor}(H_x^{p+1}(\mathbb{Z}), G) \to 0.$$

Если X размерно полноценно, то из того, что $\dim_G X = \dim X = m$ для всех G, заключаем, что для некоторых $x \in X$ в группах $H_x^m(\mathbb{Z})$ в качестве прямых слагаемых может быть выделена нетривиальная свободная часть. В соответствии с теоремой 4 в [3] в рассмотренных условиях имеют место формулы универсальных коэффициентов:

$$0 \to \operatorname{Ext}(H_x^{p+1}(\mathbb{Z}), G) \to H_p^x(G) \to \operatorname{Hom}(H_x^p(\mathbb{Z}), G) \to 0.$$

Из этих формул делаем вывод, что в соответствующих точках H_m^x – нетривиальные свободные группы. Так как всегда $h\dim_{\mathbb{Z}} X \leqslant \dim_{\mathbb{Z}} X$ (см. [7]), в силу указанной выше характеризации $h\dim_{\mathbb{Z}} X$ локальными гомологиями имеем $m = n = h\dim_{\mathbb{Z}} X$.

Наоборот, пусть в некоторой точке $x \in X$ группа H_n^x не имеет кручения. В соответствии с теоремой 4 из [13] в рассматриваемых условиях имеют место формулы универсальных коэффициентов:

$$0 \to \operatorname{Ext}(H_{p-1}^x(\mathbb{Z}), G) \to H_x^p(G) \to \operatorname{Hom}(H_p^x(\mathbb{Z}), G) \to 0.$$

Из этих формул следует, что имеются нетривиальные группы $H_x^n(G)$, а все $H_x^p(G)$ при $p > n$ равны нулю. Так как в рассматриваемых условиях группы $H_x^p(G)$ характеризуют $\dim_G X$, это означает размерную полноценность X и равенство $n = \dim_{\mathbb{Z}} X$. Теорема доказана.

Как известно, $\dim_{\mathbb{Z}} X - 1 \leqslant h\dim_{\mathbb{Z}} X \leqslant \dim_{\mathbb{Z}} X$ (см. [7]). Кроме того, равенство $h\dim_{\mathbb{Z}} X = \dim_{\mathbb{Z}} X$ обеспечивает размерную полноценность X, а в классе гомологически локально связных пространств размерная полноценность влечет равенство $h\dim_{\mathbb{Z}} X = \dim_{\mathbb{Z}} X$ [7]. Таким образом, справедливо утверждение.

Следствие. *Для гомологических полиэдров* $h\dim_{\mathbb{Z}} X = \dim_{\mathbb{Z}} X$. *Для квазиполиэдров, не являющихся гомологическими полиэдрами,* $\dim_{\mathbb{Z}} X = 1 + h\dim_{\mathbb{Z}} X$.

Замечание. Без условия гомологической локальной связности равенство $h\dim_{\mathbb{Z}} X = \dim_{\mathbb{Z}} X$ размерной полноценностью не обеспечивается. В самом деле, положим $X = F\mathbb{Q}_2 \bigsqcup_p (F\mathbb{Q}_{p,2} \sqcup FR_{p,2} \sqcup F\mathbb{Z}_{p,2})$ – объединение пространств размерности 2, реализующих размерные функции по всем группам (см. [16]). Каждое слагаемое размерно неполноценно, поэтому гомологическая размерность каждого слагаемого есть 1. По теореме суммы $h\dim_{\mathbb{Z}} X = 1$.

По теореме же Бокштейна когомологическая размерность по группе G равна максимуму размерности по некоторому набору групп типа Q, Q_p, R_p, $\mathbb{Z}_p$. Но размерность X по каждой из этих групп равна 2. Следовательно, для любой группы G имеем $\dim_G X = 2$, т.е. X размерно полноценно.

2. Примеры квазиполиэдров

В работах Дранишникова [3], [4] построено семейство четырехмерных AR-компактов M_p, индексированное всеми простыми числами p, для которых $\dim(M_p \times M_q) = 7$ при $p \neq q$. На основе представленной в этих работах общей идеи ниже конструируются аналогичные компакты $\widetilde{M_p}$, оказывающиеся квазиполиэдрами.

2.1. Построение компактов $\widetilde{M_p}$. Пусть $I^4 = I_0^4$ – единичный четырехмерный куб. Разделим его на 2^4 равных двоичных кубиков первой очереди с ребром $1/2$:

$I^4_{1,1},\dots,I^4_{1,k_0}$, $k_0=2^4$. Пусть B_0 – один из этих кубиков, скажем, I^4_{1,k_0}. Положим $M_0=[I^4\setminus B_0]$.

Первый шаг. Множество M_1. В кубиках, составляющих M_0, выделим еще более мелкие двоичные кубики B^k_1, $k=1,\dots,k_0-1$, с условием $B^k_1\subset \operatorname{Int} I^4_{1,k}$. Например, достаточно разбить каждый кубик $I^4_{1,k}$ на 4^4 двоичных кубиков с ребром $1/8$ и в качестве B^k_1 взять какой-либо кубик, не пересекающийся с границей $\partial I^4_{1,k}$.

Далее необходимо будет построить систему трубок $T^k_1\simeq D^3\times I$, соединяющих кубики B^k_1 и B_0, лежащих в $\operatorname{Int} M_0$ и удовлетворяющих следующим условиям.

1. T^k_1 составлена из двоичных кубиков одного достаточно мелкого размера.
2. $T^k_1\cap T^l_1=T^k_1\cap B^l_1=\varnothing$ при $k\neq l$.
3. Часть трубки $T^k_1\setminus \operatorname{Int} I^4_{1,k}$ идет по граням кубиков $I^4_{1,l}$. Из этого следует, что для каждого l имеем $[I^4_{1,l}\setminus\bigcup_{k\neq l}T^k_1]\simeq I^4$.
4. Часть трубки $T^k_1\cap I^4_{1,k}$ трансверсально пересекает ∂B^k_1 и $\partial I^4_{1,k}$. Другой ее конец трансверсально упирается в ∂B_0. Под этим понимается следующее: для каждой трубки имеем гомеоморфизм $f\colon D^3\times I\to T^k_1$ такой, что $f^{-1}(T^k_1\cap\operatorname{Int} I^4_{1,k})=D^3\times\{t>t_0\}$, $f^{-1}(T^k_1\cap B^k_1)=D^3\times 1$, $f^{-1}(T^k_1\cap B_0)=D^3\times 0$.

Определим пространство M_1 следующим образом: $M_1=[M_0\setminus B_1]=M_0\setminus\operatorname{Int} B_1$, где $B_1=\bigcup_k(B^k_1\cup T^k_1)$.

Второй шаг. Множество M_2. Разделим все кубики $I^4_{1,k}$, попавшие в M_1, на двоичные кубики со стороной, меньшей сторон тех двоичных кубиков, что участвовали в предыдущем построении кубиков B^i_1 и трубок T^i_1. Эти кубики будем обозначать $I^4_{2,l}$; индекс l осуществляет единую нумерацию вне зависимости от того кубика $I^4_{1,k}$, в котором содержится $I^4_{2,l}$. Будем говорить, что это кубики *первой очереди*.

Дальше построение идет отдельно в каждом кубике $I^4_{1,k}$, поэтому далее k фиксировано, а все рассматриваемые $I^4_{2,l}$ содержатся в $I^4_{1,k}$.

В каждом $I^4_{2,l}$ строим двоичный кубик меньшего размера B^l_2 такой, что $B^l_2\subset\operatorname{Int} I^4_{2,l}$. Будем называть кубики B^l_2 кубиками *второй очереди*.

Затем нам необходимо соединить кубы B^l_2 и B^k_1 трубками, удовлетворяющими условиям, сходным с 1–4. Однако нам понадобится, чтобы трубки, их соединяющие, не только лежали на гранях $I^4_{2,l}$, но и на одномерных ребрах этих кубов.

Сделаем это с помощью вспомогательных построений. Именно, построим сначала дерево γ с начальной вершиной $A_1\in\partial B^k_1\setminus T^k_1$, остальная часть которого лежит в $\operatorname{Int}(M_1\cap I^4_{1,k})$ на одномерном остове объединения кубов $I^4_{2,l}$ и содержит все вершины этих кубов, лежащие в $\operatorname{Int}(M_1\cap I^4_{1,k})$.

Для его построения возьмем систему путей без самопересечений $\alpha_1,\dots,\alpha_N$, соединяющих все указанные вершины с точкой A_1 и идущих по содержащимся в $\operatorname{Int}(M_1\cap I^4_{1,k})$ ребрам кубов $I^4_{2,l}$. На первом шаге присоединим к α_1 части α_2 с каждого момента их отклонения от α_1 до вершины, предшествующей следующей встрече с α_1. Получим дерево $\alpha_{1,1}$. Далее применим эту процедуру к $\alpha_{1,1}$ и α_3 – получим дерево $\alpha_{1,2}$. Продолжение этого процесса приведет к построению нужного дерева γ.

Далее в каждой вершине кубов $I^4_{2,l}$, лежащей в $M_1\cap\operatorname{Int} I^4_{1,k}$, строим содержащийся в $M_1\cap\operatorname{Int} I^4_{1,k}$ достаточно малый двоичный кубик C^r_2 так, чтобы он не пересекался с уже построенными кубиками второй и первой очереди. Индекс r будет осуществлять общую нумерацию вне зависимости от кубика $I^4_{2,k}$.

Затем дерево γ переделывается в систему двоичных трубок. Именно, пусть δ – ребро γ, соединяющее либо два новых куба C_2^r и C_2^p, либо новый кубик C_2^r с кубом B_1^k. Тогда ребро δ раздувается до двоичной трубки, соединяющей те же два кубика, причем такой, чтобы выполнялось условие трансверсальности, подобное условию 4 для трубок T_1^k выше.

И, наконец, строим двоичные трубки, соединяющие каждый старый куб $B_2^l \subset \operatorname{Int} I_{2,l}^4$ с одним из ближайших к нему новых кубов C_2^r, расположенных на вершине $I_{2,l}^4$. Требуем, чтобы трубка сначала выходила из куба $B_2^l \subset \operatorname{Int} I_{2,l}^4$ на границу $\partial I_{2,l}^4 \setminus C_2^r$, а затем по грани $I_{2,l}^4$, снаружи от него самого, доходила до C_2^r. При этом должно быть выполнено условие трансверсальности, упомянутое выше.

Введем общую индексацию трубок второй очереди, вне зависимости от того, какие кубики они соединяют и в каком кубе первой очереди они содержатся. Пусть T_2^n – трубка второй очереди с номером n.

Подобно определению M_1 определим пространство M_2 следующим образом: $M_2 = [M_1 \setminus B_2] = M_1 \setminus \operatorname{Int} B_2$, где B_2 – объединение всех B_2^l, C_2^k и T_2^n.

Третий и последующие шаги выполняются аналогично второму. Сначала множества $M_2 \cap I_{2,k}^4$ делятся на двоичные кубики $I_{3,l}^4$ размера, меньшего размера тех кубиков, что участвовали во всех предыдущих построениях во всем кубе I_0^4. Дальнейшие построения идут отдельно в каждом $I_{2,k}^4$.

В каждом $I_{3,l}^4$ строится двоичный кубик *третьей очереди* $B_3^l \subset \operatorname{Int} I_{3,l}^4$. Затем строится дерево γ, удовлетворяющее тем же условиям, что и на предыдущем шаге, и дополнительные кубики третьей очереди C_3^r в вершинах кубов $I_{3,l}^4$, лежащих в $M_2 \cap \operatorname{Int} I_{2,k}^4$. Наконец, как и на предыдущем шаге, дерево γ переделывается в систему трубок и строятся трубки, соединяющие каждый старый кубик B_3^l с одним из ближайших новых кубиков C_3^r. Аналогично вводится общая индексация трубок третьей очереди T_3^n. Полагаем по определению $M_3 = [M_2 \setminus B_3] = M_2 \setminus \operatorname{Int} B_3$, где B_3 – объединение всех B_3^l, C_3^k и T_3^n.

Далее построения аналогичны. На каждом шаге строятся множества $M_i = [M_{i-1} \setminus B_i] = M_{i-1} \setminus \operatorname{Int} B_i$, где B_i – объединение всех B_i^l, C_i^k и T_i^n. Положим $M = \bigcap_i M_i$.

Для построения $\widetilde{M_p}$ понадобится следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть D – трехмерный диск, $D_1, \dots, D_n$ – дизъюнктные трехмерные подшары в $\operatorname{Int} D$. Пусть отображения $f\colon \partial D \to \partial D$ и $f_i\colon \partial D_i \to \partial D_i$ имеют одинаковую степень. Тогда существует их продолжение до отображения $F\colon D \setminus \bigcup_i \operatorname{Int}(D_i) \to D \setminus \bigcup_i \operatorname{Int}(D_i)$. Для конечнократных симплициальных отображений f, f_i существует конечнократное их продолжение F.*

Доказательство. Доказательство леммы кроме последнего утверждения имеется в [3]. Докажем последнее утверждение. Введем обозначение $\mathscr{D} = D \setminus (\bigcup_i \operatorname{Int} D_i)$.

По лемме Дранишникова существует непрерывное продолжение F_1. Согласно теоремам 7.3 и 7.6 главы 2 в [17] имеется гомотопная F_1 симплициальная аппроксимация F_2. Для симплекса $\triangle$, принадлежащего $\partial\mathscr{D}$, отображения F_2 и F_1 различаются: при отображении F_2 образы всех вершин кратного барицентрического подразделения $\mathscr{D}$, по отношению к которому F_2 симплициально, суть вершины начальной триангуляции.

Подклеим к ∂D и ко всем ∂D_i соответственно $\partial D \times I$ и $\partial D_i \times I$, так чтобы пространство $\mathscr{D}' = \mathscr{D} \cup (\partial D \times I) \cup (\bigcup_i \partial D_i \times I) = \mathscr{D} \cup (\partial\mathscr{D} \times I)$ осталось гомеоморфно $\mathscr{D}$. Продолжим используемое подразделение $\mathscr{D}$ до триангуляции всего $\mathscr{D}'$. Для

этого, считая вершины этого подразделения упорядоченными, рассмотрим триангуляцию призмы $\partial\mathscr{D}\times I$, определенную стандартными триангуляциями всех призм вида $\triangle'\times I$, где $\triangle'\subset\partial\mathscr{D}$ – симплексы используемого подразделения.

Отображение F определим как отображение $\mathscr{D}'$ в $\mathscr{D}'$. Подмножество $\mathscr{D}\subset\mathscr{D}'$ будет отображаться в $\mathscr{D}$ посредством отображения F_2. Внешнее основание $\partial\mathscr{D}\times 1$ отобразим в $\partial\mathscr{D}'$ посредством отображения F_1. На остальной части F определяется линейными продолжениями на симплексы призмы $\partial\mathscr{D}\times I$ отображений их вершин, расположенных на основаниях. Такое продолжение возможно, так как если $\triangle'$ – симплекс используемого подразделения $\partial\mathscr{D}$, а $\triangle$ – содержащий $\triangle'$ симплекс первоначальной триангуляции $\partial\mathscr{D}$, то $F_2(\triangle')\subset F_1(\triangle)$ и $\triangle'\times I\subset\triangle\times I$. Заметим, что для конечнократных симплициальных f, f_i (поскольку они остаются симплициальными при переходе к подразделениям исходной триангуляции) построенное отображение F оказывается симплициальным.

Считая, что $\mathscr{D}'\subset\mathbb{R}^3$, приводя малым сдвигом образы вершин из $\mathscr{D}\subset\mathscr{D}'$ в общее положение, для конечнократных симплициальных f, f_i можно добиться невырожденности линейных отображений симплексов, т.е. конечной кратности отображения F.

Введем следующие множества: $E_i^l=\partial B_i^l\cap M$, $F_i^k=\partial C_i^k\cap M$, $G_i^n=\partial T_i^n\cap M$. Пусть D объединение всех таких множеств по всем i, l, n, k.

Заметим, что E_i^l и F_i^k являются трехмерными дисками с несколькими вырезанными трехмерными поддисками, а $G_i^n\simeq S^2\times I$.

Пусть p – целое положительное число. На множествах G_i^n зададим послойные, в согласии с гомеоморфизмами $G_i^n\simeq S^2\times I$, конечнократные кусочно-линейные отображения в себя степени p. Продолжим их в соответствии с леммой до кусочно-линейных конечнократных отображений $E_i^l\to E_i^l$ и $F_i^k\to F_i^k$. Получится отображение $\varphi\colon D\to D$. Результат факторизации M по разбиению на слои φ и одноточечные множества обозначим через $\widetilde{M}_p$. Через π обозначим проекцию $M\to\widetilde{M}_p$.

Пространство M, очевидно, трехмерно. Действительно, легко видеть, что $\pi(D)\simeq D$. Кроме того, так как образы D и $M\setminus D$ не пересекаются, $\pi|_{M\setminus D}$ – гомеоморфизм. Тогда по известной оценке для размерности объединения двух пространств пространство $\widetilde{M}_p=\pi(D)\cup\pi(M\setminus D)$ конечномерно.

Обозначим через $n(l)$ такое число, что трубка $T_i^{n(l)}$ приходит в кубик B_i^l.

Для $x\in M\setminus(D\cup\partial I_0^4)$, имеющей r двоично-рациональных координат, пусть $j_1,\dots,j_{2^r}$ – номера содержащих ее кубов $I_{i,j}^4$ достаточно большой очереди i и $V_i=[(\bigcup_{s=1,\dots,2^r}I_{i,j_s}^4)\setminus L]$, где L – объединение всех T_i^n, для которых $n\neq n(j_s)$, и всех C_i^k.

Для $x\in M\cap(D\cup\partial I_0^4)$ пусть $j_1,\dots,j_N$ – номера j, содержащих x кубов $I_{i,j}^4$ достаточно высокой очереди i, для которых $\operatorname{Int}I_{i,j}^4\cap M\neq\varnothing$. Точное значение числа N несущественно; существенно, что оно не зависит от i.

Для всех таких точек x пусть $V_i'=[(\bigcup_{s=1,\dots,N}I_{i,j_s}^4)\setminus L]$, где L, как и выше, объединение всех T_i^n, для которых $n\neq n(j_s)$, и всех C_k^i.

Заметим, что так как все трубки T_i^n идут по ребрам, то множества V_i и V_i' гомеоморфны I^4. Эти множества будут использоваться при оценке локальных гомологий компактов $\widetilde{M}_p$.

2.2. Локальные гомологии $\widetilde{M}_p$. Точки компакта $\widetilde{M}_p$ разделим на следующие четыре типа:

1) $x \in \widetilde{M_p} \setminus (\pi(D) \cup \pi(\partial I_0^4 \cap M))$ и все координаты $\pi^{-1}(x)$ не двоично рациональные;
2) $x \in \widetilde{M_p} \setminus (\pi(D) \cup \pi(\partial I_0^4 \cap M))$ и точка $\pi^{-1}(x)$ имеет r двоично рациональных координат;
3) $x \in \pi(D \setminus \partial I_0^4)$;
4) $x \in \pi(M \cap \partial I_0^4)$.

Во всех случаях будет показано, что $H_n^x = 0$ при $n > 3$, и что H_n^x конечно порождены при $n \leqslant 3$. В некоторых случаях будет указан конкретный вид H_n^x для $n \leqslant 3$.

Тип 1. Пусть $x \in \widetilde{M_p} \setminus (\pi(D) \cup \pi(\partial I_0^4 \cap M))$ и все координаты $\pi^{-1}(x)$ не двоично рациональные. В этом случае мы покажем, что $H_3^x = \mathbb{Z}_p$ и $H_n^x = 0$ при $n \neq 3$. Конфинальную часть в системе окрестностей составляют окрестности вида $\pi(U_i)$, где U_i строятся следующим образом. Выбираем множество $I_{i,l}^4$, содержащее $\pi^{-1}(x)$, и U_i определяем как $U_i = M \cap \operatorname{Int} V_i$, где $V_i = [I_{i,l}^4 \setminus ((\bigcup_{n \neq n(l)} T_i^n) \cup (\bigcup_k C_i^k)]$ (ср. конец предыдущего пункта, случай $r = 0$). Вследствие того, что $\pi^{-1}\pi(U_i) = U_i$ и U_i открыто в M, $\pi(U_i)$ открыто в $\widetilde{M_p}$.

Ниже будет доказано, что при таком выборе системы окрестностей мы получаем спектр $\{H_n(\widetilde{M_p}, \widetilde{M_p} \setminus \pi(U_i))\}$, в котором все проекции являются изоморфизмами, а сами группы $H_n(\widetilde{M_p}, \widetilde{M_p} \setminus \pi(U_i)) = H_n(\pi(U_i))$ легко вычисляются.

Для начала докажем, что $H_3(\pi(U_i)) = \mathbb{Z}_p$ и $H_r(\pi(U_i)) = 0$ при $r \neq 3$.

Фиксируем некоторый индекс i. На множестве $[U_i] = M \cap V_i$ зададим разбиение. Оно будет задаваться действием φ', которое определяется как ограничение действия φ на объединение множеств $D \cap U_i$ и $[T_i^{n(l)} \cap \operatorname{Int} I_{i,l}^4] \cap \partial U_i$, т.е. на то множество, где ограничение φ может быть определено.

Результат факторизации $[U_i]$ по разбиению, задаваемому этим действием, обозначим как $\widetilde{M_p}'$. Проекцию на $\widetilde{M_p}'$ обозначим через π'. Очевидно, $\pi'(U_i) \simeq \pi(U_i) \subset \widetilde{M_p}$, хотя $\widetilde{M_p}' \nsubseteq \widetilde{M_p}$. Обозначим как $\partial M_p'$ множество $\pi'(\partial U_i) \subset \widetilde{M_p}'$. Множество ∂U_i есть трехмерная сфера с выброшенным трехмерным диском, π' есть факторизация по некоторому отображению в себя степени p граничной сферы удаляемого диска. Таким образом, $H_r(\partial \widetilde{M_p}') = 0$ при $r \neq 2$ и $H_2(\partial \widetilde{M_p}') = \mathbb{Z}_p$ (при $r = 0$ гомологии компактных множеств приведенные).

Для окончательного вычисления $H_r(\pi(U_i))$ достаточно доказать ацикличность $\widetilde{M_p}'$.

Несложно заметить, что так как $V_i \simeq I^4$, то пространство $\widetilde{M_p}'$ (как и само $\widetilde{M_p}$) будет вариантом общей конструкции пространств M_p Дранишникова [3], [4]. Следовательно, $\widetilde{M_p}'$ является AR (лемма 7 в [4]).

Однако для вычисления гомоморфизмов в спектре будет использоваться конструкция, подтверждающая ацикличность $\widetilde{M_p}'$ непосредственно. Для этого вследствие формулы универсальных коэффициентов достаточно доказать, что когомологии $\widetilde{M_p}'$ нулевые. Для этого же вследствие непрерывности когомологий достаточно представить $\widetilde{M_p}'$ обратным пределом ацикличных компактов.

Воспользуемся конструкцией Дранишникова [3], [4].

При фиксированном i определим пространства W_m как факторпространства пространств $M_{m+i} \cap V_i$ по разбиениям на следующие подмножества:

1) четырехмерные кубы B_j^l, C_j^k очереди большей, чем $i + m$;

2) трехмерные диски из представлений трубок очереди большей, чем $i+m$, в виде $D^3 \times I$, не лежащие на концах;
3) трехмерные диски, являющиеся пересечением трубок очереди $i+m+1$ и кубов очереди $i+m$;
4) одноточечные множества.

Везде берутся лишь кубики и трубки, содержащиеся в V_i.

Проекция $M_{m+i} \cap V_i \to W_m$ является почти гомеоморфизмом в смысле [4], поэтому $W_m \simeq M_{m+i} \cap V_i \simeq I^4$ (лемма 3 в [4]).

Можно определять пространства W_m и как факторы $M \cap V_i = [U_i]$ по разбиениям на:

1) пересечения с множеством M границ кубов B_j^l, C_j^k очереди большей, чем $i+m$;
2) двумерные сферы из представлений $M \cap \partial T_j^n \simeq S^2 \times I$, где $j > i+m$, не лежащие в границах концевых кубов;
3) двумерные сферы, являющиеся пересечениями $M \cap \partial T_{i+m+1}^n$ и кубов порядка $i+m$;
4) одноточечные множества.

Берутся лишь кубики и трубки, содержащиеся в V_i.

Пусть c_m есть проекция $[U_i] \to W_m$. Легко видеть, что c_{m+1} делится на c_m: существует отображение $c_m^{m+1}\colon W_{m+1} \to W_m$ такое, что $c_m = c_m^{m+1} \circ c_{m+1}$. Легко заметить, что $[U_i] = \varprojlim(W_m, c_m^{m+1})$.

Для каждого i разбиение $[U_i]$, возникавшее при переходе от $[U_i]$ к $\widetilde{M_p}'$, индуцирует некоторое разбиение W_m. Фактор по нему обозначим как X_m, а проекцию $W_m \to X_m$ – как g_m.

Легко видеть, что существует отображение $f_m\colon \widetilde{M_p}' \to X_m$, делающее коммутативной диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} [U_i] & \xrightarrow{\pi'} & \widetilde{M_p}' \\ {\scriptstyle c_m}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_m} \\ W_m & \xrightarrow{g_m} & X_m \end{array}.$$

Так же, как и для отображений c_m, очевидно наличие отображений $f_m^{m+1}\colon X_{m+1} \to X_m$, для которых $f_m = f_m^{m+1} f_{m+1}$. При этом $f_m^{m+1} g_{m+1} = g_m c_m^{m+1}$ и $\widetilde{M_p}' = \varprojlim(X_m, f_m^{m+1})$.

Компакты X_m суть AR. В самом деле, разбиение W_m, факторизация по которому оказывается отображением $g_m\colon W_m \to X_m$, сосредоточено на гомеоморфном трехмерному шару множестве $A_m = c_m([\partial M_{i+m} \cap U_i])$, $A_m \subset W_m$. По тем же причинам, по которым $\pi(D) \simeq D$, имеем $g_m(A_m) \simeq A_m$. Так как $W_m \simeq I^4$, то X_m является AR в силу теоремы 9.1 и замечания 9.17 в главе 5 в [18].

Таким образом, группы $H_n(\pi(U_i))$ вычислены.

Наконец, докажем, что отображение $H_n^c(\widetilde{M_p}, \widetilde{M_p} \setminus \pi(U_i)) \to H_n^c(\widetilde{M_p}, \widetilde{M_p} \setminus \pi(U_{i+1}))$ есть изоморфизм для всех n.

В соответствии с определенным выше пространством $\widetilde{M_p}'$ и проекцией π' это отображение совпадает с гомоморфизмом $H_n(\widetilde{M_p}', \partial\widetilde{M_p}') \to H_n(\widetilde{M_p}', \widetilde{M_p}' \setminus \pi'(U_{i+1}))$. В силу точной последовательности тройки $(\widetilde{M_p}', \widetilde{M_p}' \setminus \pi'(U_{i+1}), \partial\widetilde{M_p}')$ для достижения цели достаточно доказать ацикличность пары $(\widetilde{M_p}' \setminus \pi'(U_{i+1}), \partial\widetilde{M_p}')$. При этом в

силу формул универсальных коэффициентов достаточно установить ацикличность по отношению к когомологиям H_c^*. Для этого в силу точной последовательности когомологий пары достаточно показать, что включение $\partial\widetilde{M_p}' \subset \widetilde{M_p}' \setminus \pi'(U_{i+1})$ индуцирует изоморфизм когомологий.

Опять воспользуемся конструкцией Дранишникова. Вспомним, что мы представили пространства $[U_i]$ и $\widetilde{M_p}'$ обратными пределами. Очевидно имеем

$$\widetilde{M_p}' \setminus \pi'(U_{i+1}) = \varprojlim(X_m \setminus f_m(\pi'(U_{i+1})), f_m^{m+1}).$$

Включения $\psi_m\colon f_m(\partial\widetilde{M_p}') \subset X_m \setminus f_m(\pi'(U_{i+1}))$ в пределе дают включение $\psi\colon \partial\widetilde{M_p}' \hookrightarrow \widetilde{M_p}' \setminus \pi'(U_{i+1})$. Поэтому достаточно доказать, что индуцированные гомоморфизмы $\psi_m^*\colon H_c^n(X_m \setminus f_m(\pi'(U_{i+1}))) \to H_c^n(f_m(\partial\widetilde{M_p}'))$ – изоморфизмы. Это следует из следующей леммы.

Лемма 2. *$f_m(\partial\widetilde{M_p}')$ – деформационный ретракт $X_m \setminus f_m(\pi'(U_{i+1}))$, причем ретракция – собственное отображение.*

Доказательство. Вследствие вышеописанной коммутативной диаграммы пространства $X_m \setminus f_m(\pi'(U_{i+1}))$ и $X_m \setminus g_m c_m(U_{i+1})$, $f_m(\partial\widetilde{M_p}')$ и $g_m c_m(\partial U_i)$ совпадают.

Рассмотрим сначала $X_m \setminus g_m c_m(U_{i+1})$. Это есть факторпространство пространства $W_m \setminus c_m(U_{i+1})$. Последнее строится так. Начнем с пространства $M_{m+i} \cap V_i$, которое можно представлять себе как гомеоморфное кубу множество V_i с удаленной внутренностью объединения трубок и кубиков очереди, меньшей, чем $i+m$, т.е. множеством $\operatorname{Int}(\bigcup_{j<i+m} B_j)$, где B_j – объединение всех B_j^l, C_j^k, T_j^n, содержащихся в V_i.

Продолжим разбиение $M_{m+i} \cap V_i$, дававшее W_m, на V_i тривиально, и факторизацию по нему обозначим как c_m (мы можем это сделать, так как ограничение этого отображения на $[U_i]$ совпадет с прежним определением c_m). При факторизации пространство $M_{m+i} \cap V_i$ перейдет в W_m, которое теперь можно мыслить как четырехмерный куб $c_m(V_i)$ ($c_m(V_i)$ есть куб, потому что c_m – почти гомеоморфизм) с удаленным образом внутренности объединения трубок и кубиков очереди $j < i+m$, т.е. множеством $c_m(\operatorname{Int}\bigcup_{j<i+m} B_j)$.

Множество $c_m(U_{i+1})$ есть открытый четырехмерный куб, содержащийся во внутренности $c_m(V_i)$ (это так, потому что $c_m = c_m^{m+1} \circ c_{m+1}$ и c_m^{m+1} – почти гомеоморфизм).

Очевидно, что для получения $W_m \setminus c_m(U_{i+1})$ удалением из куба $c_m(V_i)$ образа внутренности объединения кубиков и трубок нужно учитывать лишь кубики и трубки, содержащиеся в $[V_i \setminus V_{i+1}]$. Обозначим через T_1 их объединение, т.е. $V_i \cap (\bigcup_{j<i+m} B_j)$, а через T_2 – множество $\partial T_1 \cap M$. Из определения разбиений, дающих отображения c_m, видно, что $c_m(T_1) \simeq T_1$, $c_m(T_2) \simeq T_2$. При этом $c_m(T_1)$ гомеоморфно трубке $D^3 \times I$, которая соединяет границы большого и малого кубов $c_m(\partial V_i)$ и $c_m(\partial V_{i+1})$, а $c_m(T_2)$ есть часть этой трубки, соответствующая $S^2 \times I$. Однако эта трубка имеет, конечно, тупиковые боковые ответвления, которые, возможно, даже касаются малого куба.

Очевидно, $T_2 \subset D$. Так как $\pi'(D) \simeq D$, в силу коммутативной диаграммы и того, что $f_m(\pi'(T_2)) \simeq \pi'(T_2)$, заключаем, что образ $c_m(T_2)$ при проектировании g_m гомеоморфен ему же. Следовательно, $g_m c_m(T_2)$ гомеоморфно $S^2 \times I$.

Пересечение $g_m c_m(T_2)$ и $g_m c_m(\partial U_i)$ есть $S^2 \times 0$ в представлении $g_m c_m(T_2) \simeq S^2 \times I$. Поэтому $g_m c_m(T_2) \cap g_m c_m(\partial U_i)$ является деформационным ретрактом всего $g_m c_m(T_2)$. Эту ретракцию обозначим как r_1.

Покажем, что пространство $c_m(\partial U_i) \cup c_m(T_2)$ – деформационный ретракт $W_m \setminus c_m(U_{i+1})$.

Для этого сначала убедимся, что пространство $X = W_m \setminus c_m(U_{i+1})$ является AR. Действительно, X является ретрактом некоторого содержащего его подпространства $Y \subset W_m$, гомеоморфного I^4 (получаемого отодвиганием от границы $c_m(U_{i+1})$ тупиковых частей трубки $c_m(T_2)$ в местах их соприкосновений). Поэтому при любом вложении $X \subset X'$ отображение включения $X \subset Y$ продолжается до отображения $X' \subset Y$, обеспечивающего наличие ретракции $X' \to X$.

Пространство $c_m(\partial U_i) \cup c_m(T_2)$ представляет собой следующее. Множество $c_m(\partial U_i)$ есть множество $c_m(\partial V_i)$, гомеоморфное S^3, из которого удалена внутренность множества $c_m(\partial V_i \cap M) = c_m(\partial V_i \cap T_1)$, гомеоморфна $\operatorname{Int} D^3$. Множество же $c_m(T_2)$ представляет из себя трубку $S^2 \times I$, подклеенную к граничной сфере гомеоморфного диску множества $c_m(\partial U_i)$. В результате склейки получается опять пространство, гомеоморфное D^3, и следовательно, являющееся AR. Обозначим его как A.

Пространство $A \times I \cup X \times 0 \cup X \times 1 = B$ будет AR как объединение AR-пространств, пересекающихся по AR-подпространствам. Поэтому существует деформационная ретракция X на A (тождественное отображение $X \times 0 \to X$ и ретракция $X \times 1 \to A$ гомотопны вследствие наличия ретракции $X \times I \to B$).

Так как факторизация g_m идет по некоторому разбиению, сосредоточенному на $c_m(T_2)$ и тривиальному вне $c_m(T_2)$, ретракция $W_m \setminus c_m(U_{i+1}) \to c_m(\partial U_i) \cup c_m(T_2)$ индуцирует деформационную ретракцию и после перехода к факторпространству. Таким образом, мы имеем ретракцию $X_m \setminus g_m c_m(U_{i+1})$ на $g_m c_m(\partial U_i) \cup g_m c_m(T_2)$, которую обозначим как r_2.

Рассмотрим их композицию $r = r_1 \circ r_2$. Она будет ретракцией $X_m \setminus g_m c_m(U_{i+1})$ на $g_m c_m(\partial U_i)$, а по сделанному в начале замечанию это даст искомую деформационную ретракцию $X_m \setminus f_m(\pi'(U_{i+1}))$ на $f_m(\partial \widetilde{M_p}')$.

Тип 2. Пусть $x \in \widetilde{M_p} \setminus (\pi(D) \cup \pi(\partial I_0^4 \cap M))$ и точка $\pi^{-1}(x)$ имеет r двоично рациональных координат. Тогда конфинальную часть в системе окрестностей составляют окрестности вида $\pi(U_i)$. Здесь i достаточно большое, $U_i = M \cap \operatorname{Int} V_i$, а V_i – множества, определенные в конце п. 2.1. Вследствие того, что $\pi^{-1}\pi(U_i) = U_i$ и U_i открыто в M, $\pi(U_i)$ открыто в $\widetilde{M_p}$.

Совершенно аналогично предыдущему случаю для каждого достаточно большого индекса i определяется проекция π' и через представления обратным пределом доказывается ацикличность $\pi'([U_i])$. При этом $\pi'(\partial U_i)$ является следующим пространством: из сферы S^3 удалено 2^r трехмерных открытых дисков и их границы профакторизованы по их отображениям в себя степени p. Так как $\pi(U_i) = \pi'(U_i)$, отсюда имеем $H_r(\pi(U_i)) = 0$ при $r \neq 3$ и $H_3(\pi(U_i)) = \mathbb{Z}_p \oplus F$, где F – свободная группа ранга $2^r - 1$.

Постоянство спектра для окрестностей $\pi(U_i)$ доказывается по той же схеме. Отличие заключается лишь в доказательстве леммы 2. Действуем сначала как и в предыдущем пункте. Продолжаем разбиение, дающее W_m, с $M_{m+i} \cap V_i$ на все V_i тривиально, факторизацию обозначаем как c_m. Тогда, как и в предыдущем пункте, пространство $W_m \setminus c_m(U_{i+1})$ имеет следующее описание. Объемлющее про-

странство W_m представляет из себя четырехмерный куб с удаленным образом внутренности объединения трубок и кубиков очереди, меньшей $i+m$, т.е. множеством $c_m(\operatorname{Int}\bigcup_{j<i+m} B_j)$. Заметим, что в этой интерпретации W_m можно учитывать лишь те составляющие B_j кубики и трубки, что содержатся в $[V_i \setminus V_{i+1}]$. Пространство же $W_m \setminus c_m(U_{i+1})$ есть дополнение к открытому четырехмерному кубу $c_m(U_{i+1})$, содержащемуся во внутренности W_m.

Отличие состоит в том, что в этом случае множество T_1 будет гомеоморфно не одной, а 2^r трубкам, соединяющим границы большого куба $c_m(\partial V_i)$ и малого куба $c_m(\partial V_{i+1})$. Ясно, что ретракция r_1 строится аналогично. Ретракцию же r_2 можно построить, например, так. Заметим, что пространство $W_m \setminus c_m(U_{i+1})$ является склейкой пространств $W_m^t \setminus c_m(U_{i+1}^t)$, $t=1,\dots,2^r$, каждое из которых представляет из себя куб с удаленным открытым кубом, лежащим на гранях большого куба, и удаленной соединяющей их границы единственной трубкой. Тогда в каждом таком пространстве, аналогично тому как это было описано в предыдущем пункте, строится ретракция r_2^t. Взяв объединение этих ретракций, получим ретракцию r_2' пространства $W_m \setminus c_m(U_{i+1})$ на объединение границ трубок и объединение всех склеиваемых граней за вычетом их пересечения с $c_m(U_{i+1})$. Для получения r_2 надо после взятия r_2' ретрагировать объединение оставшихся частей граней $W_m^t \setminus c_m(U_{i+1}^t)$ на $c_m(\partial U_i)$.

Композиция $r = r_1 \circ r_2$ будет искомой деформационной ретракцией.

Тип 3. $x \in \pi(D \setminus \partial I_0^4)$. Конфинальную часть окрестностей точки x составляют множества $\operatorname{Int}\pi(U_i)$, где множества U_i определяются следующим образом. Берем все q прообразов x – точки y_t, $t=1,\dots,q$. Обозначим через r_t количество двоично-рациональных координат у y_t. У каждого прообраза y_t берутся содержащие его двоичные кубики $I^4_{i,j_1(t)},\dots,I^4_{i,j_N(t)}$ достаточно высокой очереди i, покрывающие прообраз, для которых $\operatorname{Int} I^4_{i,j_s(t)} \cap M \neq \varnothing$, $N(t) = 2^{r_t-1}$ или большее число, если y_t лежит на двумерном или одномерном остове множества D (ср. с определением V_i' в конце п. 2.1). Для больших i числа $N(t)$ от i не зависят.

Для фиксированного такого i определим V_i^t равенством

$$V_i^t = \left[\left(\bigcup_{j=j_1(t),\dots,j_N(t)} I^4_{i,j}\right) \setminus L\right] \simeq I^4,$$

где L – объединение внутренностей всех T_i^n, для которых $n \neq n(j_s(t))$, и всех C_i^k. Пусть $U_i^t = M \cap (\operatorname{Int} V_i^t \cup (\partial V_i^t \cap \partial M_i))$, $V_i = \bigcup_{t=1,\dots,q} V_i^t$, $U_i = M \cap (\operatorname{Int} V_i \cup (\partial V_i \cap \partial M_i))$. Мы берем именно $\operatorname{Int}\pi(U_i)$, а не $\pi(U_i)$, чтобы избавиться от невнутренних точек на $\pi(U_i \cap \partial M_i)$. Заметим, что $\operatorname{Int}\pi(U_i) = \operatorname{Int}\pi([U_i])$. Далее для удобства обозначения мы будем использовать $\operatorname{Int}\pi([U_i])$.

Аналогично предыдущим частям на $[U_i]$ определяется разбиение π' так, что $\pi'(U_i) \simeq \pi(U_i)$. Тогда можно положить по определению $\operatorname{Int}\pi'([U_i]) \simeq \operatorname{Int}\pi([U_i]) = \operatorname{Int}\pi(U_i)$ и $\partial\pi'([U_i]) = \pi'([U_i]) \setminus \operatorname{Int}\pi(U_i)$ (пространство $\pi'([U_i])$ играет туже роль, что $\widetilde{M_p}'$ в типе 1).

Ацикличность $\pi'([U_i])$ доказывается аналогично. Вначале определяем пространства W_m и X_m так, что $[U_i] = \varprojlim(W_m, c_m^{m+1})$ и $\pi'([U_i]) = \varprojlim(X_m, f_m^{m+1})$. После этого показываем, что X_m являются AR. Для этого вспоминаем, что X_m являются факторпространствами пространств W_m. Последние представляют из себя дизъюнктные объединения q множеств $c_m([U_i^t])$, гомеоморфных I^4. Компоненты $c_m([U_i^t])$ будем обозначать как W_m^t.

Очевидно, имеем $g_m(W_m) = \bigcup_{t=1}^{q} g_m(W_m^t)$. Ниже будет доказано, что каждое множество $g_m(W_m^t)$ является AR. После этого будет показано, что $g_m(W_m^l) \cap (\bigcup_{t=1}^{l-1} g_m(W_m^t))$ есть AR. Тогда, последовательно применяя теорему об объединении двух AR, получим, что $\bigcup_{t=1}^{q} g_m(W_m^t)$ есть AR. Заметим, что множества $g_m(W_m^t)$ и $g_m(W_m^l)$ пересекаются только по образам граней, содержащих $c_m(y_t)$ и $c_m(y_l)$, т.е. по подмножествам $g_m(W_m^t \cap c_m(\partial M_i))$ и $g_m(W_m^l \cap c_m(\partial M_i))$.

Приступим к доказательствам. Пространство $g_m(W_m^t)$ получается из W_m^t двумя последовательными факторизациями. Во-первых, факторизацией на границах примыкающих к W_m^t трубок и кубиков, внутренности которых удалены при получении W_m^t; см. предыдущую часть. Ее результат есть AR. А во-вторых, факторизацией на трехмерной грани $W_m^t \cap c_m(\partial M_i)$, содержащей $c_m(y_t)$. Если окажется, что результат факторизации этой грани есть AR, то по теореме 9.1 и замечанию 9.17 в главе 5 в [18] $g_m(W_m^t)$ будет AR.

Теперь посмотрим, что происходит на грани, содержащей $c_m(y_t)$, т.е. найдем множество $g_m(W_m^t \cap c_m(\partial M_i))$. Напомним, что $W_m^t \cap c_m(\partial M_i) \subset c_m(D)$, и, так как $\pi\mid_D = \varphi$ кусочно линейно, то и ограничение g_m на множество $W_m^t \cap c_m(\partial M_i)$ кусочно линейно.

Заметим, что для больших i пересечение W_m^t и $c_m(\partial M_i)$ можно считать многогранником, причем таким, что каждый луч, исходящий из $c_m(y_t)$, пересекает $W_m^t \cap c_m(\partial M_i)$ по отрезку. В силу кусочной линейности φ этим свойством будет обладать и $g_m(W_m^t \cap c_m(\partial M_i))$, а следовательно, и множества вида $g_m(W_m^l \cap c_m(\partial M_i)) \cap (\bigcup_{t=1}^{l-1} g_m(W_m^t \cap c_m(\partial M_i)))$.

Многоугольник же, являющийся конусом над границей относительно своей внутренней точки, гомеоморфен кубу. Следовательно, рассматриваемые множества суть AR. В частности, $g_m(W_m^t \cap c_m(\partial M_i))$ есть AR. Отсюда следует, как указано выше, что $g_m(W_m^t)$ есть AR, а вместе с этим, и $X_m = g_m(W_m) = \bigcup_{t=1}^{q} g_m(W_m^t)$ есть AR. Таким образом, получаем, что $\pi'([U_i])$ ациклично как обратный предел пространств X_m.

Дадим описание определенного выше множества $\partial\pi'([U_i]) = \pi'([U_i]) \setminus \operatorname{Int}\pi(U_i)$. Для этого отдельно опишем множества $[\partial\pi'([U_i^t]) \setminus \pi'(\partial M_i)]$ и множество $\partial\pi'([U_i]) \cap \pi'(\partial M_i)$, из которых складывается $\partial\pi'([U_i])$.

Множества $[\partial\pi'([U_i^t]) \setminus \pi'(\partial M_i)]$ гомеоморфны следующему пространству. Из трехмерного диска вырезано $N(t)$ открытых поддисков и границы этих поддисков профакторизованы по конечнократным отображениям в себя степени p. После этого внешняя граничная сфера профакторизована по некоторому (определяемому ограничением φ) отображению в сферу степени, зависящей от t, но не зависящей от индекса i.

Теперь рассмотрим множество $\partial\pi'([U_i]) \cap \pi'(\partial M_i)$. Аналогичными вышеописанным рассуждениями мы получаем, что эти множества являются конусами над своими границами относительно своей внутренней точки x. Множество $\pi'([U_i]) \cap \pi'(\partial M_i) = \pi'([U_i] \cap \partial M_i)$ есть $\bigcup_{i=1}^{q} \pi'([U_i^t] \cap \partial M_i)$, а $(\operatorname{Int}\pi(U_i)) \cap \pi'(\partial M_i)$ есть $\operatorname{Int}(\bigcap_{t=1}^{q} \pi'([U_i^t] \cap \partial M_i))$. Они, очевидно, тоже будут конусами над границей относительно своей внутренней точки x. Поэтому их объединение будет представлять из себя трехмерный диск и вложенный в него открытый поддиск. Множество же $\partial\pi'([U_i]) \cap \pi'(\partial M_i)$ есть их разность, т.е. разность двух вложенных шаров.

Таким образом, существует гомотопическая эквивалентность пространства $\partial\pi'([U_i])$, стягивающая $\partial\pi'([U_i]) \cap \pi'(\partial M_i)$ на внешнюю граничную сферу. Это бу-

дет гомотопическая эквивалентность $\partial\pi'([U_i])$ и пространства, являющегося склейкой множеств $[\partial\pi'([U_i^t]) \setminus \pi'(\partial M_i)]$ – склейкой по некоторым отображениям внешних граничных сфер q трехмерных дисков с удаленными в каждом из них $N(t)$ поддисками и профакторизованными со степенью p границами этих $N(t)$ удаляемых поддисков. При этом степени склеивающих отображений внешних сфер не зависят от i. Гомологии такого пространства конечно порождены и не зависят от i.

В итоге получаем, что $H_r(\operatorname{Int}\pi([U_i])) = H_r(\operatorname{Int}\pi'([U_i])) = H_{r-1}(\partial\pi'([U_i]))$ – не зависящая от i конечнопорожденная группа, равна нулю при $r > 3$.

Постоянство спектра из групп $H_r(\operatorname{Int}\pi(U_i))$ доказывается по той же схеме при помощи леммы 2. Однако ее формулировка несколько изменяется: роль $\partial\widetilde{M'_p}$ играет $\partial\pi'([U_i])$, а роль $f_m(\pi'(U_{i+1})) = f_m(\pi(U_{i+1}))$ – множество $f_m(\operatorname{Int}\pi'(U_{i+1})) = f_m(\operatorname{Int}\pi(U_{i+1}))$.

Несколько изменяется и доказательство. Опять разбиение, дававшее W_m, продолжаем с $M_{m+i} \cap V_i$ на все V_i тривиально и факторизацию обозначаем как c_m. Вместо $W_m \setminus c_m(U_{i+1})$ нам необходимо теперь рассмотреть пространство

$$W_m \setminus g_m^{-1}(f_m(\operatorname{Int}(\pi'(U_{i+1}))))$$

(см. диаграмму выше). Оно отличается от пространства $W_m \setminus c_m(U_{i+1})$ следующим. W_m представляет из себя объединение q множеств $c_m(V_i^t)$, гомеоморфных четырехмерным кубам, с удаленными внутренностями трубок в $c_m(V_i \setminus M_{m+i})$, гомеоморфных $D^3 \times I$. Эти трубки идут от внешней границы этих четырехмерных кубов $c_m(V_i^t)$ и оканчиваются тупиками во внутренности. Множество $c_m(U_{i+1}^t)$ есть открытый куб, лежащий на грани куба $c_m(V_i^t)$ вместе со своей гранью, примыкающей к грани $c_m(V_i^t)$. Трубка соединяет границу $c_m(U_{i+1}^t)$ с границей $c_m(V_i^t)$. Как и все W_m, содержащееся в нем множество $c_m(U_{i+1})$ есть дизъюнктное объединение $c_m(U_{i+1}^t)$. Множество же $g_m^{-1}(f_m(\operatorname{Int}(\pi'([U_{i+1}]))))$ соответственно есть дизъюнктное объединение q подмножеств, отличающихся от $c_m(U_{i+1}^t)$ тем, что каждое из них есть тот же открытый куб, но с добавлением не всей грани, примыкающей к грани куба $c_m(V_i^t)$, а только лишь какого-то открытого трехмерного диска, лежащего на этой грани.

Обозначим как T объединение границ указанных выше трубок. Дизъюнктные компоненты пространства $W_m \setminus g_m^{-1}(f_m(\operatorname{Int}(\pi'([U_{i+1}]))))$ обозначим как Z^t, $t = 1, \dots, q$. Соответствующие компоненты множества T будем обозначать как T^t. Определим формально границу у множеств U_i^t и Z^t. Для начала положим по определению $\partial U_i^t = \partial_M U_i^t \cup ([U_i^t] \cap \partial M_i)$. Теперь определим ∂Z^t равенством $\partial Z^t = (c_m(\partial U_i^t) \cup c_m(\partial U_{i+1}^t)) \setminus g_m^{-1} f_m \operatorname{Int}\pi'([U_{i+1}])$.

Отображение g_m есть определяемая отображением π' факторизация. Она есть композиция факторизации, подобной описанной для типов 1 и 2 в каждом множестве W_m^t, и склейки по отображениям граней, содержащих точки $c_m(y_t)$. Заметим, что, как и в предыдущих частях, из того, что $\pi(D) \simeq D$, следует, что $g_m(T) \simeq T$. Поэтому, как раньше, будем говорить о множестве $g_m(T)$ как об объединении границ трубок.

Так же, как в лемме 2, ретракция $X_m \setminus f_m(\operatorname{Int}\pi'([U_{i+1}]))$ на $f_m(\partial\pi'[U_i])$ оказывается композицией $r_1 r_2$. Ретракция r_1, стягивающая гомеоморфные $S^2 \times I$ границы трубок, составляющих $g_m(T)$, на свои основания, лежащие на $f_m(\partial\pi'([U_i]))$, строится аналогично, отдельно на каждом g_m-образе Z^t как в лемме 2. Ретракцию же r_2, которая должна деформировать $X_m \setminus f_m(\operatorname{Int}\pi'([U_{i+1}]))$ на $g_m(T) \cup \partial f_m \pi'([U_i])$,

построим как композицию двух: $r_2 = r_2'' r_2'$. Первая ретракция r_2' будет действовать отдельно в каждом множестве $g_m(Z^t)$. Строится там она как ретракция r_2 в предыдущей части (вспомним, что Z^t есть множество типа $W_m \setminus c_m(U_{i+1})$ из предыдущей части). Каждое множество $g_m(Z^t)$ она будет ретрагировать на множество $g_m(T^t) \cup g_m(\partial Z^t \cap c_m(\partial U_i^t))$. На склеиваемой по индуцированному φ отображению грани ретракция тождественна, поэтому склейка не помешает ее построению в целом.

Эта ретракция будет деформировать $g_m(\bigcup_t Z^t) = X_m \setminus f_m(\operatorname{Int}\pi'([U_{i+1}]))$ на $g_m(T) \cup \{\bigcup_{t=1}^q g_m(\partial Z^t \cap c_m(\partial U_i^t))\}$.

Для построения r_2'' проведем детальное описание множества

$$\bigcup_{t=1}^q g_m(\partial Z^t \cap c_m(\partial U_i^t)).$$

Вспомним, что $\partial Z^t = (c_m(\partial U_i^t) \cup c_m(\partial U_{i+1}^t)) \setminus g_m^{-1} f_m \operatorname{Int}\pi'([U_{i+1}])$ и поэтому $\partial Z^t \cap c_m(\partial U_i^t) = c_m(\partial U_i^t) \setminus g_m^{-1} f_m \operatorname{Int}\pi'([U_{i+1}])$. Применим к этой разности отображение g_m. Так как всегда $g(A \setminus g^{-1}(B)) = g(A) \setminus B$, получим $g_m(\partial Z^t \cap c_m(\partial U_i^t)) = g_m(c_m(\partial U_i^t)) \setminus f_m \operatorname{Int}\pi'([U_{i+1}]) = f_m(\pi'(\partial U_i^t)) \setminus f_m \operatorname{Int}\pi'([U_{i+1}])$.

Далее заметим, что $\cup_t \pi'(\operatorname{Int} U_i^t) \subset \operatorname{Int}\pi'(U_i) = \operatorname{Int}\pi'([U_i])$. По определению $\partial\pi'([U_i]) = \pi'([U_i]) \setminus \operatorname{Int}\pi'([U_i])$. Отсюда следует включение $\partial\pi'([U_i]) \subset \bigcup_t \pi'(\partial U_i^t)$. Поэтому имеем $\partial\pi'([U_i]) = \bigcup_t \pi'(\partial U_i^t) \setminus \operatorname{Int}\pi'([U_i])$. А отсюда $\bigcup_t \pi'(\partial U_i^t) = \partial\pi'([U_i]) \cup \{(\bigcup_t \pi'(\partial U_i^t)) \cap \operatorname{Int}\pi'([U_i])\}$.

Таким образом, $\bigcup_{t=1}^q g_m(\partial Z^t \cap c_m(\partial U_i^t)) = \bigcup_{t=1}^q (f_m(\pi'(\partial U_i^t)) \setminus f_m \operatorname{Int}\pi'([U_{i+1}])) = f_m(\partial\pi'([U_i]) \cup \{(\bigcup_t \pi'(\partial U_i^t)) \cap \operatorname{Int}\pi'([U_i])\}) \setminus f_m(\operatorname{Int}\pi'([U_{i+1}]))$.

Отображение f_m есть сжатие трубок очереди выше, чем $i+m$, поэтому по тем же причинам, как выше для g_m, символ f_m можно вынести за знак разности. Тем самым получаем $\bigcup_{t=1}^q g_m(\partial Z^t \cap c_m(\partial U_i^t)) = f_m(\{\partial\pi'([U_i]) \cup \{(\bigcup_t \pi'(\partial U_i^t)) \cap \operatorname{Int}\pi'([U_i])\}\} \setminus \operatorname{Int}\pi'([U_{i+1}]))$.

Преобразуем далее это выражение. Заметим, что $(\bigcup_t \pi'(\partial U_i^t)) \cap \operatorname{Int}\pi'([U_i]) = \pi'(\partial M_i) \cap \operatorname{Int}\pi'([U_i])$. Действительно, та часть ∂M_i, на которой определено π', а именно $\partial M_i \cap [U_i]$, содержится в $\bigcup_t \partial U_i^t$. Поэтому правая часть содержится в левой. Вследствие же того, что $\operatorname{Int}\pi(U_i) = \operatorname{Int}\pi'([U_i])$, множество $\operatorname{Int}\pi'([U_i])$ не содержит образов точек из $\bigcup_t \partial U_i^t$ кроме тех, что лежат на ∂M_i. Поэтому на самом деле имеет место равенство.

В обсуждаемом выражении вместо $\operatorname{Int}\pi'([U_{i+1}])$ можно вычитать $\pi'(\partial M_i) \cap \operatorname{Int}\pi'([U_{i+1}])$ по тем же причинам. Но $\partial\pi'([U_i]) \cap \operatorname{Int}\pi'([U_{i+1}]) = \varnothing$, поэтому слагаемое $\partial\pi'([U_i])$ можно вынести из выражения разности.

В итоге получаем, что в других обозначениях

$$\begin{aligned}
&\bigcup_{t=1}^q g_m(\partial Z^t \cap c_m(\partial U_i^t)) \\
&\qquad = f_m(\partial\pi'([U_i]) \cup \{\pi'(\partial M_i) \cap \operatorname{Int}\pi'([U_i])\} \setminus \{\pi'(\partial M_i) \cap \operatorname{Int}\pi'([U_{i+1}])\}) \\
&\qquad = f_m(\partial\pi'([U_i])) \cup f_m(\{\pi'(\partial M_i) \cap \operatorname{Int}\pi'([U_i])\} \setminus \{\pi'(\partial M_i) \cap \operatorname{Int}\pi'([U_{i+1}])\}).
\end{aligned}$$

В частности, множество $f_m\partial\pi'([U_i])$ содержится в $\bigcup_t \{g_m(\partial Z^t \cap c_m(\partial U_i^t))\} \subset \operatorname{Im} r_2' = g(T) \cup (\bigcup_t \{g_m(\partial Z^t \cap c_m(\partial U_i^t))\})$.

Таким образом, искомая вторая ретракция r_2'' может быть построена как ретракция $f_m(\partial\pi'([U_i])) \cup f_m(\{\pi'(\partial M_i) \cap \operatorname{Int}\pi'([U_i])\} \setminus \{\pi'(\partial M_i) \cap \operatorname{Int}\pi'([U_{i+1}])\})$ на $f_m(\partial\pi'([U_i]))$.

Эти два множества совпадают на замыкании дополнения к образу при отображении f_m склеиваемых граней, т.е. на замыкании дополнения к $g_m(W_m \cap c_m(\partial M_i)) = f_m\{\pi'(\partial M_i) \cap \pi'([U_i])\}$. Полагая отображение r_2'' на этой части тождественным, покажем, что оно может быть непрерывно продолжено до ретракции пересечения с $f_m\{\pi'(\partial M_i) \cap \pi'([U_i])\}$ первого из множеств на пересечение с ним же второго, т.е. на $f_m(\partial\pi'([U_i])) \cap f_m\{\pi'(\partial M_i) \cap \pi'([U_i])\} = f_m\{\pi'(\partial M_i) \cap \partial\pi'([U_i])\}$.

В самом деле, пересечение с $f_m\{\pi'(\partial M_i) \cap \pi'([U_i])\}$ первого множества равно

$$\begin{aligned} &f_m(\{\pi'(\partial M_i) \cap \partial\pi'([U_i])\} \cup \{\pi'(\partial M_i) \cap \operatorname{Int}\pi'([U_i])\} \setminus \{\pi'(\partial M_i) \cap \operatorname{Int}\pi'([U_{i+1}])\}) \\ &\quad = f_m(\{\pi'(\partial M_i) \cap \pi'([U_i])\} \setminus \{\pi'(\partial M_i) \cap \operatorname{Int}\pi'([U_{i+1}])\}), \end{aligned}$$

и для окончательного определения r_2'' достаточно построить произвольную деформацию этого множества на $f_m\{\pi'(\partial M_i) \cap \partial\pi'([U_i])\}$ (ибо ее нетривиальная часть отделена от множества точек, на котором отображение r_2'' было определено как тождественное).

Заметим, что отображение f_m, ограниченное на склеенные грани $\pi'([U_i] \cap \partial M_i)$, оказывается гомеоморфизмом, так как f_m сжимает π'-образы кубиков и трубок очереди больше $i+m$. Тем самым, в действительности нужна ретракция $\{\pi'(\partial M_i) \cap \pi'([U_i])\} \setminus \{\pi'(\partial M_i) \cap \operatorname{Int}\pi'([U_{i+1}])\}$ на $\pi'(\partial M_i) \cap \partial\pi'([U_i])$. Как показано выше, множества $\pi'(\partial M_i) \cap \pi'([U_i])$, $\pi'(\partial M_i) \cap \operatorname{Int}\pi'([U_{i+1}])$ и $\pi'(\partial M_i) \cap \partial\pi'([U_i])$ имеют следующий вид. Первое представляет из себя трехмерный диск, второе – содержащийся в нем открытый поддиск, третье – шаровой слой, получающийся из первого множества удалением открытого диска, содержащего второй поддиск. Таким образом, нужная ретракция существует и она определяет требуемую ретракцию r_2'' (тождественную вне $f_m\{\pi'(\partial M_i) \cap \pi'([U_i])\}$). Этим завершается построение $r_2 = r_2'' r_2'$.

Тип 4. Пусть $x \in \pi(M \cap \partial I_0^4)$. Если $x \notin \pi(D \cap \partial I_0^4)$, то $\pi^{-1}(x)$ – одна точка. В этом случае построение окрестностей $\pi(U_i)$ с ацикличными $\pi'([U_i])$ аналогично описанному для типов 1 и 2.

Окрестности $\pi(U_i)$, как и в предыдущих случаях, будут получаться факторизацией из объединения какого-то количества двоичных кубиков. Но так как точка $\pi^{-1}(x)$ лежит на границе большого куба, то пространство $\partial\widetilde{M_p}'$ будет сферой S^3 с несколькими удаленными трехмерными дисками, причем границы всех, кроме одного их них, лежащего на ∂I_0^4, профакторизованы по конечнократным отображениям в себя степени p. Это пространство гомотопически эквивалентно букету трехмерных сфер.

Получаем, что $H_r(\pi(U_i)) = 0$, $r \neq 3$, $H_3(\pi(U_i)) = F$, где F – свободная группа конечного ранга.

Для точек $x \in \pi(D \cap \partial I_0^4)$ строятся окрестности $\operatorname{Int}\pi(U_i)$ тем же способом, что и для типа 3. В результате получаем, что, как и для точек типа 3, $H_r(\operatorname{Int}\pi(U_i))$ – некоторая конечнопорожденная группа, равная нулю при $r > 3$.

Постоянство спектра групп $H_r(\pi(U_i))$ или $H_r(\operatorname{Int}\pi(U_i)))$ доказывается аналогично предыдущим случаям.

Таким образом, компакты $\widetilde{M_p}$ – квазиполиэдры, имеющие несвободные локальные группы в старшей размерности.

3. Гомологические полиэдры и многообразия

Известно [19], что гомологические многообразия над $\mathbb{Z}$ локально ориентируемы. Оказывается, однако, что гомологические полиэдры могут не содержать в себе открытых подмножеств, являющихся гомологическими многообразиями. Более того, это относится и к ($\mathbb{Z}$-n)-пространствам в смысле Бредона (см. введение) с конечнопорожденными локальными группами $H_n^x(\mathbb{Z})$.

Примером такого ($\mathbb{Z}$-n)-пространства для $n = 3$ оказывается построенный в разделе 1 компакт M. В самом деле, имеет место следующий результат.

Предложение. *Для всех $x \in M$ группа $H_k^x(\mathbb{Z}) = 0$ при $k \neq 3$. В размерности 3 различаются следующие два случая*:

1) *если все координаты точки $x \in M$ не двоично рациональные, то $H_3^x(\mathbb{Z}) = 0$;*
2) *если точка $x \in M$ имеет r двоично рациональных координат, то $H_3^x(\mathbb{Z}) = F$, где F – свободная группа конечного ранга не более 2^4p (ранг определяется числом двоично-рациональных координат и тем, лежит ли точка в $D \cup \partial I_0^4$ или нет).*

Доказательство. Для начала заметим, что пространство M является ретрактом куба I_0^4. Искомая ретракция будет пределом последовательности ретракций r_i пространств M_{i-1} на M_i. Последовательность композиций $r_i, \dots, r_1$ сходится, так как r_i есть $\frac{1}{2^i}$-сдвиг. Поэтому M есть AR (утверждение 2.1 гл. 5 в [18]). Теперь приступим непосредственно к вычислениям.

В случае 1) действуем по той же схеме, что и в предыдущей теореме. Конфинальную часть в системе окрестностей составляют окрестности вида U_i, где U_i строятся так же, как для типа 1 в п. 2.2.

Легко видеть, что пространство $[U_i]$ является пространством типа M и потому оно AR. Поэтому $H_n(U_i) = H_{n-1}(\partial U_i)$. Но ∂U_i есть граница четырехмерного куба с удаленным трехмерным подкубом, т.е. ∂U_i гомеоморфно трехмерному диску. Поэтому $H_n(U_i) = H_{n-1}(\partial U_i) = 0$ и $H_n^x(\mathbb{Z}) = 0$ как предел нулевых групп.

В случае 2) конфинальную часть в системе окрестностей точки $x \notin D$ составляют окрестности U_i, появлявшиеся для типа 2 пункта 2.2. Для точки же $x \in D$ конфинальную часть составляют окрестности $U_i = U_i^t$ для типа 3 пункта 2.2.

Пусть N – число кубиков в стандартной окрестности $U_i = M \cap V_i$ точки x (см. конец типа 2 пункта 2.2). По той же причине, что и в предыдущем случае, $[U_i]$ является AR, поэтому $H_n(U_i) = H_{n-1}(\partial U_i)$. Но ∂U_i есть сфера S^3 с N удаленными трехмерными подкубами, т.е. ∂U_i гомотопически эквивалентно букету $N-1$ двумерных сфер. Получаем, что $H_3(U_i) = H_2(\partial U_i) = F$, где F – свободная группа ранга $N-1$, а в остальных размерностях гомологии нулевые.

Доказательство того, что в спектре все отображения – изоморфизмы, производится по той же схеме, что и в предыдущей теореме. Изоморфность отображения $H_n^c(M, M \setminus U_i) \to H_n^c(M, M \setminus U_{i+1})$ эквивалентна тому, что пара $([U_i] \setminus U_{i+1}, \partial U_i)$ ациклична. При этом в силу формул универсальных коэффициентов достаточно установить ацикличность этой пары по отношению к когомологиям H_c^*. Для этого в силу точной последовательности когомологий пары достаточно показать, что включение $\partial U_i \subset [U_i] \setminus U_{i+1}$ индуцирует изоморфизм когомологий. Это делается с помощью уже полученного представления $[U_i] = \varprojlim(W_m, c_m^{m+1})$ и следующей леммы, аналогичной лемме 2.

Лемма 3. *$c_m(\partial U_i)$ – деформационный ретракт $W_m \setminus c_m(U_{i+1})$, причем ретракция – собственное отображение.*

Ее доказательство представляет из себя часть доказательства леммы 2. При доказательстве этой леммы для типов 1, 2, 3 пункта 2.2 была построена ретракция $W_m \setminus c_m(U_{i+1})$ на $c_m(\partial U_i)$, которая после применения отображения g_m давала ретракцию фигурировавших там факторпространств.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] E. Dyer, "On the dimention of products", *Fund. Math.*, **47**:2 (1959), 141–160.

[2] K. Borsuk, "Opening of the conference on geometric topology", *Proceedings of the International Conference on Geometric Topology* (Warszawa, August 24 – September 2, 1978), PWN, Warszawa, 1980, 12–14.

[3] А. Н. Дранишников, "Гомологическая теория размерности", *УМН*, **43**:4 (1988), 11–55.

[4] А. Н. Дранишников, "О размерности произведения ANR-компактов", *Докл. АН СССР*, **300**:5 (1988), 1045–1049.

[5] J. E. West, "Mapping Hilbert cube manifolds to ANR's: a solution of a conjecture of Borsuk", *Ann. of Math.* (2), **106**:1 (1977), 1–18.

[6] Д. Чепмен, *Лекции о Q-многообразиях*, Мир, М., 1981.

[7] А. Э. Харлап, "Локальные гомологии и когомологии, гомологическая размерность и обобщенные многообразия", *Матем. сб.*, **96 (138)**:3 (1975), 347–373.

[8] Г. Бредон, *Теория пучков*, Наука, М., 1988.

[9] Е. Г. Скляренко, "О гомологических умножениях", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **61**:1 (1997), 157–176.

[10] Е. Г. Скляренко, "К теории гомологий, ассоциированной с когомологиями Александрова–Чеха", *УМН*, **34**:6 (1979), 90–118.

[11] Е. М. Бениаминов, Е. Г. Скляренко, "О локальных группах когомологий", *Докл. АН СССР*, **176**:6 (1967), 987–990.

[12] W. J. R. Mitchell, "Homology manifolds, inverse systems and cohomological local connectedness", *J. London Math. Soc.* (2), **19**:2 (1979), 348–358.

[13] Д. Роте, "Периферическая когомологическая локальная связность", *Fund. Math.*, **116**:1 (1983), 53–66.

[14] Е. Г. Скляренко, "К теории обобщенных многообразий", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **35**:4 (1971), 831–843.

[15] Д. Роте, "О характеристике гомологической размерности локальными гомологиями и когомологиями", *Math. Nachr.*, **113** (1983), 53–57.

[16] В. И. Кузьминов, "Гомологическая теория размерности", *УМН*, **23**:5 (1968), 3–49.

[17] Н. Стинрод, С. Эйленберг, *Основания алгебраической топологии*, Физматгиз, М., 1958.

[18] К. Борсук, *Теория ретрактов*, Мир, М., 1971.

[19] G. E. Bredon, "Wilder manifolds are locally orientable", *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **63**:4 (1969), 1079–1081.

Д. В. Артамонов
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: dmitri.artamonov@mail.ru

Поступило
22.12.2005